# CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

**BAND II.**

# CARL FRIEDRICH GAUSS

# WERKE

ZWEITER BAND



HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1863.

# THEOREMATIS ARITHMETICI

## DEMONSTRATIO NOVA

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM TRADITA IAN. 15. 1808.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis. Vol. XVI.
Gottingae MDCCCVIII.

# THEOREMATIS ARITHMETICI

## DEMONSTRATIO NOVA.

1.

Quaestiones ex arithmetica sublimiori saepenumero phaenomenon singulare offerunt, quod in analysi longe rarius occurrit, atque ad illarum illecebras augendas multum confert. Dum scilicet in disquisitionibus analyticis plerumque ad veritates novas pertingere non licet, nisi prius principiis, quibus innituntur quaeque ad eas viam quasi patefacere debent, penitus potiti simus: contra in arithmetica frequentissime per inductionem fortuna quadam inopinata veritates elegantissimae novae prosiliunt, quarum demonstrationes tam profunde latent tantisque tenebris obvolutae sunt, ut omnes conatus eludant, acerrimisque perscrutationibus aditum denegent. Tantus porro adest tamque mirus inter veritates arithmeticas, primo aspectu maxime heterogeneas, nexus, ut haud raro, dum longe alia quaerimus, tandem ad demonstrationem tantopere exoptatam longisque antea meditationibus frustra quaesitam longe alia via quam qua exspectata fuerat felicissime perveniamus. Plerumque autem huiusmodi veritates eius sunt indolis, ut pluribus viis valde diversis adiri queant, nec semper viae brevissimae sint, quae primo se offerunt. In magno itaque certe pretio habendum erit, si, tali veritate longe incassum ventilata, dein demonstrata quidem sed per ambages abstrusiores, tandem viam simplicissimam atque genuinam detegere contigerit.

2.

Inter quaestiones, de quibus in art. praec. diximus, locum insignem tenet theorema omnem fere theoriam residuorum quadraticorum continens, quod in *Disquisitionibus arithmeticis* (Sect. IV.) *theorematis fundamentalis* nomine distinctum

est. Pro *primo* huius elegantissimi theorematis inventore ill. Legendre absque dubio habendus est, postquam longe antea summi geometrae Euler et Lagrange plures eius casus speciales iam per inductionem detexerant. Conatibus horum virorum circa demonstrationem enumerandis hic non immoror; adeant quibus volupe est opus modo commemoratum. Adiicere liceat tantummodo, in confirmationem eorum, quae in art. praec. prolata sunt, quae ad meos conatus pertinent. In ipsum theorema proprio marte incideram anno 1795, dum omnium, quae in arithmetica sublimiori iam elaborata fuerant, penitus ignarus et a subsidiis literariis omnino praeclusus essem: sed per integrum annum me torsit, operamque enixissimam effugit, donec tandem demonstrationem in Sectione quarta operis illius traditam nactus essem. Postea tres aliae principiis prorsus diversis innixae se mihi obtulerunt, quarum unam in Sectione quinta tradidi, reliquas elegantia illa haud inferiores alia occasione publici iuris faciam. Sed omnes hae demonstrationes, etiamsi respectu rigoris nihil desiderandum relinquere videantur, e principiis nimis heterogeneis derivatae sunt, prima forsan excepta; quae tamen per ratiocinia magis laboriosa procedit, operationibusque prolixioribus premitur. Demonstrationem itaque *genuinam* hactenus haud affuisse non dubito pronunciare: esto iam penes peritos iudicium, an ea, quam nuper detegere successit, quamque pagellae sequentes exhibent, hoc nomine decorari mereatur.

### 3.

Theorema. *Sit $p$ numerus primus positivus; $k$ integer quicunque per $p$ non divisibilis;*

*$A$ complexus numerorum* $1, 2, 3 \ldots . \frac{1}{2}(p-1)$

*$B$ complexus horum* $\frac{1}{2}(p+1), \frac{1}{2}(p+3), \frac{1}{2}(p+5) \ldots . p-1$

*Capiantur residua minima positiva productorum ex $k$ in singulos numeros $A$ secundum modulum $p$, quae manifesto omnia diversa erunt, atque partim ad $A$ partim ad $B$ pertinebunt. Iam si ad $B$ omnino $\mu$ residua pertinere supponantur, erit $k$ vel residuum vel non-residuum quadraticum ipsius $p$, prout $\mu$ par est vel impar.*

*Dem.* Sint residua ad $A$ pertinentia haec $a, a', a'' \ldots .$, reliqua ad $B$ pertinentia $b, b', b'' \ldots .$, patetque posteriorum complementa $p-b, p-b', p-b'' \ldots$ cuncta a numeris $a, a', a'' \ldots .$ diversa esse, cum his vero simul sumta comple-

xum $A$ explere. Habemus itaque

$$1.2.3\ldots\tfrac{1}{2}(p-1)=aa'a''\ldots(p-b)(p-b')(p-b'')\ldots$$

Productum posterius autem manifesto fit

$$\equiv(-1)^{\mu}aa'a''\ldots bb'b''\ldots\equiv(-1)^{\mu}k.2k.3k\ldots\tfrac{1}{2}(p-1)k$$

$$\equiv(-1)^{\mu}k^{\frac{1}{2}(p-1)}1.2.3\ldots\tfrac{1}{2}(p-1)\pmod{p}$$

Hine erit

$$1\equiv(-1)^{\mu}k^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

sive $k^{\frac{1}{2}(p-1)}\equiv\pm1$, prout $\mu$ par est vel impar, unde theorema nostrum protinus demanat.

4.

Ratiocinia sequentia magnopere abbreviare licebit per introductionem quarundam designationum idonearum. Exprimet igitur nobis character $(k, p)$ multitudinem productorum ex his

$$k.\ 2k.\ 3k\ldots\tfrac{1}{2}(p-1)k,$$

quorum residua minima positiva secundum modulum $p$ huius semissem superant. Porro existente $x$ quantitate quacunque non integra, per signum $[x]$ exprimemus integrum ipsa $x$ proxime minorem, ita ut $x-[x]$ semper fiat quantitas positiva intra limites 0 et 1 sita. Levi iam negotio relationes sequentes evolventur:

I. $[x]+[-x]=-1$.

II. $[x]+h=[x+h]$, quoties $h$ est integer.

III. $[x]+[h-x]=h-1$.

IV. Si $x-[x]$ est fractio minor quam $\frac{1}{2}$, erit $[2x]-2[x]=0$; si vero $x-[x]$ est maior quam $\frac{1}{2}$, erit $[2x]-2[x]=1$.

V. Iacente itaque residuo minimo positivo integri $h$ secundum modulum $p$ infra $\frac{1}{2}p$, erit $[\frac{2h}{p}]-2[\frac{h}{p}]=0$; iacente autem residuo illo ultra $\frac{1}{2}p$, erit $[\frac{2h}{p}]-2[\frac{h}{p}]=1$.

VI. Hinc statim sequitur $(k, p) =$

$$\left[\tfrac{2k}{p}\right]+\left[\tfrac{4k}{p}\right]+\left[\tfrac{6k}{p}\right]\ldots\ldots+\left[\tfrac{(p-1)k}{p}\right]$$
$$-2\left[\tfrac{k}{p}\right]-2\left[\tfrac{2k}{p}\right]-2\left[\tfrac{3k}{p}\right]\ldots\ldots-2\left[\tfrac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right].$$

VII. Ex VI. et I. nullo negotio derivatur

$$(k, p)+(-k, p) = \tfrac{1}{2}(p-1)$$

Unde sequitur, $-k$ vel eandem vel oppositam relationem ad $p$ habere (quatenus huius residuum aut non-residuum quadraticum est) ut $+k$, prout $p$ vel formae $4n+1$ fuerit, vel formae $4n+3$. In casu priori manifesto $-1$ residuum, in posteriori non-residuum ipsius $p$ erit.

VIII. Formulam in VI. traditam sequenti modo transformabimus. Per III. fit

$$\left[\tfrac{(p-1)k}{p}\right] = k-1-\left[\tfrac{k}{p}\right],\ \left[\tfrac{(p-3)k}{p}\right] = k-1-\left[\tfrac{3k}{p}\right],\ \left[\tfrac{(p-5)k}{p}\right] = k-1-\left[\tfrac{5k}{p}\right]\ldots.$$

Applicando hasce substitutiones ad $\frac{p\mp 1}{4}$ membra ultima seriei superioris in illa expressione, habebimus

*primo*, quoties $p$ est formae $4n+1$

$$\begin{aligned}(k, p) = {} & \tfrac{1}{4}(k-1)(p-1)\\ & -2\left\{\left[\tfrac{k}{p}\right]+\left[\tfrac{3k}{p}\right]+\left[\tfrac{5k}{p}\right]\ldots.+\left[\tfrac{\frac{1}{2}(p-3)k}{p}\right]\right\}\\ & -\left\{\left[\tfrac{k}{p}\right]+\left[\tfrac{2k}{p}\right]+\left[\tfrac{3k}{p}\right]\ldots.+\left[\tfrac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right]\right\}\end{aligned}$$

*secundo*, quoties $p$ est formae $4n+3$

$$\begin{aligned}(k, p) = {} & \tfrac{1}{4}(k-1)(p+1)\\ & -2\left\{\left[\tfrac{k}{p}\right]+\left[\tfrac{3k}{p}\right]+\left[\tfrac{5k}{p}\right]\ldots.+\left[\tfrac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right]\right\}\\ & -\left\{\left[\tfrac{k}{p}\right]+\left[\tfrac{2k}{p}\right]+\left[\tfrac{3k}{p}\right]\ldots.+\left[\tfrac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right]\right\}\end{aligned}$$

IX. Pro casu speciali $k = +2$ e formulis modo traditis sequitur $(2, p) = \frac{1}{4}(p\mp 1)$, sumendo signum superius vel inferius, prout $p$ est formae $4n+1$ vel $4n+3$. Erit itaque $(2, p)$ par, adeoque $2Rp$, quoties $p$ est formae $8n+1$ vel $8n+7$; contra erit $(2, p)$ impar atque $2Np$, quoties $p$ est formae $8n+3$ vel $8n+5$.

5.

**Theorema.** *Sit $x$ quantitas positiva non integra, inter cuius multipla $x$, $2x$, $3x\ldots.$ usque ad $nx$ nullum fiat integer; ponatur $[nx] = h$, unde facile concluditur, etiam inter multipla quantitatis reciprocae $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{3}{x}\ldots.$ usque ad $\frac{h}{x}$ integrum non reperiri. Tum dico fore*

$$\left.\begin{array}{l}[x]+[2x]+[3x]\ldots+[nx]\\ +[\frac{1}{x}]+[\frac{2}{x}]+[\frac{3}{x}]\ldots.+[\frac{h}{x}]\end{array}\right\} = nh$$

*Dem.* Seriei $[x]+[2x]+[3x]\ldots.+[nx]$, quam ponemus $=\Omega$, membra prima usque ad $[\frac{1}{x}]^{\text{tum}}$ inclus. manifesto omnia erunt $=0$; sequentia usque ad $[\frac{2}{x}]^{\text{tum}}$ cuncta $=1$; sequentia usque ad $[\frac{3}{x}]^{\text{tum}}$ cuncta $=2$ et sic porro. Hinc fit

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = 0\times[\frac{1}{x}]\\ \quad +1\times\{[\frac{2}{x}]-[\frac{1}{x}]\}\\ \quad +2\times\{[\frac{3}{x}]-[\frac{2}{x}]\}\\ \quad +3\times\{[\frac{4}{x}]-[\frac{3}{x}]\}\\ \qquad \text{etc.}\\ \quad +(h-1)\{[\frac{h}{x}]-[\frac{h-1}{x}]\}\\ \quad +h\{n-[\frac{h}{x}]\}\end{array}\right\} = hn-[\frac{1}{x}]-[\frac{2}{x}]-[\frac{3}{x}]\ldots.-[\frac{h}{x}]$$

Q. E. D.

6.

**Theorema.** *Designantibus $k, p$ numeros positivos impares inter se primos quoscunque, erit*

$$\left.\begin{array}{l}[\frac{k}{p}]+[\frac{2k}{p}]+[\frac{3k}{p}]\ldots.+[\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}]\\ +[\frac{p}{k}]+[\frac{2p}{k}]+[\frac{3p}{k}]\ldots.+[\frac{\frac{1}{2}(k-1)p}{k}]\end{array}\right\} = \tfrac{1}{4}(k-1)(p-1).$$

*Demonstr.* Supponendo, quod licet, $k<p$, erit $\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}$ minor quam $\frac{1}{2}k$, sed maior quam $\frac{1}{2}(k-1)$, adeoque $[\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}] = \frac{1}{2}(k-1)$. Hinc patet theorema praesens ex praec. protinus sequi, statuendo illic $\frac{k}{p} = x$, $\frac{1}{2}(p-1) = n$, adeoque $\frac{1}{2}(k-1) = h$.

Ceterum simili modo demonstrari potest, si $k$ fuerit numerus *par* ad $p$ primus, fore

$$\left.\begin{matrix}[\frac{k}{p}]+[\frac{2k}{p}]+[\frac{3k}{p}]\ldots\ldots+[\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}]\\ +[\frac{p}{k}]+[\frac{2p}{k}]+[\frac{3p}{k}]\ldots\ldots+[\frac{\frac{1}{2}kp}{k}]\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}k(p-1)$$

At huic propositioni ad institutum nostrum non necessariae non immoramur.

7.

Iam ex combinatione theorematis praec. cum propos. VIII. art. 4. theorema fundamentale protinus demanat. Nimirum denotantibus $k$, $p$ numeros primos positivos inaequales quoscunque, et ponendo

$$(k,p)+[\tfrac{k}{p}]+[\tfrac{2k}{p}]+[\tfrac{3k}{p}]\ldots\ldots+[\tfrac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}] = L$$
$$(p,k)+[\tfrac{p}{k}]+[\tfrac{2p}{k}]+[\tfrac{3p}{k}]\ldots\ldots+[\tfrac{\frac{1}{2}(k-1)p}{k}] = M$$

per VIII. art. 4. patet, $L$ et $M$ semper fieri numeros pares. At per theorema art. 6. erit

$$L+M = (k,p)+(p,k)+\tfrac{1}{4}(k-1)(p-1)$$

Quoties igitur $\frac{1}{4}(k-1)(p-1)$ par evadit, quod fit, si vel uterque $k$, $p$ vel saltem alteruter est formae $4n+1$, necessario $(k,p)$ et $(p,k)$ vel ambo pares vel ambo impares esse debent. Quoties autem $\frac{1}{4}(k-1)(p-1)$ impar est, quod evenit, si uterque $k$, $p$ est formae $4n+3$, necessario alter numerorum $(k,p)$, $(p,k)$ par, alter impar esse debebit. In casu priori itaque relatio ipsius $k$ ad $p$ et relatio ipsius $p$ ad $k$ (quatenus alter alterius residuum vel non-residuum est) identicae erunt, in casu posteriori oppositae.

Q. E. D.

# SUMMATIO

# QUARUMDAM SERIERUM

# SINGULARIUM

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

EXHIBITA SOCIETATI D. XXIV. AUGUST. MDCCCVIII.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. I.
Gottingae MDCCCXI.

SUMMATIO

# QUARUMDAM SERIERUM SINGULARIUM.

---

1.

Inter veritates insigniores, ad quas theoria divisionis circuli aditum aperuit, locum haud ultimum sibi vindicat summatio in Disquiss. Arithmet. art. 356 proposita, non modo propter elegantiam suam peculiarem, miramque foecunditatem, quam fusius exponendi occasionem posthac dabit alia disquisitio, sed ideo quoque, quod eius demonstratio rigorosa atque completa difficultatibus haud vulgaribus premitur. Quae sane eo minus exspectari debuissent, quum non tam in ipsum theorema cadant, quam potius in aliquam theorematis limitationem, qua neglecta demonstratio statim in promtu est, facillimeque è theoria in opere isto explicata derivatur. Theorema illic exhibitum est in forma sequente. Supponendo $n$ esse numerum primum, denotandoque indefinite omnia residua quadratica ipsius $n$ inter limites 1 et $n-1$ incl. sita per $a$, omniaque non-residua inter eosdem limites iacentia per $b$, denique per $\omega$ arcum $\frac{360^0}{n}$, et per $k$ integrum determinatum quemcunque per $n$ non divisibilem, erit

I. pro valore ipsius $n$, qui est formae $4m+1$,

$$\Sigma\cos ak\omega = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n}$$

$$\Sigma\cos bk\omega = -\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{n}, \quad \text{adeoque}$$

$$\Sigma\cos ak\omega - \Sigma\cos bk\omega = \pm\sqrt{n}$$

$$\Sigma\sin ak\omega = 0$$

$$\Sigma\sin bk\omega = 0$$

II. pro valore ipsius $n$, qui est formae $4m+3$,

$$\Sigma \cos a k \omega = -\tfrac{1}{2}$$
$$\Sigma \cos b k \omega = -\tfrac{1}{2}$$
$$\Sigma \sin a k \omega = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n}$$
$$\Sigma \sin b k \omega = \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{n}$$
$$\Sigma \sin a k \omega - \Sigma \sin b k \omega = \pm\sqrt{n}$$

Hae summationes l. c. omni rigore demonstratae sunt, neque alia difficultas hic remanet nisi in determinatione *signi* quantitati radicali praefigendi. Nullo quidem negotio ostendi potest, hoc signum eatenus a numero $k$ pendere, quod semper pro cunctis valoribus ipsius $k$, qui sint residua qnadratica ipsius $n$, signum *idem* valere debeat, et contra signum huic oppositum pro omnibus valoribus ipsius $k$, qui sint non-residua quadratica ipsius $n$. Hinc totum negotium in valore $k=1$ versabitur, patetque, quam primum signum pro hoc valore valens innotuerit, pro omnibus quoque reliquis valoribus ipsius $k$ signa statim in promtu fore. Vernm enim vero in hac ipsa quaestione, quae primo aspectu inter faciliores referenda videtur, in difficultates improvisas incidimus, methodusque, qua ducente sine impedimentis hucusque progressi eramus, auxilium ulterius prorsus denegat.

2.

Haud abs re erit, antequam ulterins progrediamur, quaedam exempla summationis nostrae per calculum numericum evolvisse: huic vero quasdam observationes generales praemittere conveniet.

I. Si in casu eo, ubi $n$ est numerus primus formae $4m+1$, omnia residua quadratica ipsius $n$ inter 1 et $\tfrac{1}{2}(n-1)$ incl. iacentia indefinite per $a'$ exhibentur, omniaque non-residua inter eosdem limites per $b'$, constat, omnes $n-a'$ inter ipsos $a$, omnesque $n-b'$ inter $b$ comprehensos fore: quamobrem quum omnes $a'$, $b'$, $n-a'$, $n-b'$ manifesto totum complexum numerorum $1, 2, 3 \ldots\ldots n-1$ expleant, omnes $a'$ cum omnibus $n-a'$ iuncti omnes $a$ complectentur, et perinde omnes $b'$ cum omnibus $n-b'$ iuncti omnes $b$ comprehendent. Hinc erit

$$\Sigma \cos a k \omega = \Sigma \cos a' k \omega + \Sigma \cos (n - a') k \omega$$
$$\Sigma \cos b k \omega = \Sigma \cos b' k \omega + \Sigma \cos (n - b') k \omega$$
$$\Sigma \sin a k \omega = \Sigma \sin a' k \omega + \Sigma \sin (n - a') k \omega$$
$$\Sigma \sin b k \omega = \Sigma \sin b' k \omega + \Sigma \sin (n - b') k \omega$$

Iam quum habeatur $\cos (n - a') k\omega = \cos a' k \omega$, $\cos (n - b') k \omega = \cos b' k \omega$. $\sin (n - a') k\omega = -\sin a' k \omega$, $\sin (n - b') k \omega = -\sin b' k \omega$, patet sponte fieri

$$\Sigma \sin a k \omega = \Sigma \sin a' k \omega - \Sigma \sin a' k \omega = 0$$
$$\Sigma \sin b k \omega = \Sigma \sin b' k \omega - \Sigma \sin b' k \omega = 0$$

Summatio cosinuum vero hanc formam assumit

$$\Sigma \cos a k \omega = 2 \Sigma \cos a' k \omega$$
$$\Sigma \cos b k \omega = 2 \Sigma \cos b' k \omega$$

unde fieri debebit

$$1 + 4 \Sigma \cos a' k \omega = \pm \sqrt{n}$$
$$1 + 4 \Sigma \cos b' k \omega = \mp \sqrt{n}$$
$$2 \Sigma \cos a' k \omega - 2 \Sigma \cos b' k \omega = \pm \sqrt{n}$$

II. In casu eo, ubi $n$ est formae $4m + 3$, complementum cuiusvis residui $a$ ad $n$ erit non-residuum, complementumque cuiusvis $b$ erit residuum; quocirca omnes $n - a$ convenient cum omnibus $b$, omnesque $n - b$ cum omnibus $a$. Hinc colligitur

$$\Sigma \cos a k \omega = \Sigma \cos (n - b) k \omega = \Sigma \cos b k \omega$$

quare quum omnes $a$ et $b$ iuncti omnes numeros $1, 2, 3 \ldots . n - 1$ expleant, adeoque fiat $\Sigma \cos a k \omega + \Sigma \cos b k \omega = \cos k \omega + \cos 2 k \omega + \cos 3 k \omega +$ etc. $+ \cos (n - 1) k \omega = -1$, summationes

$$\Sigma \cos a k \omega = -\tfrac{1}{2}$$
$$\Sigma \cos b k \omega = -\tfrac{1}{2}$$

sponte sunt obviae. Perinde erit

$$\Sigma \sin a k \omega = \Sigma \sin (n - b) k \omega = -\Sigma \sin b k \omega$$

unde patet, quomodo summationum

$$2\Sigma \sin ak\omega = \pm\sqrt{n}$$
$$2\Sigma \sin bk\omega = \mp\sqrt{n}$$

altera ab altera pendeat.

3.

Ecce iam computum numericum pro aliquot exemplis:

I. Pro $n = 5$ adest valor unus ipsius $a'$, puta $a' = 1$, valorque unus ipsius $b'$, puta $b' = 2$; est autem

$\cos\omega = +0,3090169944$ $\qquad$ $\cos 2\omega = -0,8090169944$

adeoque $1 + 4\cos\omega = +\sqrt{5}$, $1 + 4\cos 2\omega = -\sqrt{5}$.

II. Pro $n = 13$ adsunt tres valores ipsius $a'$, puta 1, 3, 4, totidemque valores ipsius $b'$, puta 2, 5, 6, unde computamus

| | |
|---|---|
| $\cos\omega = +0,8854560257$ | $\cos 2\omega = +0,5680647467$ |
| $\cos 3\omega = +0,1205366803$ | $\cos 5\omega = -0,7485107482$ |
| $\cos 4\omega = -0,3546048870$ | $\cos 6\omega = -0,9709418174$ |
| Summa $= +0,6513878190$ | Summa $= -1,1513878189$ |

Hinc $1 + 4\Sigma\cos a'\omega = +\sqrt{13}$, $1 + 4\Sigma\cos b'\omega = -\sqrt{13}$.

III. Pro $n = 17$ habemus quatuor valores ipsius $a'$, puta 1, 2, 4, 8, totidemque valores ipsius $b'$, puta 3, 5, 6, 7. Hinc computantur cosinus

| | |
|---|---|
| $\cos\omega = +0,9324722294$ | $\cos 3\omega = +0,4457383558$ |
| $\cos 2\omega = +0,7390089172$ | $\cos 5\omega = -0,2736629901$ |
| $\cos 4\omega = +0,0922683595$ | $\cos 6\omega = -0,6026346364$ |
| $\cos 8\omega = -0,9829730997$ | $\cos 7\omega = -0,8502171357$ |
| Summa $= +0,7807764064$ | Summa $= -1,2807764065$ |

Hinc $1 + 4\Sigma\cos a'\omega = +\sqrt{17}$, $1 + 4\Sigma\cos b'\omega = -\sqrt{17}$.

IV. Pro $n = 3$ adest valor unicus ipsius $a$, puta $a = 1$, cui respondet

$$\sin\omega = +0{,}8660254038$$

Hinc $2\sin\omega = +\sqrt{3}$.

V. Pro $n = 7$ adsunt valores tres ipsius $a$, puta 1, 2, 4: hinc habentur sinus

$$\begin{aligned} \sin\omega &= +0{,}7818314825 \\ \sin 2\omega &= +0{,}9749279122 \\ \sin 4\omega &= -0{,}4338837391 \\ \hline \text{Summa} &= +1{,}3228756556, \end{aligned}$$

adeoque $2\Sigma\sin a\omega = +\sqrt{7}$.

VI. Pro $n = 11$ valores ipsius $a$ sunt 1, 3, 4, 5, 9, quibus respondent sinus

$$\begin{aligned} \sin\omega &= +0{,}5406408175 \\ \sin 3\omega &= +0{,}9898214419 \\ \sin 4\omega &= +0{,}7557495744 \\ \sin 5\omega &= +0{,}2817325568 \\ \sin 9\omega &= -0{,}9096319954 \\ \hline \text{Summa} &= +1{,}6583123952, \end{aligned}$$

et proin $2\Sigma\sin a\omega = +\sqrt{11}$.

VII. Pro $n = 19$ valores ipsius $a$ sunt 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17, quibus respondent sinus

$$\begin{aligned} \sin\omega &= +0{,}3246994692 \\ \sin 4\omega &= +0{,}9694002659 \\ \sin 5\omega &= +0{,}9065844930 \\ \sin 6\omega &= +0{,}9157733267 \\ \sin 7\omega &= +0{,}7357239107 \\ \sin 9\omega &= +0{,}1645945903 \\ \sin 11\omega &= -0{,}4759473930 \\ \sin 16\omega &= -0{,}8371664783 \\ \sin 17\omega &= -0{,}6142127127 \\ \hline \text{Summa} &= +2{,}1794494718, \end{aligned}$$

adeoque $2\Sigma\sin a\omega = +\sqrt{19}$.

4.

In omnibus hisce exemplis quantitas radicalis signum positivum obtinet, idemque facile pro valoribus maioribus $n = 23$, $n = 29$ etc. confirmatur, unde fortis iam probabilitas oritur, hoc generaliter perinde se habere. Sed demonstratio huius phaenomeni e principiis l. c. expositis peti nequit, plenissimoque iure altioris indaginis aestimanda est. Propositum itaque huius commentationis eo tendit, ut demonstrationem rigorosam huius elegantissimi theorematis, per plures annos olim variis modis incassum tentatam, tandemque per considerationes singulares satisque subtiles feliciter perfectam in medium proferamus, simulque theorema ipsum salva seu potius aucta elegantia sua ad longe maiorem generalitatem evehamus. Coronidis denique loco nexum mirabilem arctissimum inter hanc summationem aliudque theorema arithmeticum gravissimum docebimus. Speramus, hasce disquisitiones non modo per se geometris gratas fore, sed methodos quoque, per quas haec omnia efficere licuit, quaeque in aliis quoque occasionibus utiles esse poterunt, ipsorum attentione dignas visum iri.

5.

Petita est demonstratio nostra e consideratione generis singularis progressionum, quarum termini pendent ab expressionibus talibus

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots\ldots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^\mu)}$$

Brevitatis caussa talem fractionem per $(m, \mu)$ denotabimus, et primo quasdam observationes generales circa huiusmodi functiones praemittemus.

I. Quoties $m$ est integer positivus minor quam $\mu$, functio $(m, \mu)$ manifesto evanescit, numeratore factorem $1-x^0$ implicante. Pro $m = \mu$, factores in numeratore identici erunt ordine inverso cum factoribus in denominatore, unde erit $(\mu, \mu) = 1$; denique pro casu eo, ubi $m$ est integer positivus maior quam $\mu$, habentur formulae

$$(\mu+1, \mu) = \frac{1-x^{\mu+1}}{1-x} = (\mu+1, 1)$$

$$(\mu+2, \mu) = \frac{(1-x^{\mu+2})(1-x^{\mu+1})}{(1-x)(1-xx)} = (\mu+2, 2)$$

$$(\mu+3, \mu) = \frac{(1-x^{\mu+3})(1-x^{\mu+2})(1-x^{\mu+1})}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)} = (\mu+3, 3) \text{ etc.}$$

sive generaliter

$$(m, \mu) = (m, m - \mu)$$

II. Porro facile confirmatur, haberi generaliter

$$(m, \mu+1) = (m-1, \mu+1) + x^{m-\mu-1}(m-1, \mu)$$

quamobrem, quum perinde sit

$$(m-1, \mu+1) = (m-2, \mu+1) + x^{m-\mu-2}(m-2, \mu)$$
$$(m-2, \mu+1) = (m-3, \mu+1) + x^{m-\mu-3}(m-3, \mu)$$
$$(m-3, \mu+1) = (m-4, \mu+1) + x^{m-\mu-4}(m-4, \mu) \text{ etc.,}$$

quae series continuari poterit usque ad

$$(\mu+2, \mu+1) = (\mu+1, \mu+1) + x(\mu+1, \mu)$$
$$= (\mu, \mu) + x(\mu+1, \mu)$$

siquidem $m$ est integer positivus maior quam $\mu+1$, erit

$$(m, \mu+1) = (\mu, \mu) + x(\mu+1, \mu) + xx(\mu+2, \mu) + x^3(\mu+3, \mu) + \text{etc.}$$
$$+ x^{m-\mu-1}(m-1, \mu)$$

Hinc patet, si pro aliquo valore determinato ipsius $\mu$ quaevis functio $(m, \mu)$ integra sit, existente $m$ integro positivo, etiam quamvis functionem $(m, \mu+1)$ integram evadere debere. Quare quum suppositio illa pro $\mu = 1$ locum habeat, eadem etiam pro $\mu = 2$ valebit, atque hinc etiam pro $\mu = 3$ etc., *i. e.* generaliter pro valore quocunque integro positivo ipsius $m$ erit $(m, \mu)$ functio integra, sive productum

$$(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots\ldots(1-x^{m-\mu+1})$$

divisibile per

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^\mu)$$

6.

Duas iam progressiones considerabimus, quae ambae ad scopum nostrum ducere possunt. Progressio prima haec est

$$1-\frac{1-x^m}{1-x}+\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})}{(1-x)\ (1-xx)}-\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})}{(1-x)\ (1-xx)\ (1-x^3)}+\text{etc.}$$

sive

$$1-(m,1)+(m,2)-(m,3)+(m,4)-\text{etc.}$$

quam brevitatis caussa per $f(x, m)$ denotabimus. Primo statim obvium est, quoties $m$ sit numerus integer positivus, hanc seriem post terminum suum $m+1^{\text{tum}}$ (qui fit $=\pm 1$) *abrumpi*, adeoque in hoc casu summam fieri debere functionem finitam integram ipsius $x$. Porro per art. 5. II. patet, generaliter pro valore quocunque ipsius $m$ haberi

$$\begin{aligned}1 &= 1\\ -(m,1) &= -(m-1,1)-x^{m-1}\\ +(m,2) &= +(m-1,2)+x^{m-2}(m-1,1)\\ -(m,3) &= -(m-1,3)-x^{m-3}(m-1,2)\ \text{etc.}\end{aligned}$$

adeoque

$$f(x,m) = 1-x^{m-1}-(1-x^{m-2})(m-1,1)+(1-x^{m-3})(m-1,2)$$
$$-(1-x^{m-4})(m-1,3)+\text{etc.}$$

Sed manifesto fit

$$\begin{aligned}(1-x^{m-2})(m-1,1) &= (1-x^{m-1})(m-2,1)\\ (1-x^{m-3})(m-1,2) &= (1-x^{m-1})(m-2,2)\\ (1-x^{m-4})(m-1,3) &= (1-x^{m-1})(m-2,3)\ \text{etc.}\end{aligned}$$

unde deducimus aequationem

$$f(x,m) = (1-x^{m-1})\,f(x,m-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

## 7.

Quum pro $m=0$ fiat $f(x,m)=1$, per formulam modo inventam erit

$$\begin{aligned}f(x,2) &= 1-x\\ f(x,4) &= (1-x)(1-x^3)\\ f(x,6) &= (1-x)(1-x^3)(1-x^5)\\ f(x,8) &= (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ \text{etc.}\end{aligned}$$

sive generaliter pro valore quocunque pari ipsius $m$

$$f(x,m) = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots(1-x^{m-1})\ \ldots\ldots \quad [2]$$

Contra quum pro $m = 1$ fiat $f(x, m) = 0$, erit etiam

$$f(x,3) = 0$$
$$f(x,5) = 0$$
$$f(x,7) = 0 \text{ etc.}$$

sive generaliter pro valore quocunque impari ipsius $m$

$$f(x, m) = 0$$

Ceterum summatio posterior iam inde derivari potuisset, quod in progressione

$$1-(m,1)+(m,2)-(m,3)+\text{etc.}+(m,m-1)-(m,m)$$

terminus ultimus primum destruit, penultimus secundum etc.

8.

Ad scopum quidem nostrum sufficit casus is, ubi $m$ est integer positivus impar: sed propter rei singularitatem etiam de casibus iis, ubi $m$ vel fractus vel negativus est, pauca adiecisse haud poenitebit. Manifesto tunc series nostra haud amplius abrumpetur, sed in infinitum excurret, facileque insuper perspicitur, divergentem eam fieri, quoties ipsi $x$ valor minor quam $1$ tribuatur, quapropter ipsius summatio ad valores ipsius $x$ qui sint maiores quam $1$ restringi debebit.

Per formulam [1] art. 6. habemus

$$f(x,-2) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

$$f(x,-4) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x^3}}$$

$$f(x,-6) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x^3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x^5}} \quad \text{etc.}$$

ita ut valor functionis $f(x, m)$ etiam pro valore negativo integro pari ipsius $m$ in terminis finitis assignabilis sit. Pro reliquis vero valoribus ipsius $m$ functionem $f(x, m)$ in *productum infinitum* sequenti modo convertemus.

Crescente $m$ in valorem negativum *infinitum*, functio $f(x, m)$ transit in

$$1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{xx-1}+\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{xx-1}\cdot\frac{1}{x^3-1}+\text{ etc.}$$

Haec itaque series aequalis est producto infinito

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x^3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x^5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x^7}}\text{ etc. in infin.}$$

Porro quum generaliter sit

$$f(x,\,m)=f(x,\,m-2\lambda).(1-x^{m-1})(1-x^{m-3})(1-x^{m-5})..(1-x^{m-2\lambda+1})$$

erit

$$f(x,\,m)=f(x,\,-\infty).(1-x^{m-1})(1-x^{m-3})(1-x^{m-5})\text{ etc. in infin.}$$

$$=\frac{1-x^{m-1}}{1-x^{-1}}\cdot\frac{1-x^{m-3}}{1-x^{-3}}\cdot\frac{1-x^{m-5}}{1-x^{-5}}\cdot\frac{1-x^{m-7}}{1-x^{-7}}\text{ etc. in infin.}$$

quos factores tandem continuo magis ad unitatem convergere palam est.

Attentionem peculiarem meretur casus $m=-1$, ubi fit

$$f(x,\,-1)=1+x^{-1}+x^{-3}+x^{-6}+x^{-10}+\text{ etc.}$$

Haec itaque series aequatur producto infinito

$$\frac{1-x^{-2}}{1-x^{-1}}\cdot\frac{1-x^{-4}}{1-x^{-3}}\cdot\frac{1-x^{-6}}{1-x^{-5}}\text{ etc.}$$

sive scribendo $x$ pro $x^{-1}$, erit

$$1+x+x^3+x^6+\text{ etc }=\frac{1-xx}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^7}\text{ etc.}$$

Haec aequalitas inter duas expressiones abstrusiores, ad quas alia occasione reveniemus, valde sane est memorabilis.

9.

Secundo loco considerabimus progressionem hancce

$$1+x^{\frac{1}{2}}\frac{1-x^m}{1-x}+x\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})}{(1-x)\;(1-xx)}+x^{\frac{3}{2}}\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})}{(1-x)\;(1-xx)\;(1-x^3)}+\text{ etc.}$$

sive

$$1+x^{\frac{1}{2}}(m,1)+x(m,2)+x^{\frac{3}{2}}(m,3)+xx(m,4)+\text{ etc.}$$

quam per $F(x,\,m)$ denotabimus. Restringemus hanc disquisitionem ad casum eum, ubi $m$ est integer positivus, ita ut haec quoque series semper abrumpatur

cum termino $m+1^{\text{to}}$, qui est $= x^{\frac{1}{2}m}(m, m)$. Quum sit

$$(m, m) = 1, \quad (m, m-1) = (m, 1), \quad (m, m-2) = (m, 2) \text{ etc.}$$

progressio ita quoque exhiberi poterit:

$$F(x, m) = x^{\frac{1}{2}m} + x^{\frac{1}{2}(m-1)}(m, 1) + x^{\frac{1}{2}(m-2)}(m, 2) + x^{\frac{1}{2}(m-3)}(m, 3) + \text{etc.}$$

Hinc fit

$$\begin{aligned}(1+x^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}})\, F(x, m) = {} & 1 + x^{\frac{1}{2}}(m, 1) + x(m, 2) + x^{\frac{3}{2}}(m, 3) + \text{etc.} \\ & + x^{\frac{1}{2}}.x^m + x.x^{m-1}(m, 1) + x^{\frac{3}{2}}.x^{m-2}(m, 2) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Quare quum habeatur (art. 5. II)

$$\begin{aligned}(m, 1) + x^m &= (m+1, 1) \\ (m, 2) + x^{m-1}(m, 1) &= (m+1, 2) \\ (m, 3) + x^{m-2}(m, 2) &= (m+1, 3) \text{ etc.,}\end{aligned}$$

provenit

$$(1+x^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}})\, F(x, m) = F(x, m+1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [3]$$

Sed fit $F(x, 0) = 1$: quamobrem erit

$$\begin{aligned}F(x, 1) &= 1 + x^{\frac{1}{2}} \\ F(x, 2) &= (1+x^{\frac{1}{2}})(1+x) \\ F(x, 3) &= (1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)(1+x^{\frac{3}{2}}) \text{ etc.,}\end{aligned}$$

sive generaliter

$$F(x, m) = (1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)(1+x^{\frac{3}{2}}) \ldots (1+x^{\frac{1}{2}m}) \quad \ldots\ldots \quad [4]$$

## 10.

Praemissis hisce disquisitionibus praeliminaribus iam propius ad propositum nostrum accedamus. Quum pro valore primo ipsius $n$ quadrata $1, 4, 9 \ldots (\frac{1}{2}(n-1))^2$ omnia inter se incongrua sint secundum modulum $n$, patet, illorum residua minima secundum hunc modulum cum numeris $a$ identica esse debere, adeoque

$$\begin{aligned}\Sigma \cos a k\omega &= \cos k\omega + \cos 4k\omega + \cos 9k\omega + \text{etc.} + \cos(\tfrac{1}{2}(n-1))^2 k\omega \\ \Sigma \sin a k\omega &= \sin k\omega + \sin 4k\omega + \sin 9k\omega + \text{etc.} + \sin(\tfrac{1}{2}(n-1))^2 k\omega\end{aligned}$$

Perinde quum eadem quadrata $1, 4, 9 \ldots (\frac{1}{2}(n-1))^2$ ordine inverso congrua sint his $(\frac{1}{2}(n+1))^2$, $(\frac{1}{2}(n+3))^2$, $(\frac{1}{2}(n+5))^2 \ldots (n-1)^2$, etiam erit

$$\Sigma \cos a k\omega = \cos(\tfrac{1}{4}(n+1))^2 k\omega + \cos(\tfrac{1}{4}(n+3))^2 k\omega + \text{etc.} + \cos(n-1)^2 k\omega$$
$$\Sigma \sin a k\omega = \sin(\tfrac{1}{4}(n+1))^2 k\omega + \sin(\tfrac{1}{4}(n+3))^2 k\omega + \text{etc.} + \sin(n-1)^2 k\omega$$

Statuendo itaque

$$T = 1 + \cos k\omega + \cos 4k\omega + \cos 9k\omega + \text{etc.} + \cos(n-1)^2 k\omega$$
$$U = \sin k\omega + \sin 4k\omega + \sin 9k\omega + \text{etc.} + \sin(n-1)^2 k\omega$$

erit

$$1 + 2\Sigma \cos a k\omega = T$$
$$2\Sigma \sin a k\omega = U$$

Hinc patet, summationes, quales in art. 1. propositae sunt, pendere a summatione serierum $T$ et $U$, quocirca, missis illis, disquisitionem nostram his adaptabimus, eaque generalitate absolvemus, ut non modo valores primos ipsius $n$, sed quoscunque compositos complectatur. Numerum $k$ autem supponemus ad $n$ primum esse: nullo enim negotio casus is, ubi $k$ et $n$ divisorem communem haberent, ad hunc reduci poterit.

11.

Designemus quantitatem imaginariam $\sqrt{-1}$ per $i$, statuamusque

$$\cos k\omega + i \sin k\omega = r$$

unde erit $r^n = 1$, sive $r$ radix aequationis $r^n - 1 = 0$. Facile perspicictur, omnes numeros $k$, $2k$, $3k \ldots . (n-1)k$ per $n$ non divisibiles atque inter se secundum modulum $n$ incongruos esse: hinc potestates ipsius $r$

$$1,\ r,\ rr,\ r^3 \ldots . r^{n-1}$$

omnes erunt inaequales, singulae vero quoque aequationi $x^n - 1 = 0$ satisfacient. Hanc ob caussam hae potestates *omnes* radices aequationis $x^n - 1 = 0$ repraesentabunt.

Hae conclusiones non valerent, si $k$ divisorem communem haberet cum $n$. Si enim $\nu$ esset talis divisor communis, foret $k.\frac{n}{\nu}$ per $n$ divisibilis, adeoque potestas inferior quam $r^n$, puta $r^{\frac{n}{\nu}}$, unitati aequalis. In hoc itaque casu potestates ipsius $r$ ad summum $\frac{n}{\nu}$ radices aequationis $x^n - 1 = 0$ exhibebunt, et quidem revera tot radices diversas sistent, si $\nu$ est divisor communis *maximus* nume-

rorum $k$, $n$. In casu nostro, ubi $k$ et $n$ supponuntur inter se primi, $r$ commode dici potest *radix propria* aequationis $x^n - 1 = 0$: contra in casu altero, ubi $k$ et $n$ haberent divisorem communem (maximum) $\nu$, $r$ vocaretur *radix impropria* illius aequationis, manifesto autem tunc eadem $r$ foret radix propria aequationis $x^{\frac{n}{\nu}} - 1 = 0$. Radix impropria simplicissima est unitas, in eoque casu, ubi $n$ est numerus primus, impropriae aliae omnino non dabuntur.

## 12.

Quodsi iam statuimus

$$W = 1 + r + r^4 + r^9 + \text{etc.} + r^{(n-1)^2}$$

patet fieri $W = T + iU$, adeoque $T$ esse partem realem ipsius $W$, atque $U$ prodire ex parte imaginaria ipsius $W$ factore $i$ suppresso. Totum itaque negotium reducitur ad inventionem summae $W$: ad hunc finem vel series in art. 6 considerata, vel ea quam in art. 9 summare docuimus, adhiberi potest, prior tamen minus idonea est in casu eo, ubi $n$ est numerus par. Nihilominus lectoribus gratum fore speramus, si casum eum, ubi $n$ impar est, secundum methodum duplicem tractemus.

Supponamus itaque primo, $n$ esse numerum imparem, $r$ designare radicem propriam aequationis $x^n - 1 = 0$ quamcunque, et in functione $f(x, m)$ statui $x = r$, atque $m = n - 1$. Hinc patet fieri

$$\frac{1-x^m}{1-x} = \frac{1-r^{-1}}{1-r} = -r^{-1}$$

$$\frac{1-x^{m-1}}{1-xx} = \frac{1-r^{-2}}{1-rr} = -r^{-2}$$

$$\frac{1-x^{m-2}}{1-x^3} = \frac{1-r^{-3}}{1-r^3} = -r^{-3} \text{ etc.}$$

usque ad

$$\frac{1-x}{1-x^m} = \frac{1-r^{-m}}{1-r^m} = -r^{-m}$$

(Haud superfluum erit monere, has aequationes eatenus tantum valere, quatenus $r$ supponitur radix propria: si enim esset $r$ radix impropria, in quibusdam illarum fractionum numerator et denominator simul evanescerent, adeoque fractiones indeterminatae fierent).

Hinc deducimus aequationem sequentem

$$f(r,\, n-1) = 1 + r^{-1} + r^{-3} + r^{-6} + \text{etc.} + r^{-\frac{1}{2}(n-1)n}$$
$$= (1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots.(1-r^{n-2})$$

Eadem aequatio etiamnum valebit, si pro $r$ substituitur $r^\lambda$, designante $\lambda$ integrum quemcunque ad $n$ primum: tunc enim etiam $r^\lambda$ erit radix propria aequationis $x^n - 1 = 0$. Scribamus itaque pro $r$, $r^{n-2}$ sive quod idem est $r^{-2}$, eritque

$$1 + r^2 + r^6 + r^{12} + \text{etc.} + r^{(n-1)n} = (1-r^{-2})(1-r^{-6})(1-r^{-10})\ldots(1-r^{-2(n-2)})$$

Multiplicemus utramque partem huius aequationis per

$$r \,.\, r^3 \,.\, r^5 \ldots : r^{(n-2)} = r^{\frac{1}{4}(n-1)^2}$$

prodibitque, propter

$$r^{2+\frac{1}{4}(n-1)^2} = r^{\frac{1}{4}(n-3)^2}, \qquad r^{(n-1)n+\frac{1}{4}(n-1)^2} = r^{\frac{1}{4}(n+1)^2}$$
$$r^{6+\frac{1}{4}(n-1)^2} = r^{\frac{1}{4}(n-5)^2}, \qquad r^{(n-2)(n-1)+\frac{1}{4}(n-1)^2} = r^{\frac{1}{4}(n+3)^2}$$
$$r^{12+\frac{1}{4}(n-1)^2} = r^{\frac{1}{4}(n-7)^2}, \qquad r^{(n-3)(n-2)+\frac{1}{4}(n-1)^2} = r^{\frac{1}{4}(n+5)^2} \text{ etc.}$$

aequatio sequens

$$r^{\frac{1}{4}(n-1)^2} + r^{\frac{1}{4}(n-3)^2} + r^{\frac{1}{4}(n-5)^2} + \text{etc.} + r + 1$$
$$+ r^{\frac{1}{4}(n+1)^2} + r^{\frac{1}{4}(n+3)^2} + r^{\frac{1}{4}(n+5)^2} + \text{etc.} + r^{\frac{1}{4}(2n-2)^2}$$
$$= (r - r^{-1})(r^3 - r^{-3})(r^5 - r^{-5})\ldots.(r^{n-2} - r^{-n+2})$$

aut, partibus membri primi aliter dispositis,

$$1 + r + r^4 + \text{etc.} + r^{(n-1)^2} = (r - r^{-1})(r^3 - r^{-3})\ldots(r^{n-2} - r^{-n+2}) \quad . \;. \quad [5]$$

## 13.

Factores membri secundi aequationis [5] ita quoque exhiberi possunt

$$r - r^{-1} = -(r^{n-1} - r^{-n+1})$$
$$r^3 - r^{-3} = -(r^{n-3} - r^{-n+3})$$
$$r^5 - r^{-5} = -(r^{n-5} - r^{-n+5}) \text{ etc.}$$

usque ad

$$r^{n-2} - r^{-n+2} = -(r^2 - r^{-2})$$

quo pacto aequatio ista hanc formam assumit:

$$W = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(r^2-r^{-2})(r^4-r^{-4})(r^6-r^{-6})\ldots\ldots(r^{n-1}-r^{-n+1})$$

Multiplicando hanc aequationem per [5] in forma primitiva, prodit

$$W^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(r-r^{-1})(r^2-r^{-2})(r^3-r^{-3})\ldots\ldots(r^{n-1}-r^{-n+1})$$

ubi $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ est vel $=+1$ vel $=-1$, prout $n$ est formae $4\mu+1$, vel formae $4\mu+3$. Hinc

$$W^2 = \pm r^{\frac{1}{2}n(n-1)}(1-r^{-2})(1-r^{-4})(1-r^{-6})\ldots\ldots(1-r^{-2(n-1)})$$

Sed nullo negotio perspicitur, $r^{-2}$, $r^{-4}$, $r^{-6}\ldots\ldots r^{-2n+2}$ exhibere omnes radices aequationis $x^n-1=0$, radice $x=1$ excepta, unde locum habere debebit aequatio identica indefinita

$$(x-r^{-2})(x-r^{-4})(x-r^{-6})\ldots\ldots(x-r^{-2n+2}) = x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\text{etc.}+x+1$$

Quamobrem statuendo $x=1$, fiet

$$(1-r^{-2})(1-r^{-4})(1-r^{-6})\ldots\ldots(1-r^{-2n+2}) = n$$

et quum manifesto sit $r^{\frac{1}{2}n(n-1)}=1$, aequatio nostra transit in hanc

$$W^2 = \pm n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [6]$$

In casu itaque eo, ubi $n$ est formae $4\mu+1$, fiet

$$W = \pm\sqrt{n}, \quad \text{et proin} \quad T = \pm\sqrt{n},\ U = 0$$

Contra in casu altero, ubi $n$ est formae $4\mu+3$, fiet

$$W = \pm i\sqrt{n}, \quad \text{adeoque} \quad T = 0,\ U = \pm\sqrt{n}$$

14.

Methodus art. praec. valorem tantummodo absolutum aggregatorum $T$, $U$ assignat, ambiguumque linquit, utrum statuere oporteat $T$ in casu priori atque $U$ in casu posteriori $=+\sqrt{n}$, an $=-\sqrt{n}$. Hoc autem, saltem pro casu eo ubi $k=1$, ex aequatione [5] sequenti modo decidere licebit. Quum sit, pro $k=1$,

$$r - r^{-1} = 2i \sin\omega$$
$$r^3 - r^{-3} = 2i \sin 3\omega$$
$$r^5 - r^{-5} = 2i \sin 5\omega \quad \text{etc.},$$

aequatio ista transmutatur in

$$W = (2i)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin\omega \sin 3\omega \sin 5\omega \ldots \sin(n-2)\omega$$

Iam in casu eo, ubi $n$ est formae $4\mu + 1$, in serie numerorum imparium

$$1, 3, 5, 7 \ldots \tfrac{1}{2}(n-3), \ \tfrac{1}{2}(n+1) \ldots (n-2)$$

reperiuntur $\frac{1}{4}(n-1)$, qui sunt minores quam $\frac{1}{2}n$, hisque manifesto respondent sinus positivi; contra reliqui $\frac{1}{4}(n-1)$ erunt maiores quam $\frac{1}{2}n$, hisque sinus negativi respondebunt: quapropter productum omnium sinuum statuendum est aequale producto e quantitate positiva in multiplicatorem $(-1)^{\frac{1}{4}(n-1)}$, adeoque $W$ aequalis erit producto e quantitate reali positiva in $i^{n-1}$ sive in $1$, quoniam $i^4 = 1$, atque $n-1$ per 4 divisibilis: i. e. quantitas $W$ erit realis positiva, unde necessario esse debebit

$$W = +\sqrt{n}, \quad T = +\sqrt{n}$$

In casu altero, ubi $n$ est formae $4\mu + 3$ in serie numerorum imparium

$$1, 3, 5, 7 \ldots \tfrac{1}{2}(n-1), \ \tfrac{1}{2}(n+3) \ldots (n-2)$$

priores $\frac{1}{4}(n+1)$ erunt minores quam $\frac{1}{2}n$, reliqui $\frac{1}{4}(n-3)$ autem maiores. Hinc inter sinus arcuum $\omega, 3\omega, 5\omega \ldots (n-2)\omega$ negativi erunt $\frac{1}{4}(n-3)$, adeoque $W$ erit productum ex $i^{\frac{1}{2}(n-1)}$ in quantitatem realem positivam in $(-1)^{\frac{1}{4}(n-3)}$; factor tertius est $= i^{\frac{1}{2}(n-3)}$, qui cum primo iunctus producit $i^{n-2} = i$, quoniam $i^{n-3} = 1$. Quamobrem necessario erit

$$W = +i\sqrt{n}, \ \text{atque} \ U = +\sqrt{n}$$

15.

Iam ostendemus, quo pacto eaedem conclusiones e progressione in art. 9 considerata deduci possint. Scribamus in aequ. [4] pro $x^{\frac{1}{2}}$, $-y^{-\frac{1}{2}}$, eritque

$$1-y^{-1}\frac{1-y^{-2m}}{1-y^{-2}}+y^{-2}\frac{(1-y^{-2m})(1-y^{-2m+2})}{(1-y^{-2})\;(1-y^{-4})}-y^{-3}\frac{(1-y^{-2m})(1-y^{-2m+2})(1-y^{-2m+4})}{(1-y^{-2})\;(1-y^{-4})\;(1-y^{-6})}+\text{etc.}$$

usque ad terminum $m+1^{\text{tum}}$

$$=(1-y^{-1})(1+y^{-2})(1-y^{-3})(1+y^{-4})\ldots(1\pm y^{-m})\quad\ldots\quad[7]$$

Quodsi hic pro $y$ accipitur radix propria aequationis $y^n-1=0$, puta $r$, atque simul statuitur $m=n-1$, erit

$$\frac{1-y^{-2m}}{1-y^{-2}}=\frac{1-r^2}{1-r^{-2}}=-r^2$$

$$\frac{1-y^{-2m+2}}{1-y^{-4}}=\frac{1-r^4}{1-r^{-4}}=-r^4$$

$$\frac{1-y^{-2m+4}}{1-y^{-6}}=\frac{1-r^6}{1-r^{-6}}=-r^6,\ \text{etc.}$$

usque ad

$$\frac{1-y^{-2}}{1-y^{-2m}}=\frac{1-r^{2n-2}}{1-r^{-2n+2}}=-r^{2n-2}$$

ubi notandum, nullum denominatorum $1-r^{-2}$, $1-r^{-4}$ etc. fieri $=0$. Hinc aequatio [7] hancce formam assumit

$$1+r+r^4+r^9+\text{etc.}+r^{(n-1)^2}=(1-r^{-1})(1+r^{-2})(1-r^{-3})\ldots(1+r^{-n+1})$$

Multiplicando in membro secundo huius aequationis terminum primum per ultimum, secundum per penultimum etc., habemus

$$\begin{aligned}(1-r^{-1})(1+r^{-n+1})&=r-r^{-1}\\(1+r^{-2})(1-r^{-n+2})&=r^{n-2}-r^{-n+2}\\(1-r^{-3})(1+r^{-n+3})&=r^3-r^{-3}\\(1+r^{-4})(1-r^{-n+4})&=r^{n-4}-r^{-n+4}\quad\text{etc.}\end{aligned}$$

Ex his productis partialibus facile perspicietur conflari productum

$$(r-r^{-1})(r^3-r^{-3})(r^5-r^{-5})\ldots(r^{n-4}-r^{-n+4})(r^{n-2}-r^{-n+2})$$

quod itaque erit

$$=1+r+r^4+r^9+\text{etc.}+r^{(n-1)^2}=W$$

Haec aequatio identica est cum aequ. [5] in art. 12 e progressione prima derivata, ratiociniaque dein reliqua eodem modo adstruentur, ut in artt. 13 et 14.

16.

Transimus ad casum alterum, ubi $n$ est numerus par. Sit primo $n$ formae $4\mu+2$ sive impariter par, patetque, numeros $\frac{1}{4}nn$, $(\frac{1}{2}n+1)^2-1$, $(\frac{1}{2}n+2)^2-4$ etc. sive generaliter $(\frac{1}{2}n+\lambda)^2-\lambda\lambda$ per $\frac{1}{2}n$ divisos producere quotientes impares, adeoque secundum modulum $n$ congruos fieri ipsi $\frac{1}{2}n$. Hinc colligitur, si $r$ sit radix propria aequationis $x^n-1=0$, adeoque $r^{\frac{1}{2}n}=-1$, fieri

$$r^{(\frac{1}{2}n)^2} = -1$$
$$r^{(\frac{1}{2}n+1)^2} = -r$$
$$r^{(\frac{1}{2}n+2)^2} = -r^4$$
$$r^{(\frac{1}{2}n+3)^2} = -r^9 \quad \text{etc.}$$

Hinc in progressione

$$1+r+r^4+r^9+\text{ etc. }+r^{(n-1)^2}$$

terminus $r^{(\frac{1}{2}n)^2}$ destruet primum, sequens secundum etc., adeoque erit

$$W=0, \quad T=0, \quad U=0$$

17.

Superest casus, ubi $n$ est formae $4\mu$ sive pariter par. Hic generaliter $(\frac{1}{2}n+\lambda)^2-\lambda\lambda$ divisibilis erit per $n$, adeoque

$$r^{(\frac{1}{2}n+\lambda)^2} = r^{\lambda\lambda}$$

Hinc in serie

$$1+r+r^4+r^9+\text{ etc. }+r^{(n-1)^2}$$

terminus $r^{(\frac{1}{2}n)^2}$ aequalis erit primo, sequens secundo etc., ita ut fiat

$$W = 2(1+r+r^4+r^9+\text{ etc. }+r^{(\frac{1}{2}n-1)^2})$$

Iam supponamus, in aequ. [7] art. 15 statui $m=\frac{1}{2}n-1$, et pro $y$ accipi radicem propriam aequationis $y^n-1=0$, puta $r$. Tunc perinde ut in art. 15 aequatio sequentem formam obtinet:

$$1+r+r^4+\text{ etc. }+r^{(\frac{1}{2}n-1)^2} = (1-r^{-1})(1+r^{-2})(1-r^{-3})\ldots(1-r^{-\frac{1}{2}n+1})$$

sive

$$W = 2(1-r^{-1})(1+r^{-2})(1-r^{-3})(1+r^{-4})\ldots(1-r^{-\frac{1}{2}n+1}) \qquad [8]$$

Porro quum sit $r^{\frac{1}{2}n} = -1$, adeoque

$$1+r^{-2} = -r^{\frac{1}{2}n-2}(1-r^{-\frac{1}{2}n+2})$$
$$1+r^{-4} = -r^{\frac{1}{2}n-4}(1-r^{-\frac{1}{2}n+4})$$
$$1+r^{-6} = -r^{\frac{1}{2}n-6}(1-r^{-\frac{1}{2}n+6}) \text{ etc.}$$

productumque e factoribus $-r^{\frac{1}{2}n-2}$, $-r^{\frac{1}{2}n-4}$, $-r^{\frac{1}{2}n-6}$ etc. usque ad $-r^2$ fiat $= (-1)^{\frac{1}{4}n-1}\, r^{\frac{1}{16}nn-\frac{1}{4}n}$, aequatio praecedens ita quoque exhiberi potest

$$W = 2(-1)^{\frac{1}{4}n-1}\, r^{\frac{1}{16}nn-\frac{1}{4}n}(1-r^{-1})(1-r^{-2})(1-r^{-3})(1-r^{-4})\ldots(1-r^{-\frac{1}{2}n+1})$$

Quum habeatur

$$1-r^{-1} = -r^{-1}(1-r^{-n+1})$$
$$1-r^{-2} = -r^{-2}(1-r^{-n+2})$$
$$1-r^{-3} = -r^{-3}(1-r^{-n+3}) \text{ etc.}$$

erit

$$(1-r^{-1})(1-r^{-2})(1-r^{-3})\ldots(1-r^{-\frac{1}{2}n+1})$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}n-1}\, r^{-\frac{1}{8}nn+\frac{1}{4}n}(1-r^{-\frac{1}{2}n-1})(1-r^{-\frac{1}{2}n-2})(1-r^{-\frac{1}{2}n-3})\ldots(1-r^{-n+1})$$

adeoque

$$W = 2(-1)^{\frac{3}{4}n-2}\, r^{-\frac{1}{16}nn}(1-r^{-\frac{1}{2}n-1})(1-r^{-\frac{1}{2}n-2})(1-r^{-\frac{1}{2}n-3})\ldots(1-r^{-n+1})$$

Multiplicando hunc valorem ipsius $W$ per prius inventum, adiungendoque utrimque factorem $1-r^{-\frac{1}{2}n}$, prodit

$$(1-r^{-\frac{1}{2}n})\,W^2 = 4(-1)^{n-3}\, r^{-\frac{1}{4}n}(1-r^{-1})(1-r^{-2})(1-r^{-3})\ldots(1-r^{-n+1})$$

Sed fit

$$1-r^{-\frac{1}{2}n} = 2$$
$$(-1)^{n-3} = -1$$
$$r^{-\frac{1}{4}n} = -r^{\frac{1}{4}n}$$
$$(1-r^{-1})(1-r^{-2})(1-r^{-3})\ldots(1-r^{-n+1}) = n$$

Unde tandem concluditur

$$W^2 = 2r^{\frac{1}{2}n}n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [9]$$

Iam facile perspicietur, $r^{\frac{1}{2}n}$ esse vel $= +i$ vel $= -i$, prout scilicet $k$ vel formae $4\mu+1$ sit, vel formae $4\mu+3$. Et quum sit

$$2i = (1+i)^2, \quad -2i = (1-i)^2$$

erit in casu eo, ubi $k$ est formae $4\mu+1$,

$$W = \pm(1+i)\sqrt{n}, \quad \text{adeoque} \quad T = U = \pm\sqrt{n}$$

in casu altero autem, ubi $k$ est formae $4\mu+3$,

$$W = \pm(1-i)\sqrt{n}, \quad \text{adeoque} \quad T = -U = \pm\sqrt{n}$$

18.

Methodus art. praec. valores absolutos functionum $T$, $U$ suppeditavit, conditionesque assignavit, sub quibus signa aequalia vel opposita illis tribuenda sint: sed signa ipsa hinc nondum determinantur. Hoc pro eo casu, ubi statuitur $k=1$, sequenti modo supplebimus.

Statuamus $\rho = \cos\frac{1}{n}\omega + i\sin\frac{1}{n}\omega$, ita ut fiat $r = \rho\rho$, patetque, propter $\rho^n = -1$ aequationem [8] ita exhiberi posse

$$W = 2(1+\rho^{n-2})(1+\rho^{-4})(1+\rho^{n-6})(1+\rho^{-8})\ldots(1+\rho^{-n+4})(1+\rho^2)$$

sive factoribus alio ordine dispositis

$$W = 2(1+\rho^2)(1+\rho^{-4})(1+\rho^6)(1+\rho^{-8})\ldots(1+\rho^{-n+4})(1+\rho^{n-2})$$

Iam fit

$$\begin{aligned} 1+\rho^2 &= 2\rho\cos\tfrac{1}{n}\omega \\ 1+\rho^{-4} &= 2\rho^{-2}\cos\tfrac{2}{n}\omega \\ 1+\rho^{-6} &= 2\rho^3\cos\tfrac{3}{n}\omega \\ 1+\rho^{-8} &= 2\rho^{-4}\cos\tfrac{4}{n}\omega \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

usque ad

$$\begin{aligned} 1+\rho^{-n+4} &= 2\rho^{-\frac{1}{2}n+2}\cos(\tfrac{1}{2}n-1)\tfrac{2}{n}\omega \\ 1+\rho^{n-2} &= 2\rho^{\frac{1}{2}n-1}\cos(\tfrac{1}{2}n-\tfrac{1}{2})\tfrac{2}{n}\omega \end{aligned}$$

Quamobrem habetur

$$W = 2^{\frac{1}{2}n} \rho^{\frac{1}{2}n} \cos\tfrac{1}{2}\omega \cos\omega \cos\tfrac{3}{2}\omega \ldots \cos(\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2})\omega$$

Cosinus in hoc productum ingredientes manifesto omnes positivi sunt, factor $\rho^{\frac{1}{2}n}$ autem fit $= \cos 45^0 + i \sin 45^0 = (1+i)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Hinc colligimus, $W$ esse productum ex $1+i$ in quantitatem realem positivam, unde necessario esse debebit

$$W = (1+i)\sqrt{n}, \quad T = +\sqrt{n}, \quad U = +\sqrt{n}$$

19.

Operae pretium erit, omnes summationes hactenus evolutas, hic in unum conspectum colligere. Generaliter scilicet est

| $T =$ | $U =$ | prout $n$ est formae |
|---|---|---|
| $\pm\sqrt{n}$ | $\pm\sqrt{n}$ | $4\mu$ |
| $\pm\sqrt{n}$ | 0 | $4\mu+1$ |
| 0 | 0 | $4\mu+2$ |
| 0 | $\pm\sqrt{n}$ | $4\mu+3$ |

et in casu eo, ubi $k$ supponitur $= 1$, quantitati radicali signum positivum tribui debet. Omni itaque iam rigore ea, quae pro valoribus primis ipsius $n$ in art. 3 per inductionem animadverteramus, demonstrata sunt, nihilque superest, nisi ut signa pro valoribus quibuscunque ipsius $k$ in omnibus casibus determinare doceamus. Sed antequam hoc negotium in omni generalitate aggredi liceat, primo casus eos, ubi $n$ est numerus primus vel numeri primi potestas, propius considerare oportebit.

20.

Sit primo $n$ numerus primus impar, patetque per ea, quae in art. 10 exposuimus, esse $W = 1 + 2\Sigma r^a = 1 + 2\Sigma R^{ak}$, si statuatur $R = \cos\omega + i\sin\omega$, denotante $a$ ut illic indefinite omnia residua quadratica ipsius $n$ inter 1 et $n-1$ contenta. Quodsi quoque per $b$ indefinite omnia non-residua quadratica inter eosdem limites exprimimus, nullo negotio perspicitur, omnes numeros $ak$ congruos fieri secundum modulum $n$ vel omnibus $a$ vel omnibus $b$ (nullo ordinis respectu habito), prout $k$ vel residuum sit vel non-residuum. Quamobrem in casu priori erit

$$W = 1+2\Sigma R^a = 1+R+R^4+R^9+\text{etc.}+R^{(n-1)^2}$$

adeoque $W=+\sqrt{n}$, si $n$ est formae $4\mu+1$, atque $W=+i\sqrt{n}$, si $n$ est formae $4\mu+3$.

Contra in casu altero, ubi $k$ est non-residuum ipsius $n$, erit

$$W = 1+2\Sigma R^b$$

Hinc quum manifesto omnes $a$, $b$ complexum integrum numerorum $1, 2, 3\ldots$ expleant, adeoque sit

$$\Sigma R^a + \Sigma R^b = R+R^2+R^3+\text{etc.}+R^{n-1} = -1$$

fiet

$$W = -1-2\Sigma R^a = -(1+R+R^4+R^9+\text{etc.}+R^{(n-1)^2})$$

adeoque $W=-\sqrt{n}$, si $n$ est formae $4\mu+1$, atque $W=-i\sqrt{n}$, si $n$ est formae $4\mu+3$.

Hinc itaque colligitur

*primo*, si $n$ est formae $4\mu+1$, atque $k$ residuum quadraticum ipsius $n$,

$$T=+\sqrt{n}, \quad U=0$$

*secundo*, si $n$ est formae $4\mu+1$, atque $k$ non-residuum ipsius $n$,

$$T=-\sqrt{n}, \quad U=0$$

*tertio*, si $n$ est formae $4\mu+3$, atque $k$ residuum ipsius $n$,

$$T=0, \quad U=+\sqrt{n}$$

*quarto*, si $n$ est formae $4\mu+3$, atque $k$ non-residuum ipsius $n$,

$$T=0, \quad U=-\sqrt{n}$$

21.

Sit secundo $n$ quadratum altiorve potestas numeri primi imparis $p$, statuaturque $n=p^{2\chi}q$, ita ut sit $q$ vel $=1$ vel $=p$. Hic ante omnia observare convenit, si $\lambda$ sit integer quicunque per $p^\chi$ non divisibilis, fieri

$$r^{\lambda\lambda} + r^{(\lambda+p^\chi q)^2} + r^{(\lambda+2p^\chi q)^2} + r^{(\lambda+3p^\chi q)^2} + \text{etc.} + r^{(\lambda+n-p^\chi q)^2}$$
$$= r^{\lambda\lambda}\{1 + r^{2\lambda p^\chi q} + r^{4\lambda p^\chi q} + r^{6\lambda p^\chi q} + \text{etc.} + r^{2\lambda(n-p^\chi q)}\} = \frac{r^{\lambda\lambda}(1-r^{2\lambda n})}{1-r^{2\lambda p^\chi q}} = 0$$

Hinc facile perspicietur, fieri

$$W' = 1 + r^{p^{2\chi}} + r^{4p^{2\chi}} + r^{9p^{2\chi}} + \text{etc.} + r^{(n-p^\chi)^2}$$

Termini enim reliqui progressionis

$$1 + r + r^4 + r^9 + \text{etc.} + r^{(n-1)^2}$$

distribui poterunt in $(p^\chi - 1)q$ progressiones partiales, quae singulae sint $p^\chi$ terminorum, et per transformationem modo traditam summas evanescentes conficiant.

Hinc colligitur, in casu eo, ubi fit $q = 1$, sive ubi $n$ est potestas numeri primi cum exponente pari, fieri

$$W' = p^\chi = +\sqrt{n}, \text{ adeoque } T = +\sqrt{n}, \ U = 0$$

Contra in casu eo, ubi $q = p$, sive ubi $n$ est potestas numeri primi cum exponente impari, statuemus $r^{p^{2\chi}} = \rho$, unde $\rho$ erit radix propria aequationis $x^p - 1 = 0$, et quidem $\rho = \cos\frac{k}{p}360^0 + i\sin\frac{k}{p}360^0$, ac dein

$$W' = 1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \text{etc.} + \rho^{(p^{\chi+1}-1)^2} = p^\chi(1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \text{etc.} + \rho^{(p-1)^2})$$

Sed summa seriei $1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \text{etc.} + \rho^{(p-1)^2}$ per art. praec. determinatur, unde sponte concluditur, fieri

$$W' = \pm\sqrt{n} = T, \text{ si fuerit } p \text{ formae } 4\mu+1,$$
$$W' = \pm i\sqrt{n} = iU, \text{ si fuerit } p \text{ formae } 4\mu+3$$

signo positivo vel negativo valente, prout $k$ fuerit residuum vel non-residuum ipsius $p$.

22.

Facile quoque ex iis, quae in artt. 20. et 21 exposita sunt, derivatur propositio sequens, quae infra usum notabilem nobis praestabit. Statuatur

$$W'' = 1 + r^h + r^{4h} + r^{9h} + \text{etc.} + r^{h(n-1)^2}$$

denotante $h$ integrum quemcunque per $p$ non divisibilem, eritque in casu eo, ubi $n = p$, vel ubi $n$ est potestas ipsius $p$ cum exponente impari,

$W'' = W'$, si fuerit $h$ residuum quadraticum ipsius $p$.
$W'' = -W'$, si fuerit $h$ non-residuum quadraticum ipsius $p$

Patet enim, $W''$ oriri ex $W'$, si pro $k$ substituatur $kh$; in casu priori autem $k$ et $kh$ similes erunt, in posteriori dissimiles, quatenus sunt residua vel non-residua ipsius $p$.

In casu eo autem, ubi $n$ est potestas ipsius $p$ cum exponente pari, manifesto fit $W' = +\sqrt{n}$, adeoque semper $W'' = W'$.

## 23.

In artt. 20. 21. 22 consideravimus numeros primos impares, taliumque potestates: superest itaque casus, ubi $n$ est potestas binarii.

Pro $n = 2$ manifesto fit $W = 1 + r = 0$.

Pro $n = 4$ prodit $W = 1 + r + r^4 + r^9 = 2 + 2r$: hinc $W = 2 + 2i$, quoties $k$ est formae $4\mu + 1$, atque $W = 2 - 2i$, quoties $k$ est formae $4\mu + 3$.

Pro $n = 8$ habemus $W = 1 + r + r^4 + r^9 + r^{16} + r^{25} + r^{36} + r^{49} = 2 + 4r + 2r^4 = 4r$. Hinc erit

$W = (1 + i)\sqrt{8}$, quoties $k$ est formae $8\mu + 1$
$W = (-1 + i)\sqrt{8}$, quoties $k$ est formae $8\mu + 3$
$W = (-1 - i)\sqrt{8}$, quoties $k$ est formae $8\mu + 5$
$W = (1 - i)\sqrt{8}$, quoties $k$ est formae $8\mu + 7$

Si $n$ est altior potestas binarii, statuamus $n = 2^{2\varkappa} q$, ita ut $q$ sit vel $= 1$ vel $= 2$, atque $\varkappa$ maior quam 1. Hic ante omnia observari debet, si $\lambda$ sit integer quicunque per $2^{\varkappa-1}$ non divisibilis, fieri

$$r^{\lambda\lambda} + r^{(\lambda + 2^{\varkappa} q)^2} + r^{(\lambda + 2.2^{\varkappa} q)^2} + r^{(\lambda + 3.2^{\varkappa} q)^2} + \text{etc.} + r^{(\lambda + n - 2^{\varkappa} q)^2}$$
$$= r^{\lambda\lambda} \{ 1 + r^{2^{\varkappa+1}\lambda q} + r^{2.2^{\varkappa+1}\lambda q} + r^{3.2^{\varkappa+1}\lambda q} + \text{etc.} + r^{(2n - 2^{\varkappa+1} q)\lambda} \} = \frac{r^{\lambda\lambda}(1 - r^{2\lambda n})}{1 - r^{2^{\varkappa+1}\lambda q}} = 0$$

Hinc facile perspicietur, fieri

$$W = 1 + r^{2^{2\varkappa-2}} + r^{4.2^{2\varkappa-2}} + r^{9.2^{2\varkappa-2}} + \text{etc.} + r^{(n - 2^{\varkappa-1})^2}.$$

Statuamus $r^{2^{2\varkappa-2}} = \rho$, eritque $\rho$ radix aequationis $x^{4q}-1=0$, et quidem $\rho = \cos\frac{k}{4q}360^0 + i\sin\frac{k}{4q}360^0$; dein fiet

$$W = 1+\rho+\rho^4+\rho^9+\text{etc.}+\rho^{(2^{\varkappa+1}q-1)^2}$$
$$= 2^{\varkappa-1}(1+\rho+\rho^4+\rho^9+\text{etc.}+\rho^{(4q-1)^2})$$

Sed summa seriei $1+\rho+\rho^4+\rho^9+\text{etc.}+\rho^{(4q-1)^2}$ per ea, quae de casibus $n=4$, $n=8$ explicavimus, determinatur, unde colligimus

in casu eo, ubi $q=1$, sive ubi $n$ est potestas numeri 4, fieri

$$W = (1+i)2^\varkappa = (1+i)\sqrt{n}, \text{ si fuerit } k \text{ formae } 4\mu+1$$
$$W = (1-i)2^\varkappa = (1-i)\sqrt{n}, \text{ si fuerit } k \text{ formae } 4\mu+3$$

quae sunt ipsissimae formulae pro $n=4$ traditae;

in casu eo autem, ubi $q=2$, sive ubi $n$ est potestas binarii cum exponente impari maiori quam 3, fieri

$$W = (1+i)2^\varkappa\sqrt{2} = (1+i)\sqrt{n}, \text{ si fuerit } k \text{ formae } 8\mu+1$$
$$W = (-1+i)2^\varkappa\sqrt{2} = (-1+i)\sqrt{n}, \text{ si fuerit } k \text{ formae } 8\mu+3$$
$$W = (-1-i)2^\varkappa\sqrt{2} = (-1-i)\sqrt{n}, \text{ si fuerit } k \text{ formae } 8\mu+5$$
$$W = (1-i)2^\varkappa\sqrt{2} = (1-i)\sqrt{n}, \text{ si fuerit } k \text{ formae } 8\mu+7$$

quae quoque prorsus conveniunt cum iis, quae pro $n=8$ tradidimus.

24.

Etiam hic operae pretium erit, rationem summae progressionis

$$W' = 1+r^h+r^{4h}+r^{9h}+\text{etc.}+r^{h(n-1)^2}$$

ad $W$ determinare, ubi $h$ integrum quemcunque imparem denotat. Quum $W'$ oriatur ex $W$, mutando $k$ in $kh$, valor ipsius $W'$ perinde a forma numeri $kh$ pendebit, ut $W$ a forma ipsius $k$. Statuamus $\frac{W'}{W} = l$, patetque

I. in casu eo, ubi $n=4$, vel altior potestas binarii cum exponente pari, fieri

$l = 1$, si fuerit $h$ formae $4\mu+1$
$l = -i$, si fuerit $h$ formae $4\mu+3$, atque $k$ formae $4\mu+1$
$l = +i$, si fuerit $h$ formae $4\mu+3$, atque $k$ eiusdem formae

II. in casu eo, ubi $n = 8$, vel altior potestas binarii cum exponente impari, fieri

$l = 1$, si fuerit $h$ formae $8\mu + 1$,
$l = -1$, si fuerit $h$ formae $8\mu + 5$,
$l = +i$, si fuerit vel $h$ formae $8\mu + 3$, atque $k$ formae $4\mu + 1$,
vel $h$ formae $8\mu + 7$, atque $k$ formae $4\mu + 3$,
$l = -i$, si fuerit vel $h$ formae $8\mu + 3$, atque $k$ formae $4\mu + 3$,
vel $h$ formae $8\mu + 7$, atque $k$ formae $4\mu + 1$.

Per praecc. determinatio summae $W$ pro iis casibus, ubi $n$ est numerus primus vel numeri primi potestas, complete perfecta est: superest itaque, ut eos quoque casus absolvamus, ubi $n$ e pluribus numeris primis compositus est, huc viam nobis sternet theorema sequens.

25.

Theorema. *Sit $n$ productum e duobus integris positivis inter se primis $a$, $b$, statuaturque*

$$P = 1 + r^{aa} + r^{4aa} + r^{9aa} + \text{etc.} + r^{(b-1)^2 aa}$$
$$Q = 1 + r^{bb} + r^{4bb} + r^{9bb} + \text{etc.} + r^{(a-1)^2 bb}$$

*Tum dico fore $W = PQ$.*

*Demonstr.* Designet $\alpha$ indefinite numeros $0, 1, 2, 3 \ldots, a-1$, $\beta$ indefinite numeros $0, 1, 2, 3 \ldots b-1$, $\nu$ indefinite numeros $0, 1, 2, 3 \ldots n-1$. Tunc patet esse

$$P = \Sigma r^{aa\beta\beta}, \quad Q = \Sigma r^{bb\alpha\alpha}, \quad W = \Sigma r^{\nu\nu}.$$

Hinc erit $PQ = \Sigma r^{aa\beta\beta + bb\alpha\alpha}$, substituendo pro $\alpha$ et $\beta$ omnes valores, omnibus modis inter se combinatos; hinc porro propter $2ab\alpha\beta = 2\alpha\beta n$, erit $PQ = \Sigma r^{(a\beta + b\alpha)^2}$. Sed nullo negotio perspicitur, singulos valores ipsius $a\beta + b\alpha$ inter se diversos esse, atque alicui valori ipsius $\nu$ aequales. Hinc erit $PQ = \Sigma r^{\nu\nu} = W$.

Ceterum notandum est, $r^{aa}$ esse radicem propriam aequationis $x^b - 1 = 0$, atque $r^{bb}$ radicem propriam aequationis $x^a - 1 = 0$.

26.

Sit porro $n$ productum e tribus numeris inter se primis $a$, $b$, $c$, patetque, si statuatur $bc = b'$, etiam $a$ et $b'$ inter se primos fore; adeoque $W$ productum e duobus factoribus

$$1 + r^{aa} + r^{4aa} + r^{9aa} + \text{etc.} + r^{(b'-1)^2 aa}$$
$$1 + r^{b'b'} + r^{4b'b'} + r^{9b'b'} + \text{etc.} + r^{(a-1)^2 b'b'}$$

Sed quum $r^{aa}$ sit radix propria aequationis $x^{bc} - 1 = 0$, erit ipse factor prior productum ex

$$1 + \rho^{bb} + \rho^{4bb} + \rho^{9bb} + \text{etc.} + \rho^{(c-1)^2 bb}$$
$$1 + \rho^{cc} + \rho^{4cc} + \rho^{9cc} + \text{etc.} + \rho^{(b-1)^2 cc}$$

si statuitur $r^{aa} = \rho$. Hinc patet, $W$ esse productum e factoribus tribus

$$1 + r^{bbcc} + r^{4bbcc} + r^{9bbcc} + \text{etc.} + r^{(a-1)^2 bbcc}$$
$$1 + r^{aacc} + r^{4aacc} + r^{9aacc} + \text{etc.} + r^{(b-1)^2 aacc}$$
$$1 + r^{aabb} + r^{4aabb} + r^{9aabb} + \text{etc.} + r^{(c-1)^2 aabb}$$

ubi $r^{bbcc}$, $r^{aacc}$, $r^{aabb}$ erunt resp. radices propriae aequationum $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$, $x^c - 1 = 0$.

27.

Hinc facile concluditur generaliter, si $n$ sit productum e factoribus quotcunque inter se primis $a$, $b$, $c$ etc., $W$ fieri productum e totidem factoribus, qui sint

$$1 + r^{\frac{nn}{aa}} + r^{\frac{4nn}{aa}} + r^{\frac{9nn}{aa}} + \text{etc.} + r^{\frac{(a-1)^2 nn}{aa}}$$
$$1 + r^{\frac{nn}{bb}} + r^{\frac{4nn}{bb}} + r^{\frac{9nn}{bb}} + \text{etc.} + r^{\frac{(b-1)^2 nn}{bb}}$$
$$1 + r^{\frac{nn}{cc}} + r^{\frac{4nn}{cc}} + r^{\frac{9nn}{cc}} + \text{etc.} + r^{\frac{(c-1)^2 nn}{cc}} \quad \text{etc.}$$

ubi $r^{\frac{nn}{aa}}$, $r^{\frac{nn}{bb}}$, $r^{\frac{nn}{cc}}$ etc. erunt radices propriae aequationum $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$, $x^c - 1 = 0$ etc.

28.

Ex his principiis transitus ad determinationem completam ipsius $W$ pro valore quocunque ipsius $n$ sponte iam obvius est. Decomponatur scilicet $n$ in facto-

res $a$, $b$, $c$ etc. tales, qui sint vel numeri primi inaequales, vel potestates numerorum primorum inaequalium, statuatur $r^{\frac{nn}{aa}} = A$, $r^{\frac{nn}{bb}} = B$, $r^{\frac{nn}{cc}} = C$ etc., eruntque $A$, $B$, $C$ etc. radices propriae aequationum $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$, $x^c - 1 = 0$ etc., atque $W$ productum e factoribus

$$1 + A + A^4 + A^9 + \text{etc.} + A^{(a-1)^2}$$
$$1 + B + B^4 + B^9 + \text{etc.} + B^{(b-1)^2}$$
$$1 + C + C^4 + C^9 + \text{etc.} + C^{(c-1)^2} \text{ etc.}$$

Sed hi singuli factores per ea, quae in artt 20 21. 23 docuimus, determinari poterunt, unde etiam valor producti innotescet. Regulas pro determinandis illis factoribus hic in unum obtutum collegisse haud inutile erit. Quum radix $A$ fiat $= \frac{kn}{a} \cdot \frac{360^\circ}{a}$, aggregatum $1 + A + A^4 + A^9 + \text{etc.} + A^{(a-1)^2}$, quod per $L$ denotabimus, perinde per numerum $\frac{kn}{a}$ determinabitur, ut in disquisitione nostra generali $W$ per $k$. Duodecim iam casus sunt distinguendi.

I. Si $a$ est numerus primus formae $4\mu + 1$, puta $= p$, vel potestas talis numeri primi cum exponente impari, simulque $\frac{kn}{a}$ residuum quadraticum ipsius $p$, erit $L = +\sqrt{a}$.

II. Si manentibus reliquis $\frac{kn}{a}$ est non-residuum quadraticum ipsius $p$, erit $L = -\sqrt{a}$.

III. Si $a$ est numerus primus formae $4\mu + 3$, puta $= p$, vel potestas talis numeri primi cum exponente impari, simulque $\frac{kn}{a}$ residuum quadraticum ipsius $p$, erit $L = +i\sqrt{a}$.

IV. Si, manentibus reliquis ut in III, $\frac{kn}{a}$ est non-residuum quadraticum ipsius $p$, erit $L = -i\sqrt{a}$.

V. Si $a$ est quadratum, altiorve potestas numeri primi (imparis) cum exponente pari, erit $L = +\sqrt{a}$.

VI. Si $a = 2$, erit $L = 0$.

VII. Si $a = 4$, altiorve potestas binarii cum exponente pari, simulque $\frac{kn}{a}$ formae $4\mu + 1$, erit $L = (1 + i)\sqrt{a}$.

VIII. Si, manentibus reliquis ut in VII, $\frac{kn}{a}$ est formae $4\mu + 3$, erit $L = (1 - i)\sqrt{a}$.

IX. Si $a = 8$, altiorve potestas binarii cum exponente impari, simulque $\frac{kn}{a}$ formae $8\mu + 1$, erit $L = (1 + i)\sqrt{a}$.

X. Si, manentibus reliquis ut in IX, $\frac{kn}{a}$ est formae $8\mu+3$, erit $L=(-1+i)\sqrt{a}$.

XI. Si manentibus reliquis $\frac{kn}{a}$ est formae $8\mu+5$, erit $L=(-1-i)\sqrt{a}$.

XII. Si manentibus reliquis $\frac{kn}{a}$ est formae $8\mu+7$, erit $L=(1-i)\sqrt{a}$.

29.

Sit exempli caussa $n=2520=8.9.5.7$, atque $k=13$. Hic erit

pro $a=8$, per casum XII, $L=(1-i)\sqrt{8}$
pro factore 9, per casum V, summa respondens erit $=\sqrt{9}$
pro factore 5, per casum II, summa respondens erit $=-\sqrt{5}$
pro factore 7, per casum III, summa respondens erit $=+i\sqrt{7}$

Hinc fit $W=(1-i).(-i).\sqrt{2520}=(-1-i)\sqrt{2520}$.

Sit pro eodem valore ipsius $n$, $k=1$: tunc respondebit

factori 8 summa $(-1+i)\sqrt{8}$
factori 9 summa $\sqrt{9}$
factori 5 summa $\sqrt{5}$
factori 7 summa $-i\sqrt{7}$

Hinc conflatur productum $W=(1+i)\sqrt{2520}$.

30.

Methodus alia, summam $W$ generaliter determinandi, petitur ex iis, quae in artt. 22. 24 exposita sunt. Statuamus $\cos\omega+i\sin\omega=\rho$, atque

$$\rho^{\frac{nn}{aa}}=\alpha,\quad \rho^{\frac{nn}{bb}}=\mathfrak{b},\quad \rho^{\frac{nn}{cc}}=\gamma \quad \text{etc.}$$

ita ut habeatur $r=\rho^k$, $A=\alpha^k$, $B=\mathfrak{b}^k$, $C=\gamma^k$ etc. Tunc erit

$$1+\rho+\rho^4+\rho^9+\text{etc.}+\rho^{(n-1)^2}$$

productum e factoribus

$$1+\alpha+\alpha^4+\alpha^9+\text{etc.}+\alpha^{(a-1)^2}$$
$$1+\mathfrak{b}+\mathfrak{b}^4+\mathfrak{b}^9+\text{etc.}+\mathfrak{b}^{(b-1)^2}$$
$$1+\gamma+\gamma^4+\gamma^9+\text{etc.}+\gamma^{(c-1)^2}\quad\text{etc.}$$

adeoque $W$ productum è factoribus

$$w = 1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \text{etc.} + \rho^{(n-1)^2}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1 + A + A^4 + A^9 + \text{etc.} + A^{(a-1)^2}}{1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^9 + \text{etc.} + \alpha^{(a-1)^2}}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1 + B + B^4 + B^9 + \text{etc.} + B^{(b-1)^2}}{1 + \beta + \beta^4 + \beta^9 + \text{etc.} + \beta^{(b-1)^2}}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1 + C + C^4 + C^9 + \text{etc.} + C^{(c-1)^2}}{1 + \gamma + \gamma^4 + \gamma^9 + \text{etc.} + \gamma^{(c-1)^2}} \quad \text{etc.}$$

Iam factor primus $w$ determinatus est per disquisitiones supra traditas (art. 19); factores reliqui vero $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. prodeunt per formulas artt. 22. 24, quas ut omnia iuncta habeantur, hic denuo colligimus*). Duodecim casus hic sunt distinguendi, scilicet

I. Si $a$ est numerus primus (impar) $= p$, vel talis numeri potestas cum exponente impari, atque $k$ residuum quadraticum ipsius $p$, erit factor respondens $\mathfrak{A} = +1$.

II. Si manentibus reliquis $k$ est non-residuum quadraticum ipsius $p$, erit $\mathfrak{A} = -1$.

III. Si $a$ est quadratum numeri primi imparis, altiorve eius potestas cum exponente pari, erit $\mathfrak{A} = +1$.

IV. Si $a$ est $= 4$, aut altior binarii potestas cum exponente pari, simulque $k$ formae $4\mu + 1$, erit $\mathfrak{A} = +1$.

V. Si, manentibus reliquis ut in IV, $k$ est formae $4\mu + 3$, atque $\frac{n}{a}$ formae $4\mu + 1$, erit $\mathfrak{A} = -i$.

VI. Si, manentibus reliquis ut in IV, $k$ est formae $4\mu + 3$, atque $\frac{n}{a}$ formae $4\mu + 3$, erit $\mathfrak{A} = +i$.

VII. Si $a$ est $= 8$, aut altior binarii potestas cum exponente impari, atque $k$ formae $8\mu + 1$, erit $\mathfrak{A} = +1$.

VIII. Si, manentibus reliquis ut in VII, $k$ est formae $8\mu + 5$, erit $\mathfrak{A} = -1$.

IX. Si, manentibus reliquis ut in VII, $k$ est formae $8\mu + 3$, atque $\frac{n}{a}$ formae $4\mu + 1$, erit $\mathfrak{A} = +i$.

*) Manifesto, quae illic erant $k$ et $h$, hic erunt $\frac{n}{a}$ et $k$ respectu factoris secundi, $\frac{n}{b}$ et $k$ respectu factoris tertii etc.

X. Si, manentibus reliquis ut in VII, $k$ est formae $8\mu+3$, atque $\frac{n}{a}$ formae $4\mu+3$, erit $\mathfrak{A}=-i$.

XI. Si, manentibus reliquis ut in VII, $k$ est formae $8\mu+7$, atque $\frac{n}{a}$ formae $4\mu+1$ erit $\mathfrak{A}=-i$.

XII. Si, manentibus reliquis ut in VII, $k$ est formae $8\mu+7$, atque $\frac{n}{a}$ formae $4\mu+3$, erit $\mathfrak{A}=+i$.

Casum eum, ubi $a=2$, praeterimus; hic quidem $\mathfrak{A}$ foret $=\frac{0}{0}$ sive indeterminatus, sed tunc semper $W=0$.

Factores reliqui $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. perinde pendent a $b$, $c$ etc., ut $\mathfrak{A}$ ab $a$, quatenus in illorum determinationem ingrediuntur.

31.

Secundum hanc methodum alteram exemplum primum art. 29 ita se habet:

Factor $w$ fit $=(1+i)\sqrt{2520}$
Pro $a=8$ factor respondens $\mathfrak{A}$ fit, per casum VIII, $=-1$
Factori ipsius $n$ secundo 9 respondet factor $+1$ (per casum III.)
Factori 5 respondet factor $-1$ (per casum II.)
Factori 7 respondet factor $-1$ (per casum II.)

Hinc conflatur productum $W=(-1-i)\sqrt{2520}$, ut in art. 29.

32.

Quum valor ipsius $W$ per methodos *duas* determinari possit, quarum altera relationibus numerorum $\frac{nk}{a}$, $\frac{nk}{b}$, $\frac{nk}{c}$ etc. ad numeros $a$, $b$, $c$ etc. innititur, altera vero a relationibus ipsius $k$ ad numeros $a$, $b$, $c$ etc. pendet, inter omnes has relationes nexus quidam conditionalis intercedere debet, ita ut quaevis e reliquis determinabilis esse debeat. Supponamus, omnes numeros $a$, $b$, $c$ etc. esse numeros primos impares, atque $k$ accipi $=1$; distribuanturque factores $a$, $b$, $c$ etc. in duas classes, quarum altera contineat eos, qui sunt formae $4\mu+1$, et qui denotentur per $p$, $p'$, $p''$ etc., altera vero constet ex iis, qui sunt formae $4\mu+3$, et qui exprimantur per $q$, $q'$, $q''$ etc.: multitudinem posteriorum designabimus per $m$. His ita factis, observamus primo, $n$ fieri formae $4\mu+1$, si $m$ fuerit par (quorsum etiam referri debet casus is, ubi factores classis alterius omnino desunt, sive ubi $m=0$), contra $n$ fieri formae $4\mu+3$, si $m$ fuerit impar. Iam determinatio

ipsius $W$ per methodum primam ita perficitur. Pendeant numeri $P, P', P''$ etc., $Q, Q', Q''$ etc. ita a relationibus numerorum $\frac{n}{p}, \frac{n}{p'}, \frac{n}{p''}$ etc., $\frac{n}{q}, \frac{n}{q'}, \frac{n}{q''}$ etc. ad numeros $p, p', p''$ etc., $q, q', q''$ etc. resp., ut statuatur

$$P = +1, \text{ si } \tfrac{n}{p} \text{ est residuum quadraticum ipsius } p$$
$$P = -1, \text{ si } \tfrac{n}{p} \text{ est non-residuum quadraticum ipsius } p$$

et perinde de reliquis. Tunc erit $W$ productum e factoribus $P\sqrt{p}, P'\sqrt{p'}, P''\sqrt{p''}$ etc., $iQ\sqrt{q}, iQ'\sqrt{q'}, iQ''\sqrt{q''}$ etc., adeoque

$$W = PP'P'' \ldots QQ'Q'' \ldots i^m\sqrt{n}$$

Per methodum secundam, aut potius statim per praecepta art. 19, erit

$$W = +\sqrt{n}, \text{ si } n \text{ est formae } 4\mu+1, \text{ vel quod eodem redit, si } m \text{ est par}$$
$$W = +i\sqrt{n}, \text{ si } n \text{ est formae } 4\mu+3, \text{ vel si } m \text{ est impar}$$

Utrumque casum simul complecti licet per formulam sequentem:

$$W = i^{mm}\sqrt{n}$$

Hinc itaque colligitur

$$PP'P'' \ldots QQ'Q'' \ldots = i^{mm-m}$$

Sed $i^{mm-m}$ fit $= 1$, quoties $m$ est formae $4\mu$ vel $4\mu+1$, atque $= -1$, quoties $m$ est formae $4\mu+2$ vel $4\mu+3$, unde deducimus sequens elegantissimum

Theorema. *Denotantibus $a, b, c$ etc. numeros primos impares positivos inaequales, quorum productum statuitur $= n$, et inter quos $m$ sint formae $4\mu+3$, reliqui formae $4\mu+1$: multitudo eorum ex his numeris $a, b, c$ etc., quorum non-residua resp. sunt $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}$ etc., par erit, quoties $m$ est formae $4\mu$ vel $4\mu+1$, impar vero, quoties $m$ est formae $4\mu+2$ vel $4\mu+3$.*

Ita e. g. statuendo $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$, $d = 11$, habemus tres numeros formae $4\mu+3$, puta 3, 7 et 11; est autem $5.7.11R3$; $3.7.11R5$; $3.5.11R7$; $3.5.7N11$, sive unicus $\frac{n}{d}$ est non-residuum ipsius $d$.

33.

Celeberrimum *theorema fundamentale* circa residua quadratica nihil aliud est, nisi casus specialis theorematis modo evoluti. Limitando scilicet multitudinem

numerorum $a$, $b$, $c$ etc. ad *duos*, patet. si unus tantum ex ipsis, vel neuter, sit formae $4\mu+3$, fieri debere vel simul $aRb$, $bRa$, vel simul $aNb$, $bNa$; contra si uterque est formae $4\mu+3$, unus ex ipsis alterius non-residuum esse debebit, atque hic illius residuum. En itaque demonstrationem *quartam* huius gravissimi theorematis, cuius demonstrationem primam et secundam in Disquisitionibus Arithmeticis, tertiam nuper in commentatione peculiari tradidimus (*Commentt. T. XVI*): duas alias principiis rursus omnino diversis innitentes in posterum exponemus. Summopere sane est mirandum, quod hocce venustissimum theorema, quod primo omnes conatus tam pertinaciter eluserat, tot postea viis toto coelo inter se distantibus adiri potuerit.

34.

Etiam theoremata reliqua, quae quasi supplementum ad theorema fundamentale efficiunt, scilicet per quae dignoscuntur numeri primi, quorum residua vel non-residua sunt $-1$, $+2$ et $-2$, ex iisdem principiis derivari possunt. Incipiemus a residuo $+2$.

Statuendo $n=8a$, ita ut $a$ sit numerus primus, atque $k=1$, per methodum art. 28. $W'$ erit productum e duobus factoribus, quorum alter erit $+\sqrt{a}$, vel $+i\sqrt{a}$, si 8, vel quod idem est 2, est residuum quadraticum ipsius $a$; contra $-\sqrt{a}$ vel $-i\sqrt{a}$, si 2 est non-residuum ipsius $a$. Factor secundus autem est

$$\begin{array}{ll} (1+i)\sqrt{8}, & \text{si } a \text{ est formae } 8\mu+1 \\ (-1+i)\sqrt{8}, & \text{si } a \text{ est formae } 8\mu+3 \\ (-1-i)\sqrt{8}, & \text{si } a \text{ est formae } 8\mu+5 \\ (1-i)\sqrt{8}, & \text{si } a \text{ est formae } 8\mu+7 \end{array}$$

Sed per art. 18 semper erit $W=(1+i)\sqrt{n}$; dividendo hunc valorem per quatuor valores factoris secundi, patet, factorem primum fieri debere

$$\begin{array}{ll} +\sqrt{a}, & \text{si } a \text{ est formae } 8\mu+1 \\ -i\sqrt{a}, & \text{si } a \text{ est formae } 8\mu+3 \\ -\sqrt{a}, & \text{si } a \text{ est formae } 8\mu+5 \\ +i\sqrt{a}, & \text{si } a \text{ est formae } 8\mu+7 \end{array}$$

Hinc sponte sequitur, in casu primo et quarto 2 esse debere residuum ipsius $a$, in casu secundo et tertio autem non-residuum.

35.

Numeri primi, quorum residuum vel non-residuum est $-1$, facile dignoscuntur adiumento theorematis sequentis, quod etiam per se ipsum satis memorabile est.

Theorema. *Productum e duobus factoribus*

$$W' = 1 + r^{-1} + r^{-4} + \text{etc.} + r^{-(n-1)^2}$$
$$W = 1 + r + r^4 + \text{etc.} + r^{(n-1)^2}$$

*est* $= n$, *si* $n$ *est impar; vel* $= 0$, *si* $n$ *est impariter par; vel* $= 2n$, *si* $n$ *est pariter par.*

*Demonstr.* Quum manifesto fiat

$$W = r + r^4 + r^9 + \text{etc.} + r^{nn}$$
$$= r^4 + r^9 + \text{etc.} + r^{(n+1)^2}$$
$$= r^9 + \text{etc.} + r^{(n+2)^2} \quad \text{etc.}$$

productum $WW'$ ita quoque exhiberi poterit

$$\begin{aligned} &1 + r + r^4 + r^9 + \text{etc.} + r^{(n-1)^2} \\ &+ r^{-1}(r + r^4 + r^9 + r^{16} + \text{etc.} + r^{nn}) \\ &+ r^{-4}(r^4 + r^9 + r^{16} + r^{25} + \text{etc.} + r^{(n+1)^2}) \\ &+ r^{-9}(r^9 + r^{16} + r^{25} + r^{36} + \text{etc.} + r^{(n+2)^2}) \\ &\text{etc.} \\ &+ r^{-(n-1)^2}(r^{(n-1)^2} + r^{nn} + r^{(n+1)^2} + r^{(n+2)^2} + \text{etc.} + r^{(2n-2)^2}) \end{aligned}$$

quod aggregatum verticaliter summatum producit

$$\begin{aligned} &n \\ &+ r(1 + rr + r^4 + r^6 + \text{etc.} + r^{2n-2}) \\ &+ r^4(1 + r^4 + r^8 + r^{12} + \text{etc.} + r^{4n-4}) \\ &+ r^9(1 + r^6 + r^{12} + r^{18} + \text{etc.} + r^{6n-6}) \\ &+ \text{etc.} \\ &+ r^{(n-1)^2}(1 + r^{2n-2} + r^{4n-4} + r^{6n-6} + \text{etc.} + r^{2(n-1)^2}) \end{aligned}$$

Iam si $n$ impar est, singulae partes huius aggregati, praeter primam $n$, erunt $= 0$; secunda enim manifesto fit $\frac{r(1-r^{2n})}{1-rr}$, tertia $\frac{r^4(1-r^{4n})}{1-r^4}$ etc. Quoties vero $n$ par est, excipere insuper oportebit partem

$$r^{1nn}(1+r^n+r^{2n}+r^{3n}+\text{etc.}+r^{nn-n})$$

quae fit $=nr^{1nn}$. In casu priori itaque fit $WW'=n$, in posteriori autem $=n+nr^{1nn}$; sed $r^{1nn}$ fit $=+1$, si $n$ est pariter par, tunc itaque prodit $WW'=2n$; contra fit $r^{1nn}=-1$, si $n$ est impariter par, ubi itaque evadit $WW'=0$. Q. E. D.

36.

Iam per art. 22 constat, si $n$ sit numerus primus impar, $\frac{W'}{W}$ fieri $=+1$ vel $=-1$, prout $-1$ fuerit residuum vel non-residuum ipsius $n$. Hinc in casu priori esse debebit $W^2=+n$, in posteriori $W^2=-n$; quamobrem per art. 13 concludimus, casum priorem tunc tantum locum habere posse, quando $n$ sit formae $4\mu+1$, casumque posteriorem, quando $n$ sit formae $4\mu+3$.

Denique e combinatione conditionum pro residuis $+2$ et $-1$ inventarum sponte sequitur, $-2$ esse residuum cuiusvis numeri primi formae $8\mu+1$ vel $8\mu+3$, atque non-residuum cuiusvis numeri primi formae $8\mu+5$ vel $8\mu+7$.

THEOREMATIS FUNDAMENTALIS

IN

# DOCTRINA DE RESIDUIS QUADRATICIS

## DEMONSTRATIONES ET AMPLIATIONES NOVAE

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM TRADITAE 1817. FEBR. 10.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. IV.
Gottingae MDCCCXVIII.

THEOREMATIS FUNDAMENTALIS

IN

# DOCTRINA DE RESIDUIS QUADRATICIS

## DEMONSTRATIONES ET AMPLIATIONES NOVAE.

---

Theorema fundamentale de residuis quadraticis, quod inter pulcherrimas arithmeticae sublimioris veritates refertur, facile quidem per inductionem detectum, longe vero difficilius demonstratum est. Saepius in hoc genere accidere solet, ut veritatum simplicissimarum, quae scrutatori per inductionem sponte quasi se offerunt, demonstrationes profundissime lateant et post multa demum tentamina irrita, longe forte alia quam qua quaesitae erant via, tandem in lucem protrahi possint. Dein haud raro fit, quum primum una inventa est via, ut *plures* subinde patefiant ad eandem metam perducentes, aliae brevius et magis directe, aliae quasi ex obliquo et a principiis longe diversis exorsae, inter quae et quaestionem propositam vix ullum vinculum suspicatus fuisses. Mirus huiusmodi nexus inter veritates abstrusiores non solum peculiarem quandam venustatem hisce contemplationibus conciliat, sed ideo quoque sedulo investigari atque enodari meretur, quod haud raro nova ipsius scientiae subsidia vel incrementa inde demanant.

Etsi igitur theorema arithmeticum, de quo hic agetur, per curas anteriores, quae quatuor demonstrationes inter se prorsus diversas *) suppeditaverunt, plene

*) Duae expositae sunt in *Disquisitionum Arithmeticarum* Sect. quarta et quinta; tertia in commentatione peculiari (*Commentt. Soc. Gotting. Vol. XVI*), quarta inserta est commentationi: *Summatio quarundam serierum singularium* (*Commentt. Recentiores, Vol. I*).

absolutum videri possit, tamen denuo ad idem argumentum revertor, duasque alias demonstrationes adiungo, quae novam certe lucem huic rei affundent. Prior quidem tertiae quodammodo affinis est, quod ab eodem lemmate proficiscitur; postea vero iter diversum prosequitur, ita ut merito pro demonstratione nova haberi possit, quae concinnitate ipsa illa tertia si non superior saltem haud inferior videbitur. Contra demonstratio sexta principio plane diverso subtiliori innixa est novumque sistit exemplum mirandi nexus inter veritates arithmeticas primo aspectu longissime ab invicem remotas. Duabus hisce demonstrationibus adiungitur algorithmus novus persimplex ad diiudicandum, utrum numerus integer datus numeri primi dati residuum quadraticum sit an non-residuum.

Alia adhuc affuit ratio, quae ut novas demonstrationes, novem iam abhinc annos promissas, nunc potissimum promulgarem, effecit. Scilicet quum inde ab anno 1805 theoriam residuorum cubicorum atque biquadraticorum, argumentum longe difficilius, perscrutari coepissem, similem fere fortunam, ac olim in theoria residuorum quadraticorum, expertus sum. Protinus quidem theoremata ea, quae has quaestiones prorsus exhauriunt, et in quibus mira analogia cum theorematibus ad residua quadratica pertinentibus eminet, per inductionem detecta fuerunt, quam primum via idonea quaesita essent: omnes vero conatus, ipsorum demonstrationibus ex omni parte perfectis potiundi, per longum tempus irriti manserunt. Hoc ipsum incitamentum erat, ut demonstrationibus iam cognitis circa residua quadratica alias aliasque addere tantopere studerem, spe fultus, ut ex multis methodis diversis una vel altera ad illustrandum argumentum affine aliquid conferre posset. Quae spes neutiquam vana fuit, laboremque indefessum tandem successus prosperi sequuti sunt. Mox vigiliarum fructus in publicam lucem edere licebit: sed antequam arduum hoc opus aggrediar, semel adhuc ad theoriam residuorum quadraticorum reverti, omnia quae de eadem adhuc supersunt agenda absolvere, atque sic huic arithmeticae sublimioris parti quasi valedicere constitui.

## *THEOREMATIS FUNDAMENTALIS IN THEORIA RESIDUORUM QUADRATICORUM DEMONSTRATIO QUINTA.*

1.

In introductione iam declaravimus, demonstrationem quintam et tertiam ab eodem lemmate proficisci, quod commoditatis caussa, in signis disquisitioni praesenti adaptatis hoc loco repetere visum est.

LEMMA. *Sit $m$ numerus primus (positivus impar), $M$ integer per $m$ non divisibilis; capiantur residua minima positiva numerorum*

$$M,\ 2M,\ 3M,\ 4M \ldots\ldots \tfrac{1}{2}(m-1)M$$

*secundum modulum $m$, quae partim erunt minora quam $\frac{1}{2}m$, partim maiora: posteriorum multitudo sit $= n$. Tunc erit $M$ residuum quadraticum ipsius $m$, vel nonresiduum, prout $n$ par est, vel impar.*

DEMONSTR. Sint e residuis illis ea, quae minora sunt quam $\frac{1}{2}m$, haec $a, b, c, d$ etc., reliqua vero, maiora quam $\frac{1}{2}m$, haec $a', b', c', d'$ etc. Posteriorum complementa ad $m$, puta $m-a'$, $m-b'$, $m-c'$, $m-d'$ etc. manifesto cuncta minora erunt quam $\frac{1}{2}m$, atque tum inter se tum a residuis $a, b, c, d$ etc. diversa, quamobrem cum his simul sumta, ordine quidem mutato, identica erunt cum omnibus numeris $1, 2, 3, 4 \ldots \frac{1}{2}(m-1)$. Statuendo itaque productum

$$1.2.3.4\ldots\ldots\tfrac{1}{2}(m-1) = P$$

erit

$$P = abcd \ldots \times (m-a')(m-b')(m-c')(m-d')\ldots$$

adeoque

$$(-1)^n P = abcd \ldots\ldots \times (a'-m)(b'-m)(c'-m)(d'-m)\ldots\ldots$$

Porro fit, secundum modulum $m$,

$$PM^{\frac{1}{2}(m-1)} \equiv abcd\ldots \times a'b'c'd'\ldots \equiv abcd\ldots \times (a'-m)(b'-m)(c'-m)(d'-m)\ldots$$

adeoque

$$PM^{\frac{1}{2}(m-1)} \equiv P(-1)^n$$

Hinc $M^{\frac{1}{2}(m-1)} \equiv \pm 1$, accepto signo superiori vel inferiori, prout $n$ par est vel impar, unde adiumento theorematis in *Disquisitionibus Arithmeticis* art. 106 demonstrati lemmatis veritas sponte demanat.

2.

Theorema. *Sint $m, M$ integri positivi impares inter se primi, $n$ multitudo eorum e residuis minimis positivis numerorum*

$$M,\ 2M,\ 3M\ \ldots\ldots\ \tfrac{1}{2}(m-1)M$$

*secundum modulum $m$, quae sunt maiora quam $\frac{1}{2}m$; ac perinde $N$ multitudo eorum e residuis minimis positivis numerorum*

$$m,\ 2m,\ 3m\ \ldots\ldots\ \tfrac{1}{2}(M-1)m$$

*secundum modulum $M$, quae sunt maiora quam $\frac{1}{2}M$. Tunc tres numeri $n$, $N$, $\frac{1}{2}(m-1)(M-1)$ vel omnes simul pares erunt, vel unus par duoque reliqui impares.*

Demonstr. Designemus

per $f$ complexum numerorum $1, 2, 3\ldots\ldots\frac{1}{2}(m-1)$
per $f'$ complexum numerorum $m-1,\ m-2,\ m-3\ldots\ldots\frac{1}{2}(m+1)$
per $F$ complexum numerorum $1, 2, 3\ldots\ldots\frac{1}{2}(M-1)$
per $F'$ complexum numerorum $M-1, M-2, M-3\ldots\ldots\frac{1}{2}(M+1)$

Indicabit itaque $n$, quot numeri $Mf$ residua sua minima positiva secundum modulum $m$ habeant in complexu $f'$, et perinde $N$ indicabit, quot numeri $mF$ habeant residua sua minima positiva secundum modulum $M$ in complexu $F'$. Denique designet

$\varphi$ complexum numerorum $1, 2, 3\ldots\ldots\frac{1}{2}(mM-1)$
$\varphi'$ complexum numerorum $mM-1, mM-2, mM-3\ldots\ldots\frac{1}{2}(mM+1)$

Quum quilibet integer per $m$ non divisibilis secundum modulum $m$ vel alicui residuo ex $f$ vel alicui ex $f'$ congruus esse debeat, ac perinde quilibet integer per $M$ non divisibilis secundum modulum $M$ congruus sit vel alicui residuo ex $F$ vel alicui ex $F'$: omnes numeri $\varphi$, inter quos manifesto nullus per $m$ et $M$ simul divisibilis occurrit, in octo classes sequenti modo distribui possunt.

I. In prima classe erunt numeri secundum modulum $m$ alicui numero ex $f$, secundum modulum $M$ vero alicui numero ex $F$ congrui. Designabimus multitudinem horum numerorum per $\alpha$.

II. Numeri secundum modulos $m, M$ resp. numeris ex $f, F'$ congrui, quorum multitudinem statuemus $= \beta$.

III. Numeri secundum modulos $m, M$ resp. numeris ex $f', F$ congrui, quorum multitudinem statuemus $= \gamma$.

IV. Numeri secundum modulos $m, M$ resp. numeris ex $f', F'$ congrui, quorum multitudo sit $= \delta$.

V. Numeri per $m$ divisibiles, secundum modulum $M$ vero residuis ex $F$ congrui.

VI. Numeri per $m$ divisibiles, secundum modulum $M$ vero residuis ex $F'$ congrui.

VII. Numeri per $M$ divisibiles, secundum modulum $m$ autem residuis ex $f$ congrui.

VIII. Numeri per $M$ divisibiles, secundum modulum $m$ vero residuis ex $f'$ congrui.

Manifesto classes V et VI simul sumtae complectentur omnes numeros $mF$, multitudo numerorum in VI contentorum erit $= N$, adeoque multitudo numerorum in V contentorum erit $\frac{1}{2}(M-1)-N$. Perinde classes VII et VIII simul sumtae continebunt omnes numeros $Mf$, in classe VIII reperientur $n$ numeri, in classe VII autem $\frac{1}{2}(m-1)-n$.

Prorsus simili modo omnes numeri $\varphi'$ in octo classes IX — XVI distribuentur, in quo negotio si eundem ordinem servamus, facile perspicietur, numeros in classibus

IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI

contentos resp. esse complementa numerorum in classibus

IV, III, II, I, VI, V, VIII, VII

contentorum ad $mM$, ita ut in classe IX reperiantur $\delta$ numeri; in classe X, $\gamma$ et sic porro. Iam patet, si omnes numeri primae classis associentur cum omnibus numeris classis nonae, haberi omnes numeros infra $mM$, qui secundum modulum $m$ alicui numero ex $f$, secundum modulum $M$ vero alicui numero ex $F$ sunt congrui, quorumque multitudinem aequalem esse multitudini omnium combinationum singulorum $f$ cum singulis $F$, facile perspicitur. Habemus itaque

$$\alpha+\delta = \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$$

similique ratione etiam erit

$$\beta+\gamma=\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$$

Iunctis omnibus numeris classium II, IV, VI, manifesto habebimus omnes numeros infra $\tfrac{1}{2}mM$, qui alicui residuo ex $F'$ secundum modulum $M$ congrui sunt. Iidem vero numeri ita quoque exhiberi possunt:

$$F',\ M+F',\ 2M+F',\ 3M+F'\ldots\ \tfrac{1}{2}(m-3)M+F'$$

unde omnium multitudo erit $=\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$, sive habebimus

$$\beta+\delta+N=\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$$

Perinde e iunctione omnium classium III, IV, VIII colligere licet

$$\gamma+\delta+n=\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$$

Ex his quatuor aequationibus oriuntur sequentes:

$$\begin{aligned}2\alpha&=\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)+n+N\\2\beta&=\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)+n-N\\2\gamma&=\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)-n+N\\2\delta&=\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)-n-N\end{aligned}$$

quarum quaelibet theorematis veritatem monstrat.

3.

Quodsi iam supponimus, $m$ et $M$ esse numeros primos, e combinatione theorematis praecedentis cum lemmate art. 1 theorema fundamentale protinus demanabit. Patet enim,

I. quoties uterque $m$, $M$, sive alteruter tantum, sit formae $4k+1$, numerum $\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$ fore parem, adeoque $n$ et $N$ vel simul pares vel simul impares, et proin vel utrumque $m$ et $M$ alterius residuum quadraticum, vel utrumque alterius non-residuum quadraticum.

II. Quoties autem uterque $m$, $M$ est formae $4k+3$, erit $\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1)$ impar, hinc unus numerorum $n$, $N$ par, alter impar, et proin unus numerorum $m$, $M$ alterius residuum quadraticum, alter alterius non-residuum quadraticum. Q. E. D.

## *THEOREMATIS FUNDAMENTALIS IN THEORIA RESIDUORUM QUADRATICORUM DEMONSTRATIO SEXTA.*

### 1.

Theorema. *Designante $p$ numerum primum (positivum imparem), $n$ integrum positivum per $p$ non divisibilem, $x$ quantitatem indeterminatam, functio*

$$1+x^n+x^{2n}+x^{3n}+\text{etc.}+x^{np-n}$$

*divisibilis erit per*

$$1+x+xx+x^3+\text{etc.}+x^{p-1}$$

Demonstr. Accipiatur integer positivus $g$ ita ut fiat $gn\equiv 1$ (mod. $p$). statuaturque $gn=1+hp$. Tunc erit

$$\frac{1+x^n+x^{2n}+x^{3n}+\text{etc.}+x^{np-n}}{1+x+xx+x^3+\text{etc.}+x^{p-1}}=\frac{(1-x^{np})(1-x)}{(1-x^n)(1-x^p)}=\frac{(1-x^{np})(1-x^{gn}-x+x^{hp+1})}{(1-x^n)\;(1-x^p)}$$
$$=\frac{1-x^{np}}{1-x^p}\cdot\frac{1-x^{gn}}{1-x^n}-\frac{x(1-x^{np})}{1-x^n}\cdot\frac{1-x^{hp}}{1-x^p}$$

adeoque manifesto functio integra. Q. E. D.

Quaelibet itaque functio integra ipsius $x$ per $\frac{1-x^{np}}{1-x^n}$ divisibilis, etiam divisibilis erit per $\frac{1-x^p}{1-x}$.

### 2.

Designet $\alpha$ radicem primitivam positivam pro modulo $p$, i. e. sit $\alpha$ integer positivus talis, ut residua minima positiva potestatum $1, \alpha, \alpha\alpha, \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^{p-2}$ secundum modulum $p$ sine respectu ordinis cum numeris $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots p-1$ identica fiant. Designando porro per $fx$ functionem

$$x+x^{\alpha}+x^{\alpha\alpha}+x^{\alpha^3}+\text{etc.}+x^{\alpha^{p-2}}+1$$

patet, $fx-1-x-xx-x^3-\text{etc.}-x^{p-1}$ divisibilem fore per $1-x^p$, adeoque a potiori per $\frac{1-x^p}{1-x}=1+x+xx+x^3+\text{etc.}+x^{p-1}$, per quam itaque functionem ipsa quoque $fx$ divisibilis erit. Hinc vero sequitur, quum $x$ exprimat quantitatem indeterminatam, esse quoque $f(x^n)$ divisibilem per $\frac{1-x^{np}}{1-x^n}$, et proin (art. praec.) etiam per $\frac{1-x^p}{1-x}$, quoties quidem $n$ sit integer per $p$ non divisibilis. Contra, quoties $n$ est integer per $p$ divisibilis, singulae partes functionis $f(x^n)$ uni-

tate diminutae divisibiles erunt per $1-x^p$; quamobrem in hoc casu etiam $f(x^n)-p$ per $1-x^p$ et proin etiam per $\frac{1-x^p}{1-x}$ divisibilis erit.

3.

THEOREMA. *Statuendo*

$$x-x^{\alpha}+x^{\alpha\alpha}-x^{\alpha^3}+x^{\alpha^4}-\text{etc.}-x^{\alpha^{p-2}}=\xi$$

*erit* $\xi\xi\mp p$ *divisibilis per* $\frac{1-x^p}{1-x}$, *accepto signo superiori, quoties* $p$ *est formae* $4k+1$, *inferiori, quoties* $p$ *est formae* $4k+3$.

DEMONSTR. Facile perspicietur, ex $p-1$ functionibus hisce

$$+x\xi-xx+x^{\alpha+1}-x^{\alpha\alpha+1}+\text{etc.}+x^{\alpha^{p-2}+1}$$
$$-x^{\alpha}\xi-x^{2\alpha}+x^{\alpha\alpha+\alpha}-x^{\alpha^3+\alpha}+\text{etc.}+x^{\alpha^{p-1}+\alpha}$$
$$+x^{\alpha\alpha}\xi-x^{2\alpha\alpha}+x^{\alpha^3+\alpha\alpha}-x^{\alpha^4+\alpha\alpha}+\text{etc.}+x^{\alpha^{p}+\alpha\alpha}$$
$$-x^{\alpha^3}\xi-x^{2\alpha^3}+x^{\alpha^4+\alpha^3}-x^{\alpha^5+\alpha^3}+\text{etc.}+x^{\alpha^{p+1}+\alpha^3}$$

etc. usque ad

$$-x^{\alpha^{p-2}}\xi-x^{2\alpha^{p-2}}+x^{\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}}-x^{\alpha^{p}+\alpha^{p-2}}+\text{etc.}+x^{\alpha^{2p-4}+\alpha^{p-2}}$$

primam fieri $=0$, singulas reliquas autem per $1-x^p$ divisibiles. Quare per $1-x^p$ etiam divisibilis erit omnium summa, quae colligitur

$$=\xi\xi-(f(xx)-1)+(f(x^{\alpha+1})-1)-(f(x^{\alpha\alpha+1})-1)+(f(x^{\alpha^3+1})-1)-\text{etc.}$$
$$+(f(x^{\alpha^{p-2}+1})-1)$$
$$=\xi\xi-f(xx)+f(x^{\alpha+1})-f(x^{\alpha\alpha+1})+f(x^{\alpha^3+1})-\text{etc.}+f(x^{\alpha^{p-2}+1})=\Omega$$

Erit itaque haecce expressio $\Omega$ etiam divisibilis per $\frac{1-x^p}{1-x}$. Iam inter exponentes $2,\ \alpha+1,\ \alpha\alpha+1,\ \alpha^3+1\ \ldots\ldots\ \alpha^{p-2}+1$ unicus tantum erit divisibilis per $p$, puta $\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1$, unde per art. praec. singulae partes expressionis $\Omega$ hae

$$f(xx),\quad f(x^{\alpha+1}),\quad f(x^{\alpha\alpha+1}),\quad (f(x^{\alpha^3+1})\ \text{etc.}$$

excepto solo termino $f(x^{\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1})$, divisibiles erunt per $\frac{1-x^p}{1-x}$. Istas itaque partes delere licebit, ita ut per $\frac{1-x^p}{1-x}$ etiam divisibilis maneat functio

$$\xi\xi\mp f(x^{\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1})$$

ubi signum superius vel inferius valebit, prout $p$ est formae $4k+1$ vel formae $4k+3$. Et quum insuper $f(x^{\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1})-p$ divisibilis sit per $\frac{1-x^p}{1-x}$, erit etiam $\xi\xi \mp p$ per $\frac{1-x^p}{1-x}$ divisibilis. Q. E. D.

Ne duplex signum ullam ambiguitatem adducere possit, per $\varepsilon$ numerum $+1$ vel $-1$ denotabimus, prout $p$ est formae $4k+1$ vel $4k+3$. Erit itaque $\frac{(1-x)(\xi\xi-\varepsilon p)}{1-x^p}$ functio integra ipsius $x$, quam per $Z$ designabimus.

4.

Sit $q$ numerus positivus impar, adeoque $\frac{1}{2}(q-1)$ integer. Erit itaque $(\xi\xi)^{\frac{1}{2}(q-1)}-(\varepsilon p)^{\frac{1}{2}(q-1)}$ divisibilis per $\xi\xi-\varepsilon p$, et proin etiam per $\frac{1-x^p}{1-x}$. Statuamus $\varepsilon^{\frac{1}{2}(q-1)}=\delta$, atque

$$\xi^{q-1}-\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)}=\frac{1-x^p}{1-x}\cdot Y$$

eritque $Y$ functio integra ipsius $x$, atque $\delta=+1$, quoties unus numerorum $p, q$, sive etiam uterque, est formae $4k+1$; contra erit $\delta=-1$, quoties uterque $p, q$ est formae $4k+3$.

5.

Iam supponamus, $q$ quoque esse numerum primum (a $p$ diversum) patetque per theorema in *Disquisitionibus Arithmeticis* art. 51 demonstratum,

$$\xi^q-(x^q-x^{q\alpha}+x^{q\alpha\alpha}-x^{q\alpha^3}+\text{etc.}-x^{q\alpha^{p-2}})$$

divisibilem fieri per $q$, sive formae $qX$, ita ut $X$ sit functio integra ipsius $x$ etiam respectu coëfficientium numericorum (quod etiam de functionibus reliquis integris hic occurrentibus $Z$, $Y$, $W$ subintelligendum est). Designemus pro modulo $p$ atque radice primitiva $\alpha$ indicem numeri $q$ per $\mu$, i. e. sit $q\equiv\alpha^\mu$ (mod. $p$). Erunt itaque numeri $q, q\alpha, q\alpha\alpha, q\alpha^3 \ldots\ldots q\alpha^{p-2}$ secundum modulum $p$ resp. congrui numeris $\alpha^\mu, \alpha^{\mu+1}, \alpha^{\mu+2} \ldots\ldots \alpha^{p-2}, 1, \alpha, \alpha\alpha \ldots\ldots \alpha^{\mu-1}$, adeoque

$$\begin{array}{l} x^q - x^{\alpha^\mu} \\ x^{q\alpha} - x^{\alpha^{\mu+1}} \\ x^{q\alpha\alpha} - x^{\alpha^{\mu+2}} \\ x^{q\alpha^3} - x^{\alpha^{\mu+3}} \\ \vdots \end{array}$$

$$x^{q\alpha^{p-\mu-2}} - x^{\alpha^{p-2}}$$
$$x^{q\alpha^{p-\mu-1}} - x$$
$$x^{q\alpha^{p-\mu}} - x^{\alpha}$$
$$x^{q\alpha^{p-\mu+1}} - x^{\alpha\alpha}$$
$$\vdots$$
$$x^{q\alpha^{p-2}} - x^{\alpha^{\mu-1}}$$

per $1-x^p$ divisibiles. Quibus quantitatibus, alternis vicibus positive et negative sumtis atque summatis, patet, per $1-x^p$ divisibilem esse functionem

$$x^q - x^{q\alpha} + x^{q\alpha\alpha} - x^{q\alpha^3} + \text{etc.} - x^{q\alpha^{p-2}} \mp \xi$$

valente signo superiori vel inferiori, prout $\mu$ par sit vel impar, i. e. prout $q$ sit residuum quadraticum ipsius $p$ vel non-residuum. Statuemus itaque

$$x^q - x^{q\alpha} + x^{q\alpha\alpha} - x^{q\alpha^3} + \text{etc.} - x^{q\alpha^{p-2}} - \gamma\xi = (1-x^p)W$$

faciendo $\gamma = +1$, vel $\gamma = -1$, prout $q$ est residuum quadraticum ipsius $p$ vel non-residuum, patetque, $W$ fieri functionem integram.

## 6.

His ita praeparatis, e combinatione aequationum praecedentium deducimus

$$q\xi X = \varepsilon p(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma) + \tfrac{1-x^p}{1-x} \cdot (Z(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma) + Y\xi\xi - W\xi(1-x))$$

Supponamus, ex divisione functionis $\xi X$ per

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \text{etc.} + x + 1$$

oriri quotientem $U$ cum residuo $T$, sive haberi

$$\xi X = \tfrac{1-x^p}{1-x} \cdot U + T$$

ita ut $U$, $T$ sint functiones integrae, etiam respectu coëfficientium numericorum, et quidem $T$ ordinis certe inferioris, quam divisor. Erit itaque

$$qT - \varepsilon p(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma) = \tfrac{1-x^p}{1-x} \cdot (Z(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma) + Y\xi\xi - W\xi(1-x) - qU)$$

quae aequatio manifesto subsistere nequit, nisi tum membrum a laeva tum membrum a dextra per se evanescat. Erit itaque $\varepsilon p(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma)$ per $q$ divisibi-

lis, nec non etiam $\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma$, adeoque etiam propter $\delta\delta = 1$, numerus $p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma\delta$ per $q$ divisibilis erit.

Quodsi iam per $\beta$ designatur unitas positive vel negative accepta, prout $p$ est residuum vel non-residuum quadraticum numeri $q$, erit $p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \beta$ per $q$ divisibilis, adeoque etiam $\beta - \gamma\delta$, quod fieri nequit, nisi fuerit $\beta = \gamma\delta$. Hinc vero theorema fundamentale sponte sequitur. Scilicet

I. Quoties vel uterque $p$, $q$, vel alteruter tantum est formae $4k+1$, adeoque $\delta = +1$, erit $\beta = \gamma$, et proin vel simul $q$ residuum quadraticum ipsius $p$, atque $p$ residuum quadraticum ipsius $q$; vel simul $q$ non-residuum ipsius $p$, atque $p$ non-residuum ipsius $q$.

II. Quoties uterque $p$, $q$ est formae $4k+3$, adeoque $\delta = -1$, erit $\beta = -\gamma$, adeoque vel simul $q$ residuum quadraticum ipsius $p$, atque $p$ non-residuum ipsius $q$; vel simul $q$ non-residuum ipsius $p$, atque $p$ residuum ipsius $q$. Q. E. D.

### *Algorithmus novus ad decidendum, utrum numerus integer positivus datus numeri primi positivi dati residuum quadraticum sit an non-residuum.*

1.

Antequam solutionem novam huius problematis exponamus, solutionem in *Disquisitionibus Arithmeticis* traditam hic breviter repetemus, quae satis quidem expedite perficitur adiumento theorematis fundamentalis atque theorematum notorum sequentium:

I. Relatio numeri $a$ ad numerum $b$ (quatenus ille huius residuum quadraticum est sive non-residuum), eadem est quae numeri $c$ ad $b$, si $a \equiv c$ (mod. $b$).

II. Si $a$ est productum e factoribus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc., atque $b$ numerus primus, relatio ipsius $a$ ad $b$ ita a relatione horum factorum ad $b$ pendebit, ut $a$ fiat residuum quadraticum ipsius $b$ vel non-residuum, prout inter illos factores reperitur multitudo par vel impar talium, qui sint non-residua ipsius $b$. Quoties itaque aliquis factor est quadratum, ad eum in hoc examine omnino non erit respiciendum; si quis vero factor est potestas integri cum exponente impari, illius vice ipse hic integer fungi poterit.

III. Numerus 2 est residuum quadraticum cuiusvis numeri primi formae $8m+1$ vel $8m+7$, non-residuum vero cuiusvis numeri primi formae $8m+3$ vel $8m+5$.

Proposito itaque numero $a$, cuius relatio ad numerum primum $b$ quaeritur: pro $a$, si maior est quam $b$, ante omnia substituetur eius residuum minimum positivum secundum modulum $b$, quo residuo in factores suos primos resoluto, quaestio per theorema II reducta est ad inventionem relationis singulorum horum factorum ad $b$. Relatio factoris 2, (siquidem adest vel semel, vel ter, vel quinquies etc.) innotescit per theorema III; relatio reliquorum, per theorema fundamentale, pendet a relatione ipsius $b$ ad singulos. Hoc itaque modo loco unius relationis numeri dati ad numerum primum $b$ iam investigandae sunt aliquae relationes numeri $b$ ad alios primos impares ipso $b$ minores, quae problemata eodem modo ad minores modulos deprimentur, manifestoque hae depressiones successivae tandem exhaustae erunt.

2.

Ut exemplo haec solutio illustretur, quaerenda sit relatio numeri 103 ad 379. Quum 103 iam sit minor quam 379, atque ipse numerus primus, protinus applicandum erit theorema fundamentale, quod docet, relationem quaesitam oppositam esse relationi numeri 379 ad 103. Haec iterum aequalis est relationi numeri 70 ad 103, quae ipsa pendet a relationibus numerorum 2, 5, 7 ad 103. Prima harum relationum e theoremate III innotescit. Secunda per theorema fundamentale pendet a relatione numeri 103 ad 5, cui per theorema I aequalis est relatio numeri 3 ad 5; haec iterum per theorema fundamentale pendet a relatione numeri 5 ad 3, cui per theorema I aequalis est relatio numeri 2 ad 3, per theorema III nota. Perinde relatio numeri 7 ad 103 per theorema fundamentale a relatione numeri 103 ad 7 pendet, quae per theorema I aequalis est relationi numeri 5 ad 7; haec iterum per theorema fundamentale pendet a relatione numeri 7 ad 5, cui aequalis est per theorema I relatio numeri 2 ad 5 per theorema III nota. Quodsi iam hanc analysin in synthesin transmutare placet, quaestionis decisio ad quatuordecim momenta referetur, quae complete hic apponimus, ut maior concinnitas solutionis novae eo clarius elucescat.

1. Numerus 2 est residuum quadraticum numeri 103 (theor. III).
2. Numerus 2 est non-residuum quadraticum numeri 3 (theor. III).
3. Numerus 5 est non-residuum quadraticum numeri 3 (ex 1 et 2).
4. Numerus 3 est non-residuum quadraticum numeri 5 (theor. fund. et 3).
5. Numerus 103 est non-residuum quadraticum numeri 5 (I et 4).

6. Numerus 3 est non-residuum quadraticum numeri 103 (theor. fund. et 5).
7. Numerus 2 est non-residuum quadraticum numeri 5 (theor. III).
8. Numerus 7 est non-residuum quadraticum numeri 5 (I et 7).
9. Numerus 5 est non-residuum quadraticum numeri 7 (theor. fund. et 8).
10. Numerus 103 est non-residuum quadraticum numeri 7 (I et 9).
11. Numerus 7 est residuum quadraticum numeri 103 (theor. fund. et 10).
12. Numerus 70 est non-residuum quadraticum numeri 103 (II, 1, 6, 11).
13. Numerus 379 est non-residuum quadraticum numeri 103 (I et 12).
14. Numerus 103 est residuum quadraticum numeri 379 (theor. fund. et 13).

In sequentibus brevitatis caussa utemur signo in *Comment. Gotting. Vol. XVI* introducto. Scilicet per $[x]$ denotabimus quantitatem $x$ ipsam, quoties $x$ est integer, sive integrum proxime minorem quam $x$, quoties $x$ est quantitas fracta, ita ut $x-[x]$ semper fiat quantitas non negativa unitate minor.

3.

**Problema.** *Denotantibus* $a$, $b$ *integros positivos inter se primos, et posito* $[\frac{1}{2}a]=a'$, *invenire aggregatum*

$$\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{2b}{a}\right]+\left[\frac{3b}{a}\right]+\left[\frac{4b}{a}\right]+\text{etc.}+\left[\frac{a'b}{a}\right]$$

Sol. Designemus brevitatis caussa huiusmodi aggregatum per $\varphi(a,b)$, ita ut etiam fiat

$$\varphi(b,a)=\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{2a}{b}\right]+\left[\frac{3a}{b}\right]+\text{etc.}+\left[\frac{b'a}{b}\right]$$

si statuimus $[\frac{1}{2}b]=b'$. In demonstratione tertia theorematis fundamentalis ostensum est, pro casu eo, ubi $a$ et $b$ sunt impares, fieri

$$\varphi(a,b)+\varphi(b,a)=a'b'$$

facileque eandem methodum sequendo veritas huius propositionis ad eum quoque casum extenditur, ubi alteruter numerorum $a, b$ est impar, uti illic iam addigitavimus. Dividatur, ad instar methodi, per quam duorum integrorum divisor communis maximus investigatur, $a$ per $b$, sitque $6$ quotiens atque $c$ residuum; dein dividatur $b$ per $c$ et sic porro, ita ut habeantur aequationes

$$a = \beta b + c$$
$$b = \gamma c + d$$
$$c = \delta d + e$$
$$d = \varepsilon e + f \text{ etc.}$$

Hoc modo in serie numerorum continuo decrescentium $b, c, d, e, f$ etc. tandem ad unitatem perveniemus, quum per hyp. $a$ et $b$ sint inter se primi, ita ut aequatio ultima fiat

$$k = \lambda l + 1$$

Quum manifesto habeatur

$$[\tfrac{a}{b}] = [\beta + \tfrac{c}{b}] = \beta + [\tfrac{c}{b}]$$
$$[\tfrac{2a}{b}] = [2\beta + \tfrac{2c}{b}] = 2\beta + [\tfrac{2c}{b}]$$
$$[\tfrac{3a}{b}] = [3\beta + \tfrac{3c}{b}] = 3\beta + [\tfrac{3c}{b}]$$

etc., erit

$$\varphi(b, a) = \varphi(b, c) + \tfrac{1}{2}\beta(b'b' + b')$$

et proin

$$\varphi(a, b) = a'b' - \tfrac{1}{2}\beta(b'b' + b') - \varphi(b, c)$$

Per similia ratiocinia fit, si statuimus $[\tfrac{1}{2}c] = c'$, $[\tfrac{1}{2}d] = d'$, $[\tfrac{1}{2}e] = e'$ etc.,

$$\varphi(b, c) = b'c' - \tfrac{1}{2}\gamma(c'c' + c') - \varphi(c, d)$$
$$\varphi(c, d) = c'd' - \tfrac{1}{2}\delta(d'd' + d') - \varphi(d, e)$$
$$\varphi(d, e) = d'e' - \tfrac{1}{2}\varepsilon(e'e' + e') - \varphi(e, f)$$

etc. usque ad

$$\varphi(k, l) = k'l' - \tfrac{1}{2}\lambda(l'l' + l') - \varphi(l, 1)$$

Hinc, quoniam manifesto est $\varphi(l, 1) = 0$, colligimus formulam

$$\varphi(a, b) = a'b' - b'c' + c'd' - d'e' + \text{etc.} \pm k'l'$$
$$- \tfrac{1}{2}\beta(b'b' + b') + \tfrac{1}{2}\gamma(c'c' + c') - \tfrac{1}{2}\delta(d'd' + d') + \tfrac{1}{2}\varepsilon(e'e' + e') - \text{etc.} \mp \tfrac{1}{2}\lambda(l'l' + l')$$

4.

Facile iam ex iis, quae in demonstratione tertia exposita sunt, colligitur, relationem numeri $b$ ad $a$, quoties $a$ sit numerus primus, sponte cognosci e va-

lore aggregati $\varphi(a, 2b)$. Scilicet prout hoc aggregatum est numerus par vel impar, erit $b$ residuum quadraticum ipsius $a$ vel non-residuum. Ad eundem vero finem ipsum quoque aggregatum $\varphi(a, b)$ adhiberi poterit, ea tamen restrictione, ut casus ubi $b$ impar est ab eo ubi par est distinguatur. Scilicet

I. Quoties $b$ est impar, erit $b$ residuum vel non-residuum quadraticum ipsius $a$, prout $\varphi(a, b)$ par est vel impar.

II. Quoties $b$ est par, eadem regula valebit, si insuper $a$ est vel formae $8n+1$ vel formae $8n+7$; si vero pro valore pari ipsius $b$ modulus $a$ est vel formae $8n+3$ vel formae $8n+5$, regula opposita applicanda erit, puta, $b$ erit residuum quadraticum ipsius $a$, si $\varphi(a, b)$ est impar, non-residuum vero, si $\varphi(a, b)$ est par.

Haec omnia ex art. 4 demonstrationis tertiae facillime derivantur.

5.

*Exemplum*. Si quaeritur relatio numeri 103 ad numerum primum 379, habemus, ad eruendum aggregatum $\varphi(379, 103)$,

| | | |
|---|---|---|
| $a = 379$ | $a' = 189$ | |
| $b = 103$ | $b' = 51$ | $\beta = 3$ |
| $c = 70$ | $c' = 35$ | $\gamma = 1$ |
| $d = 33$ | $d' = 16$ | $\delta = 2$ |
| $e = 4$ | $e' = 2$ | $\varepsilon = 8$ |

hinc

$$\varphi(379, 103) = 9639 - 1785 + 560 - 32 - 3978 + 630 - 272 + 24 = 4786$$

unde 103 erit residuum quadraticum numeri 379. Si ad eundem finem aggregatum (379, 206) adhibere malumus, habemus hocce paradigma:

| | | |
|---|---|---|
| 379 | 189 | |
| 206 | 103 | 1 |
| 173 | 86 | 1 |
| 33 | 16 | 5 |
| 8 | 4 | 4 |

unde deducimus

$\varphi(379, 206) = 19467 - 8858 + 1376 - 64 - 5356 + 3741 - 680 + 40 = 9666$

quapropter 103 est residuum quadraticum numeri 379.

## 6.

Quum ad decidendam relationem numeri $b$ ad $a$ non opus sit, singulas partes aggregati $\varphi(a, b)$ computare, sed sufficiat novisse, quot inter eas sint impares, regula nostra ita quoque exhiberi potest:

Fiat ut supra $a = 6b + c$, $b = \gamma c + d$, $c = \delta d + e$ etc., donec in serie numerorum $a, b, c, d, e$ etc. ad unitatem perventum sit. Statuatur $[\frac{1}{2}a] = a'$, $[\frac{1}{2}b] = b'$, $[\frac{1}{2}c] = c'$ etc., sitque $\mu$ multitudo numerorum imparium in serie $a', b', c'$ etc. eorum, quos immediate sequitur impar; sit porro $\nu$ multitudo numerorum imparium in serie $6, \gamma, \delta$ etc. eorum, quibus in serie $b', c', d'$ etc. resp. respondet numerus formae $4n+1$ vel formae $4n+2$. His ita factis, erit $b$ residuum quadraticum vel non-residuum ipsius $a$, prout $\mu + \nu$ est par vel impar, unico casu excepto, ubi simul est $b$ par atque $a$ vel formae $8n+3$ vel $8n+5$, pro quo regula opposita valet.

In exemplo nostro series $a', b', c', d', e'$ duas successiones imparium sistit, unde $\mu = 2$; in serie $6', \gamma', \delta', \varepsilon'$, duo quidem impares adsunt, sed quibus in serie $b', c', d', e'$ respondent numeri formae $4n+3$, unde $\nu = 0$. Fit itaque $\mu + \nu$ par, adeoque 103 residuum quadraticum numeri 379.

# THEORIA

# RESIDUORUM BIQUADRATICORUM

## COMMENTATIO PRIMA


AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS



SOCIETATI REGIAE TRADITA 1825. APR. 5.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VI.
Gottingae MDCCCXXVIII.

# THEORIA RESIDUORUM BIQUADRATICORUM.

## COMMENTATIO PRIMA.

1.

Theoria residuorum quadraticorum ad pauca theoremata fundamentalia reducitur, pulcherrimis Arithmeticae Sublimioris cimeliis adnumeranda, quae primo per inductionem facile detecta, ac dein multifariis modis ita demonstrata esse constat, ut nihil amplius desiderandum relictum sit.

Longe vero altioris indaginis est theoria residuorum cubicorum et biquadraticorum. Quam quum inde ab anno 1805 perscrutari coepissemus, praeter ea, quae quasi in limine sunt posita, nonnulla quidem theoremata specialia se obtulerunt, tum propter simplicitatem suam, tum propter demonstrationum difficultatem valde insignia: mox vero comperimus, principia Arithmeticae hactenus usitata ad theoriam generalem stabiliendam neutiqnam sufficere, quin potius hanc necessario postulare, ut campus Arithmeticae Sublimioris infinities quasi promoveatur, quod quomodo intelligendum sit, in continuatione harum disquisitionum clarissime elucebit. Quamprimum hunc campum novum ingressi sumus, aditus ad cognitionem theorematum simplicissimorum totam theoriam exhaurientium per inductionem statim patuit: sed ipsorum demonstrationes tam profunde latuerunt, ut post multa demum tentamina irrita tandem in lucem protrahi potuerint.

Quum iam ad promulgationem harum lucubrationum accingamur, a theoria residuorum biquadraticorum initium faciemus, et quidem in hac prima commen-

tatione disquisitiones eas explicabimus, quas iam cis campum Arithmeticae ampliatum absolvere licuit, quae illuc viam quasi sternunt, simulque theoriae divisionis circuli quaedam nova incrementa adiungunt.

2.

Notionem residui biquadratici in *Disquisitionibus Arithmeticis* art. 115 introduximus: scilicet numerus integer $a$, positivus seu negativus, integri $p$ residuum biquadraticum vocatur; si $a$ secundum modulum $p$ biquadrato congruus fieri potest, et perinde non-residuum biquadraticum, si talis congruentia non exstat. In omnibus disquisitionibus sequentibus, ubi contrarium expressis verbis non monetur, modulum $p$ esse numerum primum (imparem positivum) supponemus, atque $a$ per $p$ non divisibilem, quum omnes casus reliqui ad hunc facillime reduci possint.

3.

Manifestum est, omne residuum biquadraticum numeri $p$ eiusdem quoque residuum quadraticum esse, et proin omne non-residuum quadraticum etiam non-residuum biquadraticum. Hanc propositionem etiam convertere licet, quoties $p$ est numerus primus formae $4n+3$. Nam si in hoc casu $a$ est residuum quadraticum ipsius $p$, statuamus $a \equiv bb$ (mod. $p$), ubi $b$ vel residuum quadraticum ipsius $p$ erit vel non-residuum: in casu priori statuemus $b \equiv cc$, unde $a \equiv c^4$, i. e. $a$ erit residuum biquadraticum ipsius $p$; in casu posteriori $-b$ fiet residuum quadraticum ipsius $p$ (quoniam $-1$ est non-residuum cuiusvis numeri primi formae $4n+3$), faciendoque $-b \equiv cc$, erit ut antea $a \equiv c^4$, atque $a$ residuum biquadraticum ipsius $p$. Simul facile perspicietur, alias solutiones congruentiae $x^4 \equiv a$ (mod. $p$), praeter has duas $x \equiv c$ et $x \equiv -c$ in hoc casu non dari. Quum hae propositiones obviae integram residuorum biquadraticorum theoriam pro modulis primis formae $4n+3$ exhauriant, tales modulos a disquisitione nostra omnino excludemus, sive hanc ad modulos primos formae $4n+1$ limitabimus.

4.

Existente itaque $p$ numero primo formae $4n+1$, propositionem art. praec. convertere non licet: nempe exstare possunt residua quadratica, quae non sunt simul residua biquadratica, quod evenit, quoties residuum quadraticum congruum est quadrato non-residui quadratici. Statuendo enim $a \equiv bb$, existente $b$ non-

residuo quadratico ipsius $p$, si congruentiae $x^4 \equiv a$ satisfieri posset, per valorem $x \equiv c$, foret $c^4 \equiv bb$, sive productum $(cc-b)(cc+b)$ per $p$ divisibile, unde $p$ vel factorem $cc-b$ vel alterum $cc+b$ metiri deberet, i. e. vel $+b$ vel $-b$ foret residuum quadraticum ipsius $p$, et proin uterque (quoniam $-1$ est residuum quadraticum), contra hyp.

Omnes itaque numeri integri per $p$ non divisibiles in tres classes distribui possent, quarum prima contineat residua biquadratica, secunda non-residua biquadratica ea, quae simul sunt residua quadratica, tertia non-residua quadratica. Manifesto sufficit, tali classificationi solos numeros $1, 2, 3 \ldots\ldots p-1$ subiicere, quorum semissis ad classem tertiam reduceretur, dum altera semissis inter classem primam et secundam distribueretur.

5.

Sed praestabit, quatuor classes stabilire, quarum indoles ita se habeat.

Sit $A$ complexus omnium residuorum biquadraticorum ipsius $p$, inter 1 et $p-1$ (inclus.) sitorum, atque $e$ non-residuum quadraticum ipsius $p$ ad arbitrium electum. Sit porro $B$ complexus residuorum minimorum positivorum e productis $eA$ secundum modulum $p$ oriundorum, et perinde $C, D$ resp. complexus residuorum minimorum positivorum e productis $eeA$, $e^3A$ secundum modulum $p$ prodeuntium. His ita factis facile perspicitur, singulos numeros $B$ inter se diversos fore, et perinde singulos $C$, nec non singulos $D$; cifram autem inter omnes hos numeros occurrere non posse. Porro patet, omnes numeros, in $A$ et $C$ contentos, esse residua quadratica ipsius $p$, omnes autem in $B$ et $D$ non-residua quadratica, ita ut certe complexus $A$, $C$ nullum numerum cum complexu $B$ vel $D$ communem habere possint. Sed etiam neque $A$ cum $C$, neque $B$ cum $D$ ullum numerum communem habere potest. Supponamus enim

I. numerum aliquem ex $A$, e. g. $a$ etiam in $C$ inveniri, ubi prodierit e producto $eea'$ ipsi congruo, existente $a'$ numero e complexu $A$. Statuatur $a \equiv \alpha^4$, $a' \equiv \alpha'^4$, accipiaturque integer $\theta$ ita, ut fiat $\theta\alpha' \equiv 1$. His ita factis erit $ee\alpha'^4 \equiv \alpha^4$, adeoque multiplicando per $\theta^4$,

$$ee \equiv \alpha^4\theta^4$$

i. e. $ee$ residuum biquadraticum, adeoque $e$ residuum quadraticum, contra hyp.

II. Perinde supponendo, aliquem numerum complexibus $B$, $D$ communem esse, atque e productis $ea$, $e^3a'$ prodiisse, existentibus $a$, $a'$ numeris e complexu $A$, e congruentia $ea \equiv e^3a'$ sequeretur $a \equiv eea'$, adeoque haberetur numerus, qui e producto $eea'$ oriundus ad $C$ simulque ad $A$ pertineret, quod impossibile esse modo demonstravimus.

Porro facile demonstratur, *omnia* residua quadratica ipsius $p$, inter 1 et $p-1$ incl. sita, necessario vel in $A$ vel in $C$, omniaque non-residua quadratica ipsius $p$ inter illos limites necessario vel in $B$ vel in $D$ occurrere debere. Nam

I. Omne tale residuum quadraticum, quod simul est residuum biquadraticum, per hyp. in $A$ invenitur.

II. Residuum quadraticum $h$ (ipso $p$ minus), quod simul est non-residuum biquadraticum, statuatur $\equiv gg$, ubi $g$ erit non-residuum quadraticum. Accipiatur integer $\gamma$ talis, ut fiat $e\gamma \equiv g$, eritque $\gamma$ residuum quadraticum ipsius $p$, quod statuemus $\equiv kk$. Hinc erit

$$h \equiv gg \equiv ee\gamma\gamma \equiv eek^4$$

Quare quum residuum minimum ipsius $k^4$ inveniatur in $A$, numerus $h$, quippe qui ex illius producto per $ee$ oritur, necessario in $C$ contentus erit.

III. Designante $h$ non-residuum quadraticum ipsius $p$ inter limites 1 et $p-1$, eruatur inter eosdem limites numerus integer $g$ talis, ut habeatur $eg \equiv h$. Erit itaque $g$ residuum quadraticum, et proin vel in $A$ vel in $C$ contentus: in casu priori $h$ manifesto inter numeros $B$, in posteriori autem inter numeros $D$ invenietur.

Ex his omnibus colligitur, cunctos numeros $1, 2, 3 \ldots p-1$ inter quatuor series $A, B, C, D$ ita distribui, ut quivis illorum in una harum reperiatur, unde singulae series $\frac{1}{4}(p-1)$ numeros continere debent. In hac classificatione classes $A$ et $C$ quidem numeros suos essentialiter possident, sed distinctio inter classes $B$ et $D$ eatenus arbitraria est, quatenus ab electione numeri $e$ pendet, qui ipse semper ad $B$ referendus est; quapropter si eius loco alius e classe $D$ adoptatur, classes $B$, $D$ inter se permutabuntur.

6.

Quum $-1$ sit residuum quadraticum ipsius $p$, statuamus $-1 \equiv ff \pmod{p}$, unde quatuor radices congruentiae $x^4 \equiv 1$ erunt $1, f, -1, -f$. Quodsi itaque

$a$ est residuum biquadraticum ipsius $p$, puta $\equiv \alpha^4$, quatuor radices congruentiae $x^4 \equiv a$ erunt $\alpha$, $f\alpha$, $-\alpha$, $-f\alpha$, quas inter se incongruas esse facile perspicitur. Hinc patet, si colligantur residua minima positiva biquadratorum 1, 16, 81, 256 .... $(p-1)^4$, quaterna semper aequalia fore, ita ut $\frac{1}{4}(p-1)$ residua biquadratica diversa habeantur complexum $A$ formantia. Si residua minima biquadratorum usque ad $(\frac{1}{2}p-\frac{1}{2})^4$ tantum colliguntur, singula bis aderunt.

7.

Productum duorum residuorum biquadraticorum manifesto est residuum biquadraticum, sive e multiplicatione duorum numerorum classis $A$ semper prodit productum, cuius residuum minimum positivum ad eandem classem pertinet. Perinde producta numeri ex $B$ in numerum ex $D$, vel numeri ex $C$ in numerum ex $C$, habebunt residua sua minima in $A$.

In $B$ autem cadent residua productorum $A.B$ et $C.D$; in $C$ residua productorum $A.C$, $B.B$ et $D.D$; denique in $D$ residua productorum $A.D$ et $B.C$.

Demonstrationes tam obviae sunt, ut sufficiat, unam indicavisse. Sint e.g. $c$ et $d$ numeri ex $C$ et $D$, atque $c \equiv eea$, $d \equiv e^3a'$, denotantibus $a$, $a'$ numeros ex $A$. Tunc $e^4aa'$ erit residuum biquadraticum, i.e. ipsius residuum minimum ad $A$ referetur: quare quum productum $cd$ fiat $\equiv e.e^4aa'$, illius residuum minimum in $B$ contentum erit.

Simul facile iam diiudicari potest, ad quamnam classem referendum sit productum e pluribus factoribus. Scilicet tribuendo classi $A$, $B$, $C$, $D$ resp. characterem 0, 1, 2, 3, charaoter producti vel aggregato characterum singulorum factorum aequalis erit, vel eius residuo minimo secundum modulum 4.

8.

Operae pretium visum est, hasce propositiones elementares absque adminiculo theoriae residuorum potestatum evolvere, qua in auxilium vocata omnia adhuc multo facilius demonstrare licet.

Sit $g$ radix primitiva pro modulo $p$, i. e. numerus talis, ut in serie potestatum $g$, $gg$, $g^3$.... nulla ante hanc $g^{p-1}$ unitati secundum modulum $p$ congrua evadat. Tunc residua minima positiva numerorum 1, $g$, $gg$, $g^3$.... $g^{p-2}$ praeter ordinem cum his 1, 2, 3 ..... $p-1$ convenient, et in quatuor classes sequenti modo distribuentur:

| ad | residua minima numerorum |
|---|---|
| $A$ | $1,\ g^4,\ g^8,\ g^{12}\ldots\ldots g^{p-5}$ |
| $B$ | $g,\ g^5,\ g^9,\ g^{13}\ldots\ldots g^{p-4}$ |
| $C$ | $gg,\ g^6,\ g^{10},\ g^{14}\ldots\ldots g^{p-3}$ |
| $D$ | $g^3,\ g^7,\ g^{11},\ g^{15}\ldots\ldots g^{p-2}$ |

Hinc omnes propositiones praecedentes sponte demanant.

Ceterum sicuti hic numeri $1, 2, 3 \ldots . p-1$ in quatuor classes distributi sunt, quarum complexus per $A, B, C, D$ designamus, ita *quemvis* integrum per $p$ non divisibilem, ad normam ipsius residui minimi secundum modulum $p$, alicui harum classium adnumerare licebit.

9.

Denotabimus per $f$ residuum minimum potestatis $g^{\frac{1}{4}(p-1)}$ secundum modulum $p$, unde quum fiat $ff \equiv g^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1$ (*Disquis. Arithm.* art. 62), patet, characterem $f$ hic idem significare quod in art. 6. Potestas $g^{\frac{1}{4}\lambda(p-1)}$ itaque, denotante $\lambda$ integrum positivum, congrua erit secundum modulum $p$ numero $1, f, -1, -f$, prout $\lambda$ formae $4m, 4m+1, 4m+2, 4m+3$ resp., sive prout residuum minimum ipsius $g^\lambda$ in $A, B, C, D$ resp. reperitur. Hinc nanciscimur criterium persimplex ad diiudicandum, ad quam classem numerus datus $h$ per $p$ non divisibilis referendus sit; pertinebit scilicet $h$ ad $A, B, C$ vel $D$, prout potestas $h^{\frac{1}{4}(p-1)}$ secundum modulum $p$ numero $1$; $f$, $-1$ vel $-f$ congrua evadit.

Tamquam corollarium hinc sequitur, $-1$ semper ad classem $A$ referri, quoties $p$ sit formae $8n+1$, ad classem $C$ vero, quoties $p$ sit formae $8n+5$. Demonstratio huius theorematis a theoria residuorum potestatum independens ex iis, quae in *Disquisitionibus Arithmeticis* art. 115, III docuimus, facile adornari potest.

10.

Quum *omnes* radices primitivae pro modulo $p$ prodeant e residuis potestatum $g^\lambda$, accipiendo pro $\lambda$ omnes numeros ad $p-1$ primos, facile perspicitur, illas inter complexus $B$ et $D$ aequaliter dispertitas fore, basi $g$ semper in $B$ contenta. Quodsi loco numeri $g$ radix alia primitiva e complexu $B$ pro basi accipitur, classificatio eadem manebit; si vero radix primitiva e complexu $D$ tamquam basis adoptatur, classes $B$ et $D$ inter se permutabuntur.

Si classificatio criterio in art. praec. prolato superstruitur, discrimen inter classes *B* et *D* inde pendebit, utram radicem congruentiae $xx \equiv -1$ (mod. $p$) pro numero characteristico $f$ adoptemus.

**11.**

Quo facilius disquisitiones subtiliores, quas iam aggressuri sumus, per exempla illustrari possint, constructionem classium pro omnibus modulis infra 100 hic apponimus. Radicem primitivam pro singulis minimam adoptavimus.

$p = 5$

$g = 2,\ f = 2$

| | |
|---|---|
| *A* | 1 |
| *B* | 2 |
| *C* | 4 |
| *D* | 3 |

$p = 13$

$g = 2,\ f = 8$

| | |
|---|---|
| *A* | 1, 3, 9 |
| *B* | 2, 5, 6 |
| *C* | 4, 10, 12 |
| *D* | 7, 8, 11 |

$p = 17$

$g = 3,\ f = 13$

| | |
|---|---|
| *A* | 1, 4, 13, 16 |
| *B* | 3, 5, 12, 14 |
| *C* | 2, 8, 9, 15 |
| *D* | 6, 7, 10, 11 |

$p = 29$

$g = 2,\ f = 12$

| | |
|---|---|
| *A* | 1, 7, 16, 20, 23, 24, 25 |
| *B* | 2, 3, 11, 14, 17, 19, 21 |
| *C* | 4, 5, 6, 9, 13, 22, 28 |
| *D* | 8, 10, 12, 15, 18, 26, 27 |

$p = 37$
$g = 2,\ f = 31$

| | |
|---|---|
| *A* | 1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34 |
| *B* | 2, 14, 15, 18, 20, 24, 29, 31, 32 |
| *C* | 3, 4, 11, 21, 25, 27, 28, 30, 36 |
| *D* | 5, 6, 8, 13, 17, 19, 22, 23, 35 |

$p = 41$
$g = 6,\ f = 32$

| | |
|---|---|
| *A* | 1, 4, 10, 16, 18, 23, 25, 31, 37, 40 |
| *B* | 6, 14, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 27, 35 |
| *C* | 2, 5, 8, 9, 20, 21, 32, 33, 36, 39 |
| *D* | 3, 7, 11, 12, 13, 28, 29, 30, 34, 38 |

$p = 53$
$g = 2,\ f = 30$

| | |
|---|---|
| *A* | 1, 10, 13, 15, 16, 24, 28, 36, 42, 44, 46, 47, 49 |
| *B* | 2, 3, 19, 20, 26, 30, 31, 32, 35, 39, 41, 45, 48 |
| *C* | 4, 6, 7, 9, 11, 17, 25, 29, 37, 38, 40, 43, 52 |
| *D* | 5, 8, 12, 14, 18, 21, 22, 23, 27, 33, 34, 50, 51 |

$p = 61$
$g = 2,\ f = 11$

| | |
|---|---|
| *A* | 1, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58 |
| *B* | 2, 7, 18, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 40, 44, 50, 51, 53, 55 |
| *C* | 3, 4, 5, 14, 19, 27, 36, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 52, 60 |
| *D* | 6, 8, 10, 11, 17, 21, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 43, 54, 59 |

$p = 73$
$g = 5,\ f = 27$

| | |
|---|---|
| *A* | 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 37, 41, 55, 57, 64, 65, 69, 71, 72 |
| *B* | 5, 7, 10, 14, 17, 20, 28, 33, 34, 39, 40, 45, 53, 56, 59, 63, 66, 68 |
| *C* | 3, 6, 12, 19, 23, 24, 25, 27, 35, 38, 46, 48, 49, 50, 54, 61, 67, 70 |
| *D* | 11, 13, 15, 21, 22, 26, 29, 30, 31, 42, 43, 44, 47, 51, 52, 58, 60, 62 |

$p = 89$

$g = 3$, $f = 34$

| | |
|---|---|
| $A$ | 1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 25, 32, 39, 44, 45, 50, 57, 64, 67, 73, 78, 81, 85, 87, 88 |
| $B$ | 3, 6, 7, 12, 14, 23, 24, 28, 33, 41, 43, 46, 48, 56, 61, 65, 66, 75, 77, 82, 83, 86 |
| $C$ | 5, 9, 10, 17, 18, 20, 21, 34, 36, 40, 42, 47, 49, 53, 55, 68, 69, 71, 72, 79, 80, 84 |
| $D$ | 13, 15, 19, 26, 27, 29, 30, 31, 35, 37, 38, 51, 52, 54, 58, 59, 60, 62, 63, 70, 74, 76 |

$p = 97$

$g = 5$, $f = 22$

| | |
|---|---|
| $A$ | 1, 4, 6, 9, 16, 22, 24, 33, 35, 36, 43, 47, 50, 54, 61, 62, 64, 73, 75, 81, 88, 91, 93, 96 |
| $B$ | 5, 13, 14, 17, 19, 20, 21, 23, 29, 30, 41, 45, 52, 56, 67, 68, 74, 76, 77, 78, 80, 83, 84, 92 |
| $C$ | 2, 3, 8, 11, 12, 18, 25, 27, 31, 32, 44, 48, 49, 53, 65, 66, 70, 72, 79, 85, 86, 89, 94, 95 |
| $D$ | 7, 10, 15, 26, 28, 34, 37, 38, 39, 40, 42, 46, 51, 55, 57, 58, 59, 60, 63, 69, 71, 82, 87, 90 |

## 12.

Quum numerus 2 sit residuum quadraticum omnium numerorum primorum formae $8n+1$, non-residuum vero omnium formae $8n+5$, pro modulis primis formae prioris 2 in classe $A$ vel $C$, pro modulis formae posterioris in classe $B$ vel $D$ invenietur. Quum discrimen inter classes $B$ et $D$ non sit essentiale, quippe quod tantummodo ab electione numeri $f$ pendet, modulos formae $8n+5$ aliquantisper seponemus. Modulos formae $8n+1$ autem *inductioni* subiiciendo, invenimus 2 pertinere ad $A$ pro $p = 73$, 89, 113, 233, 257, 281, 337, 353 etc.; contra 2 pertinere ad $C$ pro $p = 17$, 41, 97, 137, 193, 241, 313, 401, 409, 433, 449, 457 etc.

Ceterum quum pro modulo primo formae $8n+1$ numerus $-1$ sit residuum biquadraticum, patet, $-2$ semper cum $+2$ ad eandem classem referendum esse.

13.

Si exempla art. praec. inter se comparantur, primo saltem aspectu criterium nullum simplex se offerre videtur, per quod modulos priores a posterioribus dignoscere liceret. Nihilominus *duo* huiusmodi criteria dantur, elegantia et simplicitate perinsignia, ad quorum alterum considerationes sequentes viam sternent.

Modulus $p$, tamquam numerus primus formae $8n+1$, reduci poterit, et quidem unico tantum modo, sub formam $aa+2bb$ (*Disquiss. Arithm.* art. 182. II); radices $a$, $b$ positive accipi supponemus. Manifesto $a$ impar erit, $b$ vero par; statuemus autem $b=2^{\lambda}c$, ita ut $c$ sit impar. Iam observamus

I. quum habeatur $p\equiv aa$ (mod. $c$) ipsum $p$ esse residuum quadraticum ipsius $c$, et proin etiam singulorum factorum primorum, in quos $c$ resolvitur: vicissim itaque, per theorema fundamentale, singuli hi factores primi erunt residua quadratica ipsius $p$, et proin etiam illorum productum $c$ erit residuum quadraticum ipsius $p$. Quod quum etiam de numero 2 valeat, patet, $b$ esse residuum quadraticum ipsius $p$, et proin $bb$, nec non $-bb$, residuum biquadraticum.

II. Hinc $-2bb$ ad eandem classem referri debet, in qua invenitur numerus 2; quare quum $aa\equiv -2bb$, manifestum est, 2 vel in classe $A$, vel in classe $C$ inveniri, prout $a$ sit vel residuum quadraticum ipsius $p$, vel non-residuum quadraticum.

III. Iam supponamus, $a$ in factores suos primos resolutum esse, e quibus ii, qui sunt vel formae $8m+1$ vel $8m+7$, denotentur per $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ etc., ii vero, qui sunt vel formae $8m+3$ vel $8m+5$, per $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ etc.: posteriorum multitudo sit $=\mu$. Quoniam $p\equiv 2bb$ (mod. $a$), erit $p$ residuum quadraticum eorum factorum primorum ipsius $a$, quorum residuum quadraticum est 2, i. e. factorum $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ etc.; non-residuum quadraticum vero factorum eorum, quorum non-residuum quadraticum est 2, i. e. factorum $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ etc. Quocirca, vice versa, per theorema fundamentale, singuli $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ etc. erunt residua quadratica ipsius $p$, singuli $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ etc. autem non-residua quadratica. Ex his itaque concluditur, productum $a$ fore residuum quadraticum ipsius $p$, vel non-residuum, prout $\mu$ par sit vel impar.

IV. Sed facile confirmatur, productum omnium $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ etc. fieri formae $8m+1$ vel $8m+7$, idemque valere de producto omnium $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ etc., si horum multitudo fuerit par, ita ut in hoc casu etiam productum $a$ necessario fieri debeat formae $8m+1$ vel $8m+7$; contra productum omnium $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ etc., quo-

ties ipsorum multitudo impar sit, fieri formae $8m+3$ vel $8m+5$, idemque adeo in hoc casu valere de producto $a$.

Ex his omnibus itaque colligitur theorema elegans:

*Quoties $a$ est formae $8m+1$ vel $8m+7$, numerus 2 in complexu $A$ contentus erit; quoties vero $a$ est formae $8m+3$ vel $8m+5$, numerus 2 in complexu $C$ invenietur.*

Quod confirmatur per exempla in art. praec. enumerata; priores enim moduli ita discerpuntur: $73=1+2.36$, $89=81+2.4$, $113=81+2.16$, $233=225+2.4$, $257=225+2.16$, $281=81+2.100$, $337=49+2.144$, $353=225+2.64$; posteriores vero ita: $17=9+2.4$, $41=9+2.16$, $97=25+2.36$, $137=9+2.64$, $193=121+2.36$, $241=169+2.36$, $313=25+2.144$, $401=9+2.196$, $409=121+2.144$, $433=361+2.36$, $449=441+2.4$, $457=169+2.144$.

## 14.

Quum discerptio numeri $p$ in quadratum simplex et duplex nexum tam insignem cum classificatione numeri 2 prodiderit, operae pretium esse videtur tentare, num discerptio in duo quadrata, cui numerum $p$ aeque obnoxium esse constat, similem forte successum suppeditet. Ecce itaque discerptiones numerorum $p$, pro quibus 2 pertinet ad classem

| $A$ | $C$ |
|---|---|
| $9+64$ | $1+16$ |
| $25+64$ | $25+16$ |
| $49+64$ | $81+16$ |
| $169+64$ | $121+16$ |
| $1+256$ | $49+144$ |
| $25+256$ | $225+16$ |
| $81+256$ | $169+144$ |
| $289+64$ | $1+400$ |
| | $9+400$ |
| | $289+144$ |
| | $49+400$ |
| | $441+16$ |

Ante omnia observamus, duorum quadratorum, in quae $p$ discerpitur, alterum impar esse debere, quod statuemus $= aa$, alterum par, quod statuemus $= bb$. Quoniam $aa$ fit formae $8n+1$, patet, valoribus impariter paribus ipsius $b$ respondere valores ipsius $p$ formae $8n+5$, ab inductione nostra hic exclusos, quippe qui numerum 2 in classe $B$ vel $D$ habereint. Pro valoribus autem ipsius $p$, qui sunt formae $8n+1$, $b$ esse debet pariter par, et si inductioni, quam schema allatum ob oculos sistit, fidem habere licet, numerus 2 ad classem $A$ referendus erit pro omnibus modulis, pro quibus $b$ est formae $8n$, ad classem $C$ vero pro omnibus modulis, pro quibus $b$ est formae $8n+4$. Sed hoc theorema longe altioris indaginis est, quam id, quod in art. praec. eruimus, demonstrationique plures disquisitiones praeliminares sunt praemittendae, ordinem, quo numeri complexuum $A$, $B$, $C$, $D$ se invicem sequuntur, spectantes.

15.

Designemus multitudinem numerorum e complexu $A$, quos immediate sequitur numerus e complexu $A$, $B$, $C$, $D$ resp., per (00), (01), (02), (03); perinde multitudinem numerorum e complexu $B$, quos sequitur numerus e complexu $A$, $B$, $C$, $D$ resp. per (10), (11), (12), (13); similiterque sint in complexu $C$ resp. (20), (21), (22), (23) numeri, in complexu $D$ vero (30), (31), (32), (33) numeri, quos sequitur numerus e complexu $A$, $B$, $C$, $D$. Proponimus nobis, has sedecim multitudines a priori determinare. Quo commodius lectores ratiocinia generalia cum exemplis comparare possint, valores numericos terminorum schematis ($S$)

(00), (01), (02), (03)
(10), (11), (12), (13)
(20), (21), (22), (23)
(30), (31), (32), (33)

pro singulis modulis, pro quibus classificationes in art. 11 tradidimus, hic adscribere visum est.

| $p = 5$ | $p = 13$ | $p = 17$ | $p = 29$ |
|---|---|---|---|
| 0, 1, 0, 0 | 0, 1, 2, 0 | 0, 2, 1, 0 | 2, 3, 0, 2 |
| 0, 0, 0, 1 | 1, 1, 0, 1 | 2, 0, 1, 1 | 1, 1, 2, 3 |
| 0, 0, 0, 0 | 0, 1, 0, 1 | 1, 1, 1, 1 | 2, 1, 2, 1 |
| 0, 0, 1, 0 | 1, 0, 1, 1 | 0, 1, 1, 2 | 1, 2, 3, 1 |

| $p = 37$ | $p = 41$ | $p = 53$ | $p = 61$ |
|---|---|---|---|
| 2, 1, 2, 4 | 0, 4, 3, 2 | 2, 3, 6, 2 | 4, 3, 2, 6 |
| 2, 2, 4, 1 | 4, 2, 2, 2 | 4, 4, 2, 3 | 3, 3, 6, 3 |
| 2, 2, 2, 2 | 3, 2, 3, 2 | 2, 4, 2, 4 | 4, 3, 4, 3 |
| 2, 4, 1, 2 | 2, 2, 2, 4 | 4, 2, 3, 4 | 3, 6, 3, 3 |
| $p = 73$ | $p = 89$ | $p = 97$ | |
| 5, 6, 4, 2 | 3, 8, 6, 4 | 2, 6, 7, 8 | |
| 6, 2, 5, 5 | 8, 4, 5, 5 | 6, 8, 5, 5 | |
| 4, 5, 4, 5 | 6, 5, 6, 5 | 7, 5, 7, 5 | |
| 2, 5, 5, 6 | 4, 5, 5, 8 | 8, 5, 5, 6 | |

Quum moduli formae $8n+1$ et $8n+5$ diverso modo se habeant, utrosque seorsim tractare oportet: a prioribus initium faciemus.

16.

Character (00) indicat, quot modis diversis aequationi $\alpha+1=\alpha'$ satisfieri possit, denotantibus $\alpha$, $\alpha'$ indefinite numeros e complexu $A$. Quum pro modulo formae $8n+1$, qualem hic subintelligimus, $\alpha'$ et $p-\alpha'$ ad eundem complexum pertineant, concinnius dicemus, (00) exprimere multitudinem modorum diversorum, aequationi $1+\alpha+\alpha'=p$, satisfaciendi: manifesto huius aequationis vice etiam congruentia $1+\alpha+\alpha'\equiv 0$ (mod. $p$) fungi potest.

Perinde

(01) indicat multitudinem solutionum congruentiae $1+\alpha+\beta\equiv 0$ (mod. $p$)
(02) multitudinem solutionum congruentiae $1+\alpha+\gamma\equiv 0$
(03) multitudinem solutionum congruentiae $1+\alpha+\delta\equiv 0$
(11) multitudinem solutionum congruentiae $1+\beta+\beta'\equiv 0$ etc.

exprimendo indefinite per $\beta$ et $\beta'$ numeros e complexu $B$, per $\gamma$ numeros e complexu $C$, per $\delta$ numeros e complexu $D$. Hinc statim colligimus sex aequationes sequentes:

$$(01)=(10),\quad (02)=(20),\quad (03)=(30),\quad (12)=(21),\quad (13)=(31),\quad (23)=(32)$$

E quavis solutione data congruentiae $1+\alpha+\beta\equiv 0$ demanat solutio congruentiae $1+\delta+\delta'\equiv 0$, accipiendo pro $\delta$ numerum inter limites $1\ldots.p-1$

eum qui reddit $\beta\delta \equiv 1$ (qui manifesto erit e complexu $D$), et pro $\delta'$ residuum minimum positivum producti $\alpha\delta$ (quod itidem erit e complexu $D$); perinde patet regressus a solutione data congruentiae $1+\delta+\delta' \equiv 0$ ad solutionem congruentiae $1+\alpha+\beta \equiv 0$, si $\beta$ accipitur ita, ut fiat $\beta\delta \equiv 1$, simulque statuitur $\alpha \equiv \beta\delta'$. Hinc concludimus, utramque congruentiam aequali solutionum multitudine gaudere, sive esse $(01) = (33)$.

Simili modo e congruentia $1+\alpha+\gamma \equiv 0$ deducimus $\gamma'+\gamma''+1 \equiv 0$, si $\gamma'$ accipitur e complexu $C$ ita ut fiat $\gamma\gamma' \equiv 1$, atque $\gamma''$ ex eodem complexu congruus producto $\alpha\gamma'$. Unde facile colligimus, has duas congruentias aequalem solutionum multitudinem admittere, sive esse $(02) = (22)$.

Perinde e congruentia $1+\alpha+\delta \equiv 0$ deducimus $\beta+\beta'+1 \equiv 0$, accipiendo $\beta$, $\beta'$ ita ut fiat $\beta\delta \equiv 1$, $\beta\alpha \equiv \beta'$, eritque adeo $(03) = (11)$.

Denique e congruentia $1+\beta+\gamma \equiv 0$ simili modo tum congruentiam $\delta+1+\beta' \equiv 0$, tum hanc $\gamma'+\delta'+1 \equiv 0$ derivamus, atque hinc concludimus $(12) = (13) = (23)$.

Nacti sumus itaque, inter sedecim incognitas nostras, undecim aequationes, ita ut illae ad quinque reducantur, schemaque $S$ ita exhiberi possit:

$$\begin{matrix} h, & i, & k, & l \\ i, & l, & m, & m \\ k, & m, & k, & m \\ l, & m, & m, & i \end{matrix}$$

Facile vero tres novae aequationes conditionales adiiciuntur. Quum enim quemvis numerum complexus $A$, excepto ultimo $p-1$, sequi debeat numerus ex aliquo complexuum $A$, $B$, $C$ vel $D$, habebimus

$$(00)+(01)+(02)+(03) = 2n-1$$

et perinde

$$(10)+(11)+(12)+(13) = 2n$$
$$(20)+(21)+(22)+(23) = 2n$$
$$(30)+(31)+(32)+(33) = 2n$$

In signis modo introductis tres primae aequationes suppeditant:

$$h+i+k+l = 2n-1$$
$$i+l+2m = 2n$$
$$k+m = n$$

Quarta cum secunda fit identica. Adiumento harum aequationum tres incognitarum eliminare licet, quo pacto omnes sedecim iam ad duas reductae sunt.

17.

Ut vero determinationem completam nanciscamur, investigare conveniet multitudinem solutionum congruentiae

$$1+\alpha+\beta+\gamma\equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

designantibus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ indefinite numeros e complexibus $A$, $B$, $C$. Manifesto valor $\alpha=p-1$ non est admissibilis, quum fieri nequeat $\beta+\gamma\equiv 0$: substituendo itaque pro $\alpha$ deinceps valores reliquos, prodibunt $h$, $i$, $k$, $l$ valores ipsius $1+\alpha$ ad $A$, $B$, $C$, $D$ resp. pertinentes. Pro quovis autem valore *dato* ipsius $1+\alpha$ ad $A$ pertinente, puta pro $1+\alpha=\alpha^0$, congruentia $\alpha^0+\beta+\gamma\equiv 0$ totidem solutiones admittet, quot congruentia $1+\beta'+\gamma'\equiv 0$ (statuendo scilicet $\beta\equiv\alpha^0\beta'$, $\gamma\equiv\alpha^0\gamma'$), i. e. solutiones $(12)=m$. Perinde pro quovis valore dato ipsius $1+\alpha$ ad $B$ pertinente, puta pro $1+\alpha=\beta^0$, congruentia $\beta^0+\beta+\gamma\equiv 0$ totidem solutiones habebit, quot haec $1+\alpha'+\beta'\equiv 0$ (scilicet statuendo $\beta\equiv\beta^0\alpha'$, $\gamma\equiv\beta^0\beta'$), i. e. solutiones $(01)=i$. Similiter pro quolibet valore dato ipsius $1+\alpha$ ad $C$ pertinente, puta pro $1+\alpha=\gamma^0$, congruentia $\gamma^0+\beta+\gamma\equiv 0$ totidem modis diversis solvi poterit, quot haec $1+\delta+\alpha'\equiv 0$ (nempe statuendo $\beta\equiv\gamma^0\delta$, $\gamma\equiv\gamma^0\alpha'$), i. e. solutionum multitudo erit $(03)=l$. Denique pro quovis valore dato ipsius $1+\alpha$ ad $D$ pertinente, puta pro $1+\alpha=\delta^0$, congruentia $\delta^0+\beta+\gamma\equiv 0$ totidem solutiones habebit, quot haec $1+\gamma'+\delta'\equiv 0$ (statuendo $\beta\equiv\delta^0\gamma'$, $\gamma\equiv\delta^0\delta'$), i. e. $(23)=m$ solutiones. Omnibus itaque collectis, patet, congruentiam $1+\alpha+\beta+\gamma\equiv 0$ admittere

$$hm+ii+kl+lm$$

solutiones diversas.

Prorsus vero simili modo eruimus, si pro $\beta$ singuli deinceps numeri complexus $B$ substituantur, summam $1+\beta$ obtinere resp. $(10)$, $(11)$, $(12)$, $(13)$ sive $i$, $l$, $m$, $m$ valores ad $A$, $B$, $C$, $D$ pertinentes, et pro quovis valore *dato* ipsius $1+\beta$ ad hos complexus pertinente, congruentiam $1+\beta+\alpha+\gamma\equiv 0$ resp. $(02)$, $(31)$, $(20)$, $(13)$ sive $k$, $m$, $k$, $m$ solutiones diversas admittere, ita ut multitudo omnium solutionum fiat

$$= ik + lm + km + mm$$

Ad eundem valorem perducimur, si evolutionem considerationi valorum summae $1 + \gamma$ superstruimus.

18.

Ex hac duplici eiusdem multitudinis expressione nanciscimur aequationem:

$$0 = hm + ii + kl - ik - km - mm$$

atque hinc, eliminando $h$ adiumento aequationis $h = 2m - k - 1$,

$$0 = (k - m)^2 + ii + kl - ik - kk - m$$

Sed duae aequationes ultimae art. 16 suppeditant $k = \frac{1}{2}(l + i)$, quo valore substituto $ii + kl - ik - kk$ transit in $\frac{1}{4}(l - i)^2$, adeoque aequatio praecedens, per 4 multiplicata, in hanc

$$0 = 4(k - m)^2 + (l - i)^2 - 4m$$

Hinc, quoniam $4m = 2(k + m) - 2(k - m) = 2n - 2(k - m)$, sequitur

$$2n = 4(k - m)^2 + 2(k - m) + (l - i)^2$$

sive

$$8n + 1 = (4(k - m) + 1)^2 + 4(l - i)^2$$

Statuendo itaque

$$4(k - m) + 1 = a, \quad 2l - 2i = b$$

habebimus

$$p = aa + bb$$

Sed constat, $p$ unico tantum modo in duo quadrata discerpi posse, quorum alterum impar accipi debet pro $aa$, alterum par pro $bb$, ita ut $aa$, $bb$ sint numeri ex asse determinati. Sed etiam $a$ ipse erit numerus prorsus determinatus; radix enim quadrati positive accipi debet, vel negative, prout radix positiva est formae $4M + 1$ vel $4M + 3$. De determinatione signi ipsius $b$ mox loquemur.

Iam combinatis his novis aequationibus cum tribus ultimis art. 16, quinque numeri $h$, $i$, $k$, $l$, $m$ per $a$, $b$ et $n$ penitus determinantur sequenti modo:

$$8h = 4n - 3a - 5$$
$$8i = 4n + a - 2b - 1$$
$$8k = 4n + a - 1$$
$$8l = 4n + a + 2b - 1$$
$$8m = 4n - a + 1$$

Si loco ipsius $n$ modulum $p$ introducere malumus, schema $S$, singulis terminis ad evitandas fractiones per 16 multiplicatis, ita se habet:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p-6a-11$ | $p+2a-4b-3$ | $p+2a-3$ | $p+2a+4b-3$ |
| $p+2a-4b-3$ | $p+2a+4b-3$ | $p-2a+1$ | $p-2a+1$ |
| $p+2a-3$ | $p-2a+1$ | $p+2a-3$ | $p-2a+1$ |
| $p+2a+4b-3$ | $p-2a+1$ | $p-2a+1$ | $p+2a-4b-3$ |

## 19.

Superest, ut signum ipsi $b$ tribuendum assignare doceamus. Iam supra, art. 10, monuimus, distinctionem inter complexus $B$ et $D$, per se non essentialem, ab electione numeri $f$ pendere, pro quo alterutra radix congruentiae $xx \equiv -1$ accipi debet, illasque inter se permutari, si loco alterius radicis altera adoptetur. Iam quum inspectio schematis modo allati doceat, similem permutationem cum mutatione signi ipsius $b$ cohaerere, praevidere licet, nexum inter signum ipsius $b$ atque numerum $f$ exstare debere. Quem ut cognoscamus, ante omnia observamus, si, denotante $\mu$ integrum non negativum, pro $z$ accipiantur omnes numeri $1, 2, 3 \ldots . p-1$, fieri secundum modulum $p$, vel $\Sigma z^\mu \equiv 0$, vel $\Sigma z^\mu \equiv -1$, prout $\mu$ vel non-divisibilis sit per $p-1$, vel divisibilis. Pars posterior theorematis inde patet, quod pro valore ipsius $\mu$ per $p-1$ divisibili, habetur $z^\mu \equiv 1$: partem priorem vero ita demonstramus. Denotante $g$ radicem primitivam, omnes $z$ convenient cum residuis minimis omnium $g^y$, accipiendo pro $y$ omnes numeros $0, 1, 2, 3 \ldots . p-2$, eritque adeo $\Sigma z^\mu \equiv \Sigma g^{\mu y}$. Sed fit

$$\Sigma g^{\mu y} = \frac{g^{\mu(p-1)}-1}{g^\mu - 1}, \quad \text{adeoque} \quad (g^\mu - 1)\Sigma z^\mu \equiv g^{\mu(p-1)} - 1 \equiv 0$$

Hinc vero sequitur, quoniam pro valore ipsius $\mu$ per $p-1$ non-divisibili $g^\mu$ ipsi 1 congruus sive $g^\mu - 1$ per $p$ divisibilis esse nequit, $\Sigma z^\mu \equiv 0$. Q. E. D.

Iam si potestas $(z^4+1)^{\frac{1}{4}(p-1)}$ secundum theorema binomiale evolvitur, per lemma praec. fiet

$$\Sigma(z^4+1)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv -2 \text{ (mod. } p)$$

Sed residua minima omnium $z^4$ exhibent omnes numeros $A$, quovis quater occurrente; habebimus itaque inter residua minima ipsius $z^4+1$

$$\begin{array}{l} 4(00) \text{ ad } A \\ 4(01) \text{ ad } B \\ 4(02) \text{ ad } C \\ 4(03) \text{ ad } D \end{array}$$

pertinentia, quatuorque erunt $=0$ (puta pro $z^4 \equiv p-1$). Hinc, considerando criteria complexuum $A, B, C, D$, deducimus

$$\Sigma(z^4+1)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv 4(00)+4f(01)-4(02)-4f(03)$$

adeoque

$$-2 \equiv 4(00)+4f(01)-4(02)-4f(03)$$

sive substitutis pro (00), (01) etc. valoribus in art. praec. inventis,

$$-2 \equiv -2a-2-2bf$$

Hinc itaque colligimus, semper fieri debere $a+bf \equiv 0$, sive, multiplicando per $f$,

$$b \equiv af$$

quae congruentia determinationi signi ipsius $b$, si numerus $f$ iam electus est, vel determinationi numeri $f$, si signum ipsius $b$ aliunde praescribitur, inservit.

20.

Postquam problema nostrum pro modulis formae $8n+1$ complete solvimus, progredimur ad casum alterum, ubi $p$ est formae $8n+5$: quem eo brevius absolvere licebit, quod omnia ratiocinia parum a praecedentibus differunt.

Quum pro tali modulo $-1$ ad classem $C$ pertineat, complementa numerorum complexuum $A, B, C, D$ ad summam $p$, in classibus $C, D, A, B$ resp. contenta erunt. Hinc facile colligitur

| signum | denotare multitudinem solutionum congruentiae |
|---|---|
| (00) | $1+\alpha+\gamma\equiv 0$ |
| (01) | $1+\alpha+\delta\equiv 0$ |
| (02) | $1+\alpha+\alpha'\equiv 0$ |
| (03) | $1+\alpha+\beta\equiv 0$ |
| (10) | $1+\beta+\gamma\equiv 0$ |
| (11) | $1+\beta+\delta\equiv 0$ |
| (12) | $1+\beta+\alpha\equiv 0$ |
| (13) | $1+\beta+\beta'\equiv 0$ |
| (20) | $1+\gamma+\gamma'\equiv 0$ |
| (21) | $1+\gamma+\delta\equiv 0$ |
| (22) | $1+\gamma+\alpha\equiv 0$ |
| (23) | $1+\gamma+\beta\equiv 0$ |
| (30) | $1+\delta+\gamma\equiv 0$ |
| (31) | $1+\delta+\delta'\equiv 0$ |
| (32) | $1+\delta+\alpha\equiv 0$ |
| (33) | $1+\delta+\beta\equiv 0$ |

unde statim habentur sex aequationes:

$$(00)=(22),\ (01)=(32),\ (03)=(12),\ (10)=(23),\ (11)=(33),\ (21)=(30)$$

Multiplicando congruentiam $1+\alpha+\gamma\equiv 0$ per numerum $\gamma'$ e complexu $C$ ita electum, ut fiat $\gamma\gamma'\equiv 1$, accipiendoque pro $\gamma''$ residuum minimum producti $\alpha\gamma'$, quod manifesto quoque complexui $C$ adnumerandum erit, prodit $\gamma'+\gamma''+1\equiv 0$, unde colligimus $(00)=(20)$.

Prorsus simili modo habentur aequationes $(01)=(13)$, $(03)=(31)$, $(10)=(11)=(21)$.

Adiumento harum undecim aequationum sedecim incognitas nostras ad quinque reducere, schemaque $S$ ita exhibere possumus:

$$\begin{matrix} h, & i, & k, & l \\ m, & m, & l, & i \\ h, & m, & h, & m \\ m, & l, & i, & m \end{matrix}$$

Porro habemus aequationes

$$(00)+(01)+(02)+(03) = 2n+1$$
$$(10)+(11)+(12)+(13) = 2n+1$$
$$(20)+(21)+(22)+(23) = 2n$$
$$(30)+(31)+(32)+(33) = 2n+1$$

sive, adhibendo signa modo introducta, has tres (I):

$$h+i+k+l = 2n+1$$
$$2m+i+l = 2n+1$$
$$h+m = n$$

quarum itaque adiumento incognitas nostras iam ad duas reducere licet.

Aequationes reliquas e consideratione multitudinis solutionum congruentiae $1+\alpha+\beta+\gamma \equiv 0$ derivabimus (per $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etiam hic indefinite numeros e complexibus $A$, $B$, $C$ resp. denotantes). Scilicet perpendendo *primo*, $1+\alpha$ praebere $h$, $i$, $k$, $l$ numeros resp. ad $A$, $B$, $C$, $D$ pertinentes, et pro quovis valore dato ipsius $\alpha$ in his quatuor casibus resp. haberi solutiones $m$, $l$, $i$, $m$, multitudo omnium solutionum erit

$$= hm+il+ik+lm$$

*Secundo* quum $1+\beta$ exhibeat $m$, $m$, $l$, $i$ numeros ad $A$, $B$, $C$, $D$ pertinentes, et pro quovis valore *dato* ipsius $\beta$ in his quatuor casibus exstent solutiones $h$, $m$, $h$, $m$, multitudo omnium solutionum erit

$$= hm+mm+hl+im$$

unde derivamus aequationem

$$0 = mm+hl+im-il-ik-lm$$

quae adiumento aequationis $k = 2m-h$, ex (I) petitae, transit in hanc:

$$0 = mm+hl+hi-il-im-lm$$

Iam ex aequationibus I habemus etiam $l+i = 1+2h$, unde

$$2i = 1+2h+(i-l)$$
$$2l = 1+2h-(i-l)$$

Quibus valoribus in aequatione praecedente substitutis, prodit:

$$0 = 4mm - 4m - 1 - 8hm + 4hh + (i - l)^2$$

Quodsi tandem pro $4m$ hic substituimus $2(h + m) - 2(h - m)$ sive, propter aequationem ultimam in I, $2n - 2(h - m)$, obtinemus:

$$0 = 4(h - m)^2 - 2n + 2(h - m) - 1 + (i - l)^2$$

adeoque

$$8n + 5 = (4(h - m) + 1)^2 + 4(i - l)^2$$

Statuendo itaque

$$4(h - m) + 1 = a, \quad 2i - 2l = b$$

fiet

$$p = aa + bb$$

Iam quum in hoc quoque casu $p$ unico tantum modo in duo quadrata, par alterum, alterum impar, discerpi possit, $aa$ et $bb$ erunt numeri prorsus determinati; manifesto enim $aa$ quadrato impari, $bb$ pari aequalis statui debet. Praeterea *signum* ipsius $a$ ita erit stabiliendum, ut fiat $a \equiv 1$ (mod. 4), signumque ipsius $b$ ita, ut habeatur $b \equiv af$ (mod. $p$), uti per ratiocinia iis, quibus in art. praec. usi sumus, prorsus similia facile demonstratur.

His praemissis quinque numeri $h, i, k, l, m$ per $a, b$ et $n$ ita determinantur:

$$\begin{aligned} 8h &= 4n + a - 1 \\ 8i &= 4n + a + 2b + 3 \\ 8k &= 4n - 3a + 3 \\ 8l &= 4n + a - 2b + 3 \\ 8m &= 4n - a + 1 \end{aligned}$$

aut si expressiones per $p$ praeferimus, termini schematis $S$ per 16 multiplicati ita se habebunt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p + 2a - 7$ | $p + 2a + 4b + 1$ | $p - 6a + 1$ | $p + 2a - 4b + 1$ |
| $p - 2a - 3$ | $p - 2a - 3$ | $p + 2a - 4b + 1$ | $p + 2a + 4b + 1$ |
| $p + 2a - 7$ | $p - 2a - 3$ | $p + 2a - 7$ | $p - 2a - 3$ |
| $p - 2a - 3$ | $p + 2a - 4b + 1$ | $p + 2a + 4b + 1$ | $p - 2a - 3$ |

21.

Postquam problema nostrum solvimus, ad disquisitionem principalem revertimur, determinationem completam complexus, ad quem numerus 2 pertinet, iam aggressuri.

I. Quoties $p$ est formae $8n+1$, iam constat, numerum 2 vel in complexu $A$ vel in complexu $C$ inveniri. In casu priori facile perspicitur, etiam numeros $\frac{1}{2}(p-1)$, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad $A$ pertinere, in posteriori vero ad $C$. Iam perpendamus, si $\alpha$ et $\alpha+1$ sint numeri contigui complexus $A$, etiam $p-\alpha-1$, $p-\alpha$ tales numeros esse, sive, quod idem est, numeros complexus $A$ tales, quos sequatur numerus ex eodem complexu, binos semper associatos esse, ($\alpha$ et $p-1-\alpha$). Talium itaque numerorum multitudo, (00), semper erit par, nisi quis exstat sibi ipse associatus, i. e. nisi $\frac{1}{2}(p-1)$ ad $A$ pertinet, in quo casu multitudo illa impar erit. Hinc colligimus, (00) imparem esse, quoties 2 ad complexum $A$, parem vero, quoties 2 ad $C$ pertineat. Sed habemus

$$16(00) = aa+bb-6a-11$$

sive statuendo $a = 4q+1$, $b = 4r$ (v. art. 14),

$$(00) = qq-q+rr-1$$

Quoniam igitur $qq-q$ manifesto semper par est, (00) impar erit vel par, prout $r$ par est vel impar, adeoque 2 vel ad $A$ vel ad $C$ pertinebit, prout $b$ est vel formae $8m$ vel formae $8m+4$. Quod est ipsum theorema, in art. 14 per inductionem inventum.

II. Sed etiam casum alterum, ubi $p$ est formae $8n+5$, aeque complete absolvere licet. Numerus 2 hic vel ad $B$, vel ad $D$ pertinet, perspiciturque facile, in casu priori $\frac{1}{2}(p-1)$ ad $B$, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad $D$, in casu posteriori autem $\frac{1}{2}(p-1)$ ad $D$, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad $B$ pertinere. Iam perpendamus, si $\beta$ sit numerus ex $B$ talis, quem sequatur numerus ex $D$, fore etiam numerum $p-\beta-1$ ex $B$ atque $p-\beta$ ex $D$, i. e. numeros illius proprietatis binos associatos semper adesse. Erit itaque illorum multitudo, (13), par, excepto casu, in quo unus eorum sibi ipse associatus est, i. e. ubi $\frac{1}{2}(p-1)$ ad $B$, $\frac{1}{2}(p+1)$ ad $D$ pertinet; tunc scilicet (13) impar erit. Hinc colligimus, (13) parem esse, quoties 2 ad $D$, imparem vero, quoties 2 ad $B$ pertineat. Sed habemus

$$16(13) = aa+bb+2a+4b+1$$

sive statuendo $a = 4q+1$, $b = 4r+2$,

$$(13) = qq+q+rr+2r+1$$

Erit itaque (13) impar, quoties $r$ par est; contra (13) par erit, quoties $r$ est impar: unde colligimus, 2 pertinere ad $B$, quoties $b$ sit formae $8m+2$, ad $D$ vero, quoties $b$ sit formae $8m+6$.

Summa harum investigationum ita enunciari potest:

*Numerus* 2 *pertinet ad complexum* $A$, $B$, $C$, *vel* $D$, *prout numerus* $\frac{1}{4}b$ *est formae* $4m$, $4m+1$, $4m+2$ *vel* $4m+3$.

22.

In *Disquisitionibus Arithmeticis* theoriam generalem divisionis circuli, atque solutionis aequationis $x^p-1=0$ explicavimus, interque alia docuimus, si $\mu$ sit divisor numeri $p-1$, functionem $\frac{x^p-1}{x-1}$ in $\mu$ factores ordinis $\frac{p-1}{\mu}$ resolvi posse adiumento aequationis auxiliaris ordinis $\mu$. Praeter theoriam generalem huius resolutionis simul casus speciales, ubi $\mu=2$ vel $\mu=3$, in illo opere artt. 356—358 seorsim consideravimus, aequationemque auxiliarem a priori assignare docuimus, i. e. absque evolutione schematis residuorum minimorum potestatum alicuius radicis primitivae pro modulo $p$. Iam vel nobis non monentibus lectores attenti facile percipient nexum arctissimum casus proximi istius theoriae, puta pro $\mu=4$, cum investigationibus hic in artt. 15—20 explicatis, quarum adiumento ille quoque sine difficultate complete absolvi poterit. Sed hanc tractationem ad aliam occasionem nobis reservamus, ideoque etiam in commentatione praesente disquisitionem in forma pure arithmetica perficere maluimus, theoria aequationis $x^p-1=0$ nullo modo immixta. Contra coronidis loco adhuc quaedam alia theoremata nova pure arithmetica, cum argumento hactenus pertractato arctissime coniuncta, adiiciemus.

23.

Si potestas $(x^4+1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$ secundum theorema binomiale evolvitur, tres termini aderunt, in quibus exponens ipsius $x$ per $p-1$ divisibilis est, puta

$$x^{2(p-1)},\quad Px^{p-1}\quad \text{atque}\quad 1$$

denotando per $P$ coëfficientem medium

$$\frac{\frac{1}{2}(p-1)\,.\,\frac{1}{2}(p-3)\,.\,\frac{1}{2}(p-5)\ldots\frac{1}{4}(p+3)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\frac{1}{4}(p-1)}$$

Substituendo itaque pro $x$ deinceps numeros $1, 2, 3 \ldots p-1$, obtinebimus per lemma art. 19

$$\Sigma(x^4+1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -2-P$$

At perpendendo ea quae in art. 19 exposuimus, insuperque, quod numeri complexuum $A, B, C, D$, ad potestatem exponentis $\frac{1}{4}(p-1)$ evecti congrui sunt, secundum modulum $p$, numeris $+1, -1, +1, -1$ resp., facile intelligitur fieri

$$\Sigma(x^4+1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 4(00)-4(01)+4(02)-4(03)$$

adeoque per schemata in fine artt. 19, 20 tradita

$$\Sigma(x^4+1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -2a-2$$

Comparatio horum duorum valorum suppeditat elegantissimum theorema: scilicet habemus

$$P \equiv 2a \pmod{p}$$

Denotando quatuor producta

$$\begin{array}{l} 1\,.\,2\,.\,3\ldots\frac{1}{4}(p-1) \\ \frac{1}{4}(p+3)\,.\,\frac{1}{4}(p+7)\,.\,\frac{1}{4}(p+11)\ldots\frac{1}{2}(p-1) \\ \frac{1}{2}(p+1)\,.\,\frac{1}{2}(p+3)\,.\,\frac{1}{2}(p+5)\ldots\frac{3}{4}(p-1)\,. \\ \frac{1}{4}(3p+1)\,.\,\frac{1}{4}(3p+5)\,.\,\frac{1}{4}(3p+9)\ldots(p-1)\,. \end{array}$$

resp. per $q, r, s, t$, theorema praecedens ita exhibetur:

$$2a \equiv \frac{r}{q} \pmod{p}$$

Quum quilibet factorum ipsius $q$ complementum suum ad $p$ habeat in $t$, erit $q \equiv t \pmod{p}$, quoties multitudo factorum par est, i. e. quoties $p$ est formae $8n+1$, contra $q \equiv -t$, quoties multitudo factorum impar est, sive $p$ formae $8n+5$. Perinde in casu priori erit $r \equiv s$, in posteriori $r \equiv -s$. In utroque casu erit $qr \equiv st$, et quum constet, haberi $qrst \equiv -1$, erit $qqrr \equiv -1$,

adeoque $qr \equiv \pm f$ (mod. $p$). Combinando hanc congruentiam cum theoremate modo invento obtinemus $rr \equiv \pm 2af$, et proin, per artt. 19, 20

$$2b \equiv \pm rr \text{ (mod. } p)^{*})$$

Valde memorabile est, discerptionem numeri $p$ in duo quadrata per operationes prorsus directas inveniri posse; scilicet radix quadrati imparis erit residuum absolute minimum ipsius $\frac{r}{2q}$, radix quadrati paris vero residuum absolute minimum ipsius $\frac{1}{2}rr$ secundum modulum $p$. Expressionem $\frac{r}{2q}$, cuius valor pro $p = 5$ fit $= 1$, pro valoribus maioribus ipsius $p$, ita quoque exhibere licet:

$$\frac{6 \,.\, 10 \,.\, 14 \,.\, 18 \ldots\ldots (p-3)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots\ldots \frac{1}{4}(p-1)}$$

Sed quum insuper noverimus, quonam signo affecta prodeat ex hac formula radix quadrati imparis, eo scilicet, ut semper fiat formae $4m+1$, attentione perdignum est, quod simile criterium generale respectu signi radicis quadrati paris hactenus inveniri non potuerit. Quale si quis inveniat, et nobiscum communicet, magnam de nobis gratiam feret. Interim hic adiungere visum est valores numerorum $a, b, f$, quales pro valoribus ipsius $p$ infra 200 e residuis minimis expressionum $\frac{r}{2q}$, $\frac{1}{2}rr$, $qr$ prodeunt.

*) atque $\{(a \mp b)q\}^2 \equiv a \equiv \left(\frac{r - qrr}{2}\right)^2$

| $p$ | $a$ | $b$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 5 | + 1 | + 2 | 2 |
| 13 | − 3 | − 2 | 5 |
| 17 | + 1 | − 4 | 13 |
| 29 | + 5 | + 2 | 12 |
| 37 | + 1 | − 6 | 31 |
| 41 | + 5 | + 4 | 9 |
| 53 | − 7 | − 2 | 23 |
| 61 | + 5 | − 6 | 11 |
| 73 | − 3 | − 8 | 27 |
| 89 | + 5 | − 8 | 34 |
| 97 | + 9 | + 4 | 22 |
| 101 | + 1 | −10 | 91 |
| 109 | − 3 | +10 | 33 |
| 113 | − 7 | + 8 | 15 |
| 137 | −11 | + 4 | 37 |
| 149 | − 7 | −10 | 44 |
| 157 | −11 | − 6 | 129 |
| 173 | +13 | + 2 | 80 |
| 181 | + 9 | +10 | 162 |
| 193 | − 7 | +12 | 81 |
| 197 | + 1 | −14 | 183 |

# THEORIA

# RESIDUORUM BIQUADRATICORUM

## COMMENTATIO SECUNDA

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE TRADITA 1831. APR. 15.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VII.
Gottingae MDCCCXXXII.

# THEORIA RESIDUORUM BIQUADRATICORUM.

## COMMENTATIO SECUNDA.

---

### 24.

In commentatione prima ea, quae ad classificationem biquadraticam numeri $+2$ requiruntur, complete absoluta sunt. Dum scilicet omnes numeros per modulum $p$ (qui supponitur essse numerus primus formae $4n+1$) non divisibiles inter quatuor complexus $A, B, C, D$ distributos concipimus, prout singuli ad potestatem exponentis $\frac{1}{4}(p-1)$ evecti congrui fiunt secundum modulum $p$ ipsi $+1, +f, -1, -f$, denotante $f$ radicem alterutram congruentiae $ff\equiv-1$ (mod. $p$): invenimus, diiudicationem, cuinam complexui adnumerandus sit numerus $+2$, pendere a discerptione numeri $p$ in duo quadrata, ita quidem, ut si statuatur $p=aa+bb$, denotante $aa$ quadratum impar, $bb$ quadratum par, si porro *signa* ipsorum $a, b$ ita accepta supponantur, ut habeatur $a\equiv1$ (mod. 4), $b\equiv af$ (mod. $p$), numerus $+2$ ad complexum $A, B, C, D$ pertinere debeat, prout $\frac{1}{2}b$ sit formae $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ resp.

Sponte quoque hinc demanat regula classificationi numeri $-2$ inserviens. Scilicet quum $-1$ pertineat ad classem $A$ pro valore pari ipsius $\frac{1}{2}b$, ad classem $C$ vero pro impari: pertinebit, per theorema art. 7, numerus $-2$ ad classem $A, B, C, D$, prout $\frac{1}{2}b$ est formae $4n$, $4n+3$, $4n+2$, $4n+1$ resp.

Haec theoremata etiam sequenti modo exprimi possunt:

| Pertinet | $+2$ | $-2$ |
|---|---|---|
| ad complexum | si $b$, secundum modulum 8, fit congruus ipsi | |
| $A$ | 0 | 0 |
| $B$ | $2a$ | $6a$ |
| $C$ | $4a$ | $4a$ |
| $D$ | $6a$ | $2a$ |

Facile intelligitur, theoremata sic enunciata haud amplius pendere a conditione $a \equiv 1$ (mod. 4), sed etiamnum valere, si fuerit $a \equiv 3$ (mod. 4), dummodo conditio altera, $af \equiv b$ (mod. $p$), conservetur.

Aeque facile perspicitur, summam horum theorematum eleganter contrahi posse in formulam unicam, puta:

*si $a$ et $b$ positive accipiuntur, semper fit*

$$b^{\frac{1}{2}ab} \equiv a^{\frac{1}{2}ab}\, 2^{\frac{1}{4}(p-1)} \text{ (mod. } p)$$

25.

Videamus nunc, quatenus inductio classificationem numeri 3 indigitet. Tabula art. 11 ulterius continuata (semper adoptata radice primitiva minima), monstrat, $+3$ pertinere

ad complexum

| $A$ pro $p$ | $a$ | $b$ | $B$ pro $p$ | $a$ | $b$ | $C$ pro $p$ | $a$ | $b$ | $D$ pro $p$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | $-3$ | $+2$ | 17 | $+1$ | $-4$ | 37 | $+1$ | $-6$ | 5 | $+1$ | $+2$ |
| 109 | $-3$ | $+10$ | 29 | $+5$ | $+2$ | 61 | $+5$ | $-6$ | 41 | $+5$ | $-4$ |
| 181 | $+9$ | $+10$ | 53 | $-7$ | $+2$ | 73 | $-3$ | $-8$ | 149 | $-7$ | $+10$ |
| 193 | $-7$ | $-12$ | 89 | $+5$ | $-8$ | 97 | $+9$ | $+4$ | 173 | $+13$ | $+2$ |
| 229 | $-15$ | $+2$ | 101 | $+1$ | $+10$ | 157 | $-11$ | $-6$ | | | |
| 277 | $+9$ | $+14$ | 113 | $-7$ | $-8$ | 241 | $-15$ | $-4$ | | | |
| | | | 137 | $-11$ | $-4$ | | | | | | |
| | | | 197 | $+1$ | $-14$ | | | | | | |
| | | | 233 | $+13$ | $+8$ | | | | | | |
| | | | 257 | $+1$ | $-16$ | | | | | | |
| | | | 269 | $+13$ | $+10$ | | | | | | |
| | | | 281 | $+5$ | $+16$ | | | | | | |
| | | | 293 | $+17$ | $+2$ | | | | | | |

Primo saltem aspectu nexum simplicem inter valores numerorum $a$, $b$, quibus idem complexus respondet, non animadvertimus. At si perpendimus, diiudicationem similem in theoria residuorum quadraticorum per regulam simpliciorem absolvi respectu numeri $-3$, quam respectu numeri $+3$, spes affulget successus aeque secundi in theoria residuorum biquadraticorum. Invenimus autem, $-3$ pertinere ad complexum

| *A* pro | | | *B* pro | | | *C* pro | | | *D* pro | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ | $p$ | $a$ | $b$ |
| 37 | $+1$ | $-6$ | 5 | $+1$ | $+2$ | 13 | $-3$ | $+2$ | 29 | $+5$ | $+2$ |
| 61 | $+5$ | $-6$ | 17 | $+1$ | $-4$ | 73 | $-3$ | $-8$ | 41 | $+5$ | $-4$ |
| 157 | $-11$ | $-6$ | 89 | $+5$ | $-8$ | 97 | $+9$ | $+4$ | 53 | $-7$ | $+2$ |
| 193 | $-7$ | $-12$ | 113 | $-7$ | $-8$ | 109 | $-3$ | $+10$ | 101 | $+1$ | $+10$ |
| | | | 137 | $-11$ | $-4$ | 181 | $+9$ | $+10$ | 197 | $+1$ | $-14$ |
| | | | 149 | $-7$ | $+10$ | 229 | $-15$ | $+2$ | 269 | $+13$ | $+10$ |
| | | | 173 | $+13$ | $+2$ | 241 | $-15$ | $-4$ | 293 | $+17$ | $+2$ |
| | | | 233 | $+13$ | $+8$ | 277 | $+9$ | $+14$ | | | |
| | | | 257 | $+1$ | $-16$ | | | | | | |
| | | | 281 | $+5$ | $+16$ | | | | | | |

ubi lex inductionis sponte se offert. Scilicet pertinet $-3$ ad complexum

*A*, quoties $b$ per 3 divisibilis est, sive $b \equiv 0 \pmod{3}$
*B*, quoties $a+b$ per 3 est divisibilis, sive $b \equiv 2a \pmod{3}$
*C*, quoties $a$ per 3 est divisibilis, sive $a \equiv 0 \pmod{3}$
*D*, quoties $a-b$ per 3 divisibilis est, sive $b \equiv a \pmod{3}$

## 26.

Numerum $+5$ adscribendum invenimus complexui

*A* pro $p = 101, 109, 149, 181, 269$
*B* pro $p = 13, 17, 73, 97, 157, 193, 197, 233, 277, 293$
*C* pro $p = 29, 41, 61, 89, 229, 241, 281$
*D* pro $p = 37, 53, 113, 137, 173, 257$

In considerationem vocatis valoribus numerorum $a$, $b$ singulis $p$ respondentibus, lex hic aeque facile, ut pro classificatione numeri $-3$, prehenditur. Scilicet incidimus in complexum

| | |
|---|---|
| *A*, quoties | $b \equiv 0 \pmod{5}$ |
| *B*, quoties | $b \equiv a$ |
| *C*, quoties | $a \equiv 0$ |
| *D*, quoties | $b \equiv 4a$ |

Manifestum est, has regulas complecti casus omnes, quum pro $b \equiv 2a$, vel $b \equiv 3a \pmod{5}$, fieret $aa + bb \equiv 0$, Q.E.A., quum per hypothesin $p$ sit numerus primus a 5 diversus.

27.

Perinde inductio ad numeros $-7$, $-11$, $+13$, $+17$, $-19$, $-23$ applicata satisque producta sequentes regulas indigitat:

Pro numero $-7$.

| | |
|---|---|
| *A* | $a \equiv 0$, vel $b \equiv 0 \pmod{7}$ |
| *B* | $b \equiv 4a$, vel $b \equiv 5a$ |
| *C* | $b \equiv a$, vel $b \equiv 6a$ |
| *D* | $b \equiv 2a$, vel $b \equiv 3a$ |

Pro numero $-11$.

| | |
|---|---|
| *A* | $b \equiv 0,\ 5a$, vel $6a \pmod{11}$ |
| *B* | $b \equiv a,\ 3a$ vel $4a$ |
| *C* | $a \equiv 0$, vel $b \equiv 2a$ vel $9a$ |
| *D* | $b \equiv 7a,\ 8a$ vel $10a$ |

Pro numero $+13$.

| | |
|---|---|
| *A* | $b \equiv 0,\ 4a,\ 9a \pmod{13}$ |
| *B* | $b \equiv 6a,\ 11a,\ 12a$ |
| *C* | $a \equiv 0$; $b \equiv 3a,\ 10a$ |
| *D* | $b \equiv a,\ 2a,\ 7a$ |

Pro numero $+17$.

| | |
|---|---|
| *A* | $a \equiv 0$; $b \equiv 0,\ a,\ 16a \pmod{17}$ |
| *B* | $b \equiv 2a,\ 6a,\ 8a,\ 14a$ |
| *C* | $b \equiv 5a,\ 7a,\ 10a,\ 12a$ |
| *D* | $b \equiv 3a,\ 9a,\ 11a,\ 15a$ |

Pro numero $-19$.

| | |
|---|---|
| $A$ | $b \equiv 0,\ 2a,\ 5a,\ 14a,\ 17a \pmod{19}$ |
| $B$ | $b \equiv 3a,\ 7a,\ 11a,\ 13a,\ 18a$ |
| $C$ | $a \equiv 0;\ b \equiv 4a,\ 9a,\ 10a,\ 15a$ |
| $D$ | $b \equiv a,\ 6a,\ 8a,\ 12a,\ 16a$ |

Pro numero $-23$.

| | |
|---|---|
| $A$ | $a \equiv 0;\ b \equiv 0,\ 7a,\ 10a,\ 13a,\ 16a \pmod{23}$ |
| $B$ | $b \equiv 2a,\ 3a,\ 4a,\ 11a,\ 15a,\ 17a$ |
| $C$ | $b \equiv a,\ 5a,\ 9a,\ 14a,\ 18a,\ 22a$ |
| $D$ | $b \equiv 6a,\ 8a,\ 12a,\ 19a,\ 20a,\ 21a$ |

28.

Theoremata specialia hoc modo per inductionem eruta confirmari inveniuntur, quousque haec continuetur, formamque criteriorum pulcherrimam manifestant. Si vero inter se conferuntur, ut conclusiones generales inde petantur, primo statim aspectu se offerunt observationes sequentes.

Criteria diiudicationis, ad quemnam complexum referendus sit numerus primus $\pm q$ (sumendo signum superius vel inferius, prout $q$ est formae $4n+1$ vel $4n+3$), pendent a formis numerorum $a$, $b$ inter se collatorum respectu moduli $q$. Scilicet

I. quoties $a \equiv 0 \pmod{q}$, $\pm q$ pertinet ad complexum determinatum, qui est $A$ pro $q = 7,\ 17,\ 23$, nec non $C$ pro $q = 3,\ 11,\ 13,\ 19$, unde coniectura oritur, casum priorem generaliter valere, quoties $q$ sit formae $8n\pm 1$, posteriorem vero, quoties $q$ sit formae $8n\pm 3$. Ceterum complexus $B$ et $D$ iam absque inductione excluduntur pro valore ipsius $a$ per $q$ divisibili, ubi fit $p \equiv bb \pmod{q}$, i. e. ubi $p$ est residuum quadraticum ipsius $q$, unde per theorema fundamentale $\pm q$ esse debet residuum quadraticum ipsius $p$.

II. Quoties autem $a$ per $q$ non est divisibilis, criterium pendet a valore expressionis $\frac{b}{a} \pmod{q}$. Admittit quidem haec expressio $q$ valores diversos, puta $0, 1, 2, 3 \ldots q-1$: sed quoties $q$ est formae $4n+1$, excludendi sunt bini valo-

res expressionis $\sqrt{-1}$ (mod. $q$), qui manifesto nequeunt esse valores expressionis $\frac{b}{a}$ (mod. $q$), quum $p = aa + bb$ semper supponatur esse numerus primus a $q$ diversus. Quapropter multitudo valorum admissibilium expressionis $\frac{b}{a}$ (mod. $q$) est $= q - 2$, pro $q \equiv 1$ (mod. 4), dum manet $= q$ pro $q \equiv 3$ (mod. 4).

Iam hi valores in quaternas classes distribuuntur, puta, ut quidam, indefinite per $\alpha$ denotandi, respondeant complexui $A$; alii per $\mathfrak{G}$ denotandi complexui $B$; alii $\gamma$ complexui $C$; denique reliqui $\delta$ complexui $D$, ita scilicet, ut $\pm q$ complexui $A, B, C, D$ adscribendus sit, prout habeatur $b \equiv \alpha a$, $b \equiv \mathfrak{G} a$, $b \equiv \gamma a$, $c \equiv \delta a$ (mod. $q$).

At *lex* huius distributionis abstrusior videtur, etiamsi quaedam generalia promte animadvertantur. Multitudo in ternis classibus eadem reperitur, puta $= \frac{1}{4}(q-1)$ vel $\frac{1}{4}(q+1)$, dum in una (et quidem in eadem, quae respondet complexui cum criterio $a \equiv 0$) unitate minor est, ita ut multitudo omnium criteriorum diversorum respectu singulorum complexuum fiat eadem, puta $= \frac{1}{4}(q-1)$ vel $\frac{1}{4}(q+1)$. Porro animadvertimus, 0 semper in prima classe (inter $\alpha$) reperiri, nec non complementa numerorum $\alpha, \mathfrak{G}, \gamma, \delta$ ad $q$, puta $q-\alpha$, $q-\mathfrak{G}$, $q-\gamma$, $q-\delta$ resp. in classe prima, quarta, tertia, secunda. Denique valores expressionum $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\mathfrak{G}}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ (mod. $q$) pertinere videmus ad classem primam, quartam, tertiam, secundam, quoties criterium $a \equiv 0$ respondet complexui $A$; ad classem tertiam, secundam, primam, quartam resp. autem, quoties criterium $a \equiv 0$ refertur ad complexum $C$. Sed ad haec fere limitantur, quae per inductionem assequi licet, nisi audacius ea, quae infra e fontibus genuinis haurientur, anticipare nobis arrogemus.

## 29.

Antequam ulterius progrediamur, observare convenit, criteria pro numeris primis (positive sumtis, si sunt formae $4n+1$, negative, si formae $4n+3$) sufficere ad diiudicationem pro omnibus reliquis numeris, si modo theorema art. 7, atque criteria pro $-1$ et $\pm 2$ in subsidium vocentur. Ita e. g. si desiderantur criteria pro numero $+3$, criteria in art. 25 prolata, quae referuntur ad $-3$, etiamnum pro $+3$ valebunt, quoties $\frac{1}{2}b$ est numerus par: contra complexus $A, B, C, D$ cum complexibus $C, D, A, B$ permutandi erunt, quoties $\frac{1}{2}b$ est impar, unde sequuntur praecepta haecce:

$+3$ pertinet

| ad complexum | si |
|---|---|
| $A$ | $b \equiv 0$ (mod. 12); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 2$ (mod. 4) |
| $B$ | $b \equiv 8a$ vel $10a$ (mod. 12) |
| $C$ | $b \equiv 6a$ (mod. 12); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 0$ (mod. 4) |
| $D$ | $b \equiv 2a$ vel $4a$ (mod. 12) |

Perinde criteria pro $\pm 6$ petuntur e combinatione criteriorum pro $\mp 2$ et $-3$; scilicet

$+6$ pertinet

| ad complexum | si |
|---|---|
| $A$ | $b \equiv 0, \; 2a, \; 22a$ (mod. 24); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 4a$ (mod. 8) |
| $B$ | $b \equiv 4a, \; 6a, \; 8a$ (mod. 24); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 2a$ (mod. 8) |
| $C$ | $b \equiv 10a, \; 12a, \; 14a$ (mod. 24); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 0$ (mod. 8) |
| $D$ | $b \equiv 16a, \; 18a, \; 20a$ (mod. 24); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 6a$ (mod. 8) |

$-6$ vero

| ad complexum | si |
|---|---|
| $A$ | $b \equiv 0, \; 10a, \; 14a$ (mod. 24); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 4a$ (mod. 8) |
| $B$ | $b \equiv 4a, \; 8a, \; 18a$ (mod. 24); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 6a$ (mod. 8) |
| $C$ | $b \equiv 2a, \; 12a, \; 22a$ (mod. 24); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 0$ (mod. 8) |
| $D$ | $b \equiv 6a, \; 16a, \; 20a$ (mod. 24); vel simul $a \equiv 0$ (mod. 3), $b \equiv 2a$ (mod. 8) |

Simili modo criteria pro numero $+21$ concinnabuntur e criteriis pro $-3$ et $-7$; criteria pro $-105$ e criteriis pro $-1$, $-3$, $+5$, $-7$, etc.

## 30.

Amplissimam itaque messem theorematum specialium aperit inductio, theoremati pro numero 2 affinium: sed desideratur vinculum commune, desiderantur demonstrationes rigorosae, quum methodus, per quam in commentatione prima numerum 2 absolvimus, ulteriorem applicationem non patiatur. Non desunt quidem methodi diversae, per quas demonstrationibus pro casibus particularibus potiri liceret, iis potissimum, qui distributionem residuorum quadraticorum inter complexus $A$, $C$ spectant, quibus tamen non immoramur, quum theoria genera-

lis *omnes* casus complectens in votis esse debeat. Cui rei quum inde ab anno 1805 meditationes nostras dicare coepissemus, mox certiores facti sumus, fontem genuinum theoriae generalis in campo arithmeticae promoto quaerendum esse, uti iam in art. 1 addigitavimus.

Quemadmodum scilicet arithmetica sublimior in quaestionibus hactenus pertractatis inter solos numeros integros reales versatur, ita theoremata circa residua biquadratica tunc tantum in summa simplicitate ac genuina venustate resplendent, quando campus arithmeticae ad quantitates *imaginarias* extenditur, ita ut absque restrictione ipsius obiectum constituant numeri formae $a+bi$, denotantibus $i$, pro more quantitatem imaginariam $\sqrt{-1}$, atque $a$, $b$ indefinite omnes numeros reales integros inter $-\infty$ et $+\infty$. Tales numeros vocabimus *numeros integros complexos*, ita quidem, ut reales complexis non opponantur, sed tamquam species sub his contineri censeantur. Commentatio praesens tum doctrinam elementarem de numeris complexis, tum prima initia theoriae residuorum biquadraticorum sistet, quam ab omni parte perfectam reddere in continuatione subsequente suscipiemus*).

## 31.

Ante omnia quasdam denominationes praemittimus, per quarum introductionem brevitati et perspicuitati consuletur.

Campus numerorum complexorum $a+bi$ continet

I. numeros reales, ubi $b=0$, et, inter hos, pro indole ipsius $a$

1) cifram
2) numeros positivos
3) numeros negativos

II. numeros imaginarios, ubi $b$ cifrae inaequalis. Hic iterum distinguuntur

1) numeri imaginarii absque parte reali, i. e. ubi $a=0$
2) numeri imaginarii cum parte reali, ubi neque $b$, neque $a=0$.

Priores si placet numeri imaginarii puri, posteriores numeri imaginarii mixti vocari possunt.

*) Obiter saltem hic adhuc monere convenit, campum ita definitum imprimis theoriae residuorum biquadraticorum accommodatum esse. Theoria residuorum cubicorum simili modo superstruenda est considerationi numerorum formae $a+bh$, ubi $h$ est radix imaginaria aequationis $h^3-1=0$, puta $h=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i$; et perinde theoria residuorum potestatum altiorum introductionem aliarum quantitatum imaginariarum postulabit.

Unitatibus in hac doctrina utimur quaternis: $+1$, $-1$, $+i$, $-i$, quae simpliciter positiva, negativa, positiva imaginaria, negativa imaginaria audient.

Producta terna cuiuslibet numeri complexi per $-1$, $+i$, $-i$ illius *socios* vel *numeros illi associatos* appellabimus. Excepta itaque cifra (quae sibi ipsa associata est), semper quaterni numeri *inaequales* associati sunt.

Contra numero complexo *coniunctum* vocamus eum, qui per permutationem ipsius $i$ cum $-i$ inde oritur. Inter numeros imaginarios itaque bini *inaequales* semper coniuncti sunt, dum numeri reales sibi ipsi sunt coniuncti, siquidem denominationem ad hos extendere placet.

Productum numeri complexi per numerum ipsi coniunctum utriusque *normam* vocamus. Pro norma itaque numeri realis, ipsius quadratum habendum est.

Generaliter octonos numeros nexos habemus, puta

$$\begin{array}{r|r} a+bi & a-bi \\ -b+ai & -b-ai \\ -a-bi & -a+bi \\ b-ai & b+ai \end{array}$$

ubi duas quaterniones numerorum associatorum, quatuor biniones coniunctorum conspicimus, omniumque norma communis est $aa+bb$. Sed octo numeri ad quatuor inaequales reducuntur, quoties vel $a=\pm b$, vel alteruter numerorum $a, b=0$.

E definitionibus allatis protinus demanant sequentia:

Producto duorum numerorum complexorum coniunctum est productum e numeris, qui illis coniuncti sunt.

Idem valet de producto e pluribus factoribus, nec non de quotientibus.

Norma producti e duobus numeris complexis aequalis est producto ex horum normis.

Hoc quoque theorema extenditur ad producta e quotcunque factoribus et ad quotientes.

Cuiusvis numeri complexi (excipiendo cifram, quod plerumque abhinc tacite subintelligemus) norma est numerus *positivus*.

Ceterum nihil obstat, quominus definitiones nostrae ad valores fractos vel adeo irrationales ipsorum $a, b$ extendantur; sed $a+bi$ tunc tantum numerus complexus integer audiet, quando *uterque* $a, b$ est integer, atque tunc tantum rationalis, quando *uterque* $a, b$ rationalis est.

32.

Algorithmus operationum arithmeticarum circa numeros complexos vulgo notus est: divisio, per introductionem normae, ad multiplicationem reducitur. quum habeatur

$$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)\cdot\frac{c-di}{cc+dd} = \frac{ac+bd}{cc+dd} + \frac{bc-ad}{cc+dd}\cdot i$$

Extractio radicis quadratae perficitur adiumento formulae

$$\sqrt{(a+bi)} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{(aa+bb)}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{2}}\right)$$

si $b$ est numerus positivus, vel huius

$$\sqrt{(a+bi)} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{(aa+bb)}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{(aa+bb)}-a}{2}}\right)$$

si $b$ est numerus negativus. Usui transformationis quantitatis complexae $a+bi$ in $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ad calculos facilitandos, non opus est hic immorari.

33.

Numerum integrum complexum, qui in factores duos ab unitatibus diversos*) resolvi potest, vocamus numerum complexum compositum; contra numerus primus complexus dicetur, qui talem resolutionem in factores non admittit. Hinc statim patet, quemvis numerum compositum realem etiam esse compositum complexum. At numerus primus realis poterit esse numerus complexus compositus, et quidem hoc valebit de numero 2 atque de omnibus numeris primis realibus positivis formae $4n+1$ (excepto numero 1), quippe quos in bina quadrata positiva decomponi posse constat; puta, fit $2 = (1+i)(1-i)$, $5 = (1+2i)(1-2i)$, $13 = (3+2i)(3-2i)$, $17 = (1+4i)(1-4i)$ etc.

Contra numeri primi reales positivi formae $4n+3$ semper sunt numeri primi complexi. Si enim talis numerus $q$ esset $= (a+bi)(\alpha+\beta i)$, foret etiam $q = (a-bi)(\alpha-\beta i)$, adeoque $qq = (aa+bb)(\alpha\alpha+\beta\beta)$: at $qq$ unico tantum modo in factores positivos unitate maiores resolvi potest, puta in $q\times q$, unde esse deberet $q = aa+bb = \alpha\alpha+\beta\beta$, Q. E. A; quum summa duorum quadratorum nequeat esse formae $4n+3$.

*) sive, quod idem est, tales, quorum normae unitate sint maiores.

Numeri reales negativi manifesto easdem denominationes servant, quas positivi, idemque valet de numeris imaginariis puris.

Superest itaque, ut inter numeros imaginarios mixtos, compositos a primis dignoscere doceamus, quod fit per sequens

Theorema. *Quivis numerus integer imaginarius mixtus $a+bi$ est vel numerus primus complexus, vel numerus compositus, prout ipsius norma est vel numerus primus realis, vel numerus compositus.*

*Dem.* I. Quoniam numeri complexi compositi norma semper est numerus compositus, patet, numerum complexum, cuius norma sit numerus primus realis, necessario esse debere numerum primum complexum. Q. E. P.

II. Si vero norma $aa+bb$ est numerus compositus, sit $p$ numerus primus positivus realis illam metiens. Duo iam casus distinguendi sunt.

1) Si $p$ est formae $4n+3$, constat, $aa+bb$ per $p$ divisibilem esse non posse, nisi $p$ simul metiatur ipsos $a$, $b$, unde $a+bi$ erit numerus compositus.

2) Si $p$ non est formae $4n+3$, certo in duo quadrata decomponi poterit: statuemus itaque $p=\alpha\alpha+\beta\beta$. Quum fiat

$$(a\alpha+b\beta)(a\alpha-b\beta)=aa(\alpha\alpha+\beta\beta)-\beta\beta(aa+bb)$$

adeoque per $p$ divisibilis, $p$ certo alterutrum factorem $a\alpha+b\beta$, $a\alpha-b\beta$ metietur, et quum insuper fiat

$$(a\alpha+b\beta)^2+(b\alpha-a\beta)^2=(a\alpha-b\beta)^2+(b\alpha+a\beta)^2=(aa+bb)(\alpha\alpha+\beta\beta)$$

adeoque per $pp$ divisibilis, patet, in casu priori etiam $b\alpha-a\beta$, in posteriori $b\alpha+a\beta$ per $p$ divisibilem esse debere. Quare in casu priori

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}=\frac{a\alpha+b\beta}{p}+\frac{b\alpha-a\beta}{p}\cdot i$$

erit numerus integer complexus, in posteriori autem

$$\frac{a+bi}{\alpha-\beta i}=\frac{a\alpha-b\beta}{p}+\frac{b\alpha+a\beta}{p}\cdot i$$

integer erit. Quum itaque numerus propositus vel per $\alpha+\beta i$ vel per $\alpha-\beta i$ divisibilis sit, quotientisque norma $=\frac{aa+bb}{p}$ per hyp. ab unitate diversa fiat, patet, $a+bi$ in utroque casu esse numerum complexum compositum. Q. E. S.

34.

Totum itaque ambitum numerorum primorum complexorum exhauriunt quatuor species sequentes:

1) quatuor unitates, $1, +i, -1, -i,$ quas tamen, dum de numeris primis agemus, plerumque tacite subintelligemus exclusas.

2) numerus $1+i$ cum tribus sociis $-1+i, -1-i, 1-i$.

3) numeri primi reales positivi formae $4n+3$ cum ternis sociis.

4) numeri complexi, quorum normae sunt numeri primi reales formae $4n+1$ unitate maiores, et quidem cuivis normae tali datae semper octoni numeri primi complexi et non plures respondebunt, quum talis norma unico tantum modo in bina quadrata decomponi possit.

35.

Quemadmodum numeri integri reales in pares et impares distribuuntur, atque illi iterum in pariter pares et impariter pares, ita inter numeros complexos distinctio aeque essentialis se offert: sunt scilicet

*vel* per $1+i$ non divisibiles, puta numeri $a+bi$, ubi alter numerorum $a, b$ est impar, alter par;

*vel* per $1+i$ neque vero per 2 divisibiles, quoties uterque $a, b$ est impar;

*vel* per 2 divisibiles, quoties uterque $a, b$ est par.

Numeri primae classis commode dici possunt numeri complexi impares, secundae semipares, tertiae pares.

Productum e pluribus factoribus complexis semper impar erit, quoties omnes factores sunt impares; semipar, quoties unus factor est semipar, reliqui impares; par autem, quoties inter factores vel saltem duo semipares inveniuntur, vel saltem unus par.

Norma cuiusvis numeri complexi imparis est formae $4n+1$; norma numeri semiparis est formae $8n+2$; denique norma numeri paris est productum numeri formae $4n+1$ in numerum 4 vel altiorem binarii potestatem.

36.

Quum nexus inter quaternos numeros complexos socios analogus sit nexui inter binos numeros reales oppositos (i. e. absolute aequales signisque oppositis affectos), atque ex his vulgo positivus tamquam primarius merito considerari soleat:

quaestio oritur, num similis distinctio inter quaternos numeros complexos socios stabiliri possit, et pro utili haberi debeat. Ad quam decidendam perpendere oportet, principium distinctionis ita comparatum esse debere, ut productum duorum numerorum, qui inter socios suos pro primariis valent, semper fiat numerus primarius inter socios suos. At mox certiores fimus, tale principium omnino non dari, nisi distinctio ad numeros integros restringatur: quinadeo distinctio *utilis* ad numeros impares limitanda erit. Pro his vero finis propositus duplici modo attingi potest. Scilicet

I. Productum duorum numerorum $a+bi$, $a'+b'i$ ita comparatorum, ut $a$, $a'$ sint formae $4n+1$, atque $b$, $b'$ pares, eadem proprietate gaudebit, ut pars realis fiat $\equiv 1$ (mod. 4), atque pars imaginaria par. Et facile perspicietur, inter quaternos numeros impares associatos unum solum sub illa forma contentum esse.

II. Si numerus $a+bi$ ita comparatus est, ut $a-1$ et $b$ vel simul pariter pares sint, vel simul impariter pares, eius productum per numerum complexum eiusdem formae eadem forma gaudebit, facileque perspicitur, e quaternis numeris imparibus associatis unum solum sub hac forma contineri.

Ex his duobus principiis aeque fere idoneis posterius adoptabimus, scilicet inter quaternos numeros complexos impares associatos eum pro primario habebimus, qui secundum modulum $2+2i$ unitati positivae fit congruus: hoc pacto plura insignia theoremata maiori concinnitate enunciare licebit. Ita e. g. sunt numeri primi complexi primarii $-1+2i$, $-1-2i$, $+3+2i$, $+3-2i$, $+1+4i$, $+1-4i$ etc., nec non reales $-3$, $-7$, $-11$, $-19$ etc. manifesto semper signo negativo afficiendi. Numero complexo impari primario coniunctus quoque primarius erit.

Pro numeris semiparibus et paribus in genere similis distinctio nimis arbitraria parumque utilis foret. E numeris primis associatis $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ unum quidem prae reliquis pro primario eligere possumus, sed ad compositos talem distinctionem non extendemus.

## 37.

Si inter factores numeri complexi compositi inveniuntur tales, qui ipsi sunt compositi, atque hi iterum in factores suos resolvuntur, manifesto tandem ad factores primos delabimur, i. e. quivis numerus compositus in factores primos resolubilis est. Inter quos si qui non primarii reperiuntur, singulorum loco substitua-

tur productum primarii associati per $i$, $-1$ vel $-i$. Hoc pacto patet, quemvis numerum complexum compositum $M$ reduci posse ad formam

$$M = i^{\mu} A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots$$

ita ut $A$, $B$, $C$ etc. sint numeri primi complexi primarii inaequales, atque $\mu = 0, 1, 2$ vel $3$. Circa hanc resolutionem theorema se offert, unico tantum modo eam fieri posse, quod theorema obiter quidem consideratum per se manifestum videri posset, sed utique demonstratione eget. Ad quam sternit viam sequens

Theorema. *Productum* $M = A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots$, *denotantibus* $A, B, C$ *etc. numeros primos complexos primarios diversos, divisibile esse nequit per ullum numerum primum complexum primarium, qui inter* $A, B, C$ *etc. non reperitur.*

*Dem.* Sit $P$ numerus primus complexus primarius inter $A, B, C$ etc. non contentus, sintque $p, a, b, c$ etc. normae numerorum $P, A, B, C$ etc. Hinc facile colligitur, normam numeri $M$ fore $= a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$ etc., unde hic numerus, si $M$ per $P$ divisibilis esset, per $p$ divisibilis esse deberet. Quum singulae normae sint vel numeri primi reales (e serie 2, 5, 13, 17 etc.), vel numerorum primorum realium quadrata (e serie 9, 49, 121 etc.), sponte patet, illud evenire non posse, nisi $p$ cum aliqua norma $a, b, c$ etc. identica fiat: supponemus itaque $p = a$. At quum $P$, $A$ per hyp. sint numeri primi complexi primarii non identici, facile perspicietur, haec simul consistere non posse, nisi $P$, $A$ sint numeri complexi imaginarii coniuncti, et proin $p = a$ numerus primus realis impar, (non quadratum numeri primi): supponemus itaque $A = k + li$, $P = k - li$. Hinc (extendendo notionem et signum congruentiae ad numeros integros complexos) erit $A \equiv 2k \pmod{P}$, unde facile colligitur

$$M \equiv 2^{\alpha} k^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots \pmod{P}$$

Quapropter dum $M$ per $P$ divisibilis supponitur, erit etiam

$$2^{\alpha} k^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots$$

per $P$ divisibilis, adeoque norma huius numeri, quae fit

$$= 2^{2\alpha} k^{2\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$$

divisibilis per $p$. At quum 2 et $k$ per $p$ certo non sint divisibiles, hinc sequi-

tur, $p$ cum aliquo numerorum $b$, $c$ etc. identicum esse debere: sit e. g. $p = b$. Hinc vero concludimus, esse vel $B = k + li$, vel $B = k - li$, i. e. vel $B = A$, vel $B = P$, utrumque contra hyp.

Ex hoc theoremate alterum, quod resolutio in factores primos unico tantum modo perfici potest, facillime derivatur, et quidem per ratiocinia iis, quibus in *Disquisitionibus Arithmeticis* pro numeris realibus usi sumus (art. 16), prorsus analoga: quapropter illis hic immorari superfluum foret.

38.

Progredimur iam ad congruentiam numerorum secundum modulos complexos. Sed in limine huius disquisitionis convenit indicare, quomodo ditio quantitatum complexarum intuitui subiici possit.

Sicuti omnis quantitas realis per partem rectae utrinque infinitae ab initio arbitrario sumendam, et secundum segmentum arbitrarium pro unitate acceptum aestimandam exprimi, adeoque per punctum alterum repraesentari potest, ita ut puncta ab altera initii plaga quantitates positivas, ab altera negativas repraesentent: ita quaevis quantitas complexa repraesentari poterit per aliquod punctum in plano infinito, in quo recta determinata ad quantitates reales refertur, scilicet quantitas complexa $x + iy$ per punctum, cuius abscissa $= x$, ordinata (ab altera lineae abscissarum plaga positive, ab altera negative sumta) $= y$. Hoc pacto dici potest, quamlibet quantitatem complexam mensurare inaequalitatem inter situm puncti ad quod refertur atque situm puncti initialis, denotante unitate positiva deflexum arbitrarium determinatum versus directionem arbitrariam determinatam; unitate negativa deflexum aeque magnum versus directionem oppositam; denique unitatibus imaginariis deflexus aeque magnos versus duas directiones laterales normales.

Hoc modo metaphysica quantitatum, quas imaginarias dicimus, insigniter illustratur. Si punctum initiale per (0) denotatur, atque duae quantitates complexae $m$, $m'$ ad puncta $M$, $M'$ referuntur, quorum situm relative ad (0) exprimunt, differentia $m - m'$ nihil aliud erit nisi situs puncti $M$ relative ad punctum $M'$: contra, producto $mm'$ repraesentante situm puncti $N$ relative ad (0), facile perspicies, hunc situm perinde determinari per situm puncti $M$ ad (0), ut situs puncti $M'$ determinatur per situm puncti cui respondet unitas positiva, ita ut haud inepte dicas, situs punctorum respondentium quantitatibus complexis $mm'$,

$m$, $m'$, 1 formare *proportionem*. Sed uberiorem huius rei tractationem ad aliam occasionem nobis reservamus. Difficultates, quibus theoria quantitatum imaginariarum involuta putatur, ad magnam partem a denominationibus parum idoneis originem traxerunt (quum adeo quidam usi sint nomine absono quantitatum impossibilium). Si, a conceptibus, quos offerunt varietates duarum dimensionum, (quales in maxima puritate conspiciuntur in intuitionibus spatii) profecti, quantitates positivas directas, negativas inversas, imaginarias laterales nuncupavissemus, pro tricis simplicitas, pro caligine claritas successisset.

39.

Quae in art. praec. prolata sunt, ad quantitates complexas continuas referuntur: in arithmetica, quae tantummodo circa numeros integros versatur, schema numerorum complexorum erit systema punctorum aequidistantium et in rectis aequidistantibus ita dispositorum, ut planum infinitum in infinite multa quadrata aequalia dispertiant. Omnes numeri per numerum complexum datum $a+bi=m$ divisibiles item infinite multa quadrata formabunt, quorum latera $=\surd(aa+bb)$ sive areae $=aa+bb$; quadrata posteriora ad priora inclinata erunt, quoties quidem neuter numerorum $a$, $b$ est $=0$. Cuivis numero per modulum $m$ non divisibili respondebit punctum vel intra tale quadratum situm vel in latere duobus quadratis contiguo; posterior tamen casus locum habere nequit, nisi $a$, $b$ divisorem communem habent: porro patet, numeros secundum modulum $m$ congruos in quadratis suis locos congruentes occupare. Hinc facile concluditur, si colligantur omnes numeri intra quadratum determinatum siti, nec non omnes qui forte in duobus eius lateribus non oppositis iaceant, denique his adscribatur numerus per $m$ divisibilis, haberi systema completum residuorum incongruorum secundum modulum $m$, i. e. quemvis integrum alicui ex illis et quidem unico tantum congruum esse debere. Nec difficile foret ostendere, horum residuorum multitudinem aequalem esse moduli normae, puta $=aa+bb$. Sed consultum videtur, hoc gravissimum theorema alio modo pure arithmetico demonstrare.

40.

Theorema. *Secundum modulum complexum datum* $m=a+bi$, *cuius norma* $aa+bb=p$, *et pro quo* $a$, $b$ *sunt numeri inter se primi, quilibet integer complexus congruus erit alicui residuo e serie* $0, 1, 2, 3 \ldots p-1$, *et non pluribus.*

*Demonstr.* I. Sint $\alpha, \beta$ integri tales qui faciant $\alpha a + \beta b = 1$, unde erit

$$i = \alpha b - \beta a + m(\beta + \alpha i)$$

Proposito itaque numero integro complexo $A + Bi$, habebimus

$$A + Bi = A + (\alpha b - \beta a)B + m(\beta B + \alpha Bi)$$

Quare denotando per $h$ residuum minimum positivum numeri $A + (\alpha b - \beta a)B$ secundum modulum $p$, statuendoque

$$A + (\alpha b - \beta a)B = h + kp = h + m(ak - bki)$$

erit

$$A + Bi = h + m(\beta B + ak + (\alpha B - bk)i)$$

sive

$$A + Bi \equiv h \, (\text{mod. } m). \quad \text{Q. E. P.}$$

II. Quoties eidem numero complexo duo numeri reales $h, h'$ secundum modulum $m$ congrui sunt, etiam inter se congrui erunt. Statuamus itaque $h - h' = m(c + di)$, unde fit

$$(h - h')(a - bi) = p(c + di)$$

adeoque

$$(h - h')a = pc, \quad (h - h')b = -pd$$

nec non, propter $a\alpha + b\beta = 1$,

$$h - h' = p(c\alpha - d\beta), \text{ i. e. } h \equiv h' \, (\text{mod. } p)$$

Quapropter $h$ et $h'$, siquidem sunt inaequales, ambo simul in complexu numerorum $0, 1, 2, 3 \ldots . p - 1$ contenti esse nequeunt. Q. E. S.

41.

THEOREMA. *Secundum modulum complexum* $m = a + bi$, *cuius norma* $aa + bb = p$, *et pro quo* $a, b$ *non sunt inter se primi, sed divisorem communem maximum* $\lambda$ *habent (quem positive acceptum supponimus), quilibet numerus complexus congruus est residuo* $x + yi$ *tali, ut* $x$ *sit aliquis numerorum* $0, 1, 2, 3 \ldots . \frac{p}{\lambda} - 1$, *atque* $y$ *aliquis horum* $0, 1, 2, 3 \ldots . \lambda - 1$, *et quidem unico tantum inter omnia* $p$ *residua, quae tali forma gaudent.*

*Demonstr.* I. Accipiendo integros $\alpha$, $\beta$ ita, ut fiat $\alpha a + \beta b = \lambda$, erit $\lambda i = \alpha b - \beta a + m(\beta + \alpha i)$. Iam sit $A + Bi$ numerus complexus propositus, $y$ residuum minimum positivum ipsius $B$ secundum modulum $\lambda$, atque $x$ residuum minimum positivum ipsius $A + (\alpha b - \beta a)\cdot\frac{B-y}{\lambda}$ secundum modulum $\frac{p}{\lambda}$, statuaturque

$$A + (\alpha b - \beta a)\cdot\frac{B-y}{\lambda} = x + \frac{p}{\lambda}\cdot k$$

Hinc erit

$$\begin{aligned} A + Bi - (x + yi) &= \tfrac{p}{\lambda}\cdot k + (B-y)i - (\alpha b - \beta a)\tfrac{B-y}{\lambda} \\ &= \tfrac{p}{\lambda}\cdot k + \tfrac{B-y}{\lambda}\cdot m(\beta + \alpha i) \\ &= (\tfrac{a}{\lambda} - \tfrac{b}{\lambda}\cdot i)km + \tfrac{B-y}{\lambda}(\beta + \alpha i)m \end{aligned}$$

i. e. per $m$ divisibilis, sive $A + Bi \equiv x + yi \pmod{m}$. Q. E. P.

II. Supponamus, secundum modulum $m$ eidem numero complexo congruos esse duos numeros $x + yi$, $x' + y'i$, qui proin etiam inter se congrui erunt secundum modulum $m$. A potiori itaque secundum modulum $\lambda$ congrui erunt, adeoque $y \equiv y' \pmod{\lambda}$. Quodsi igitur uterque $y, y'$ inter numeros $0, 1, 2, 3 \ldots \lambda - 1$ contentus esse supponitur, necessario debet esse $y = y'$. Hoc pacto vero etiam fiet $x \equiv x' \pmod{m}$, i. e. $x - x'$ per $m$, adeoque $\frac{x-x'}{\lambda}$ integer per $\frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}\cdot i$ divisibilis, sive

$$\frac{x-x'}{\lambda} \equiv 0 \pmod{\frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}\cdot i}$$

Hinc autem, quum $\frac{a}{\lambda}$, $\frac{b}{\lambda}$ sint numeri inter se primi, concluditur per partem secundam theorematis art. praec., $\frac{x-x'}{\lambda}$ etiam per normam numeri $\frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}\cdot i$, i. e. per numerum $\frac{p}{\lambda\lambda}$ divisibilem fore, adeoque $x - x'$ per $\frac{p}{\lambda}$. Quapropter si etiam uterque $x$, $x'$ in complexu numerorum $0, 1, 2, 3 \ldots \frac{p}{\lambda} - 1$ contentus esse supponitur, necessario erit $x = x'$, sive residua $x + yi$, $x' + y'i$ identica. Q. E. S.

Ceterum sponte patet, huc quoque referendum esse casum, ubi modulus est numerus realis, puta $b = 0$, et proin $\lambda = \pm a$, nec non eum, ubi modulus est numerus pure imaginarius, puta $a = 0$, et proin $\lambda = \pm b$. In utroque casu habetur $\frac{p}{\lambda} = \lambda$.

42.

Referendo itaque omnes numeros complexos secundum modulum datum inter se congruos ad eandem classem, incongruos ad diversas, omnino aderunt $p$ classes totum numerorum integrorum ambitum exhaurientes, denotante $p$ normam moduli. Complexus totidem numerorum e singulis classibus desumtorum exhibebit systema completum residuorum incongruorum, quale in artt. 40, 41 assignavimus. Et in hocce quidem systemate electio residuorum classes suas quasi repraesentantium innixa erat principio ei, ut in quavis classe adoptaretur residuum $x+yi$ tale, pro quo $y$ habeat valorem minimum, atque inter omnia, quibus idem valor minimus ipsius $y$ inest, id, pro quo valor ipsius $x$ est minimus, exclusis valoribus negativis tum pro $x$ tum pro $y$. Sed ad alia proposita aliis principiis uti conveniet, imprimisque notandus est modus is, ubi residua talia adoptantur, quae per modulum divisa offerunt quotientes simplicissimos. Manifesto si $\alpha+\beta i$, $\alpha'+\beta' i$, $\alpha''+\beta'' i$ etc. sunt quotientes e divisione numerorum congruorum per modulum oriundi, differentiae tum quantitatum $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ etc. inter se erunt numeri integri, tum differentiae inter quantitates $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ etc., patetque, semper adesse residuum unum, pro quo $\alpha$ et $\beta$ iaceant inter limites 0 et 1, limite priori incluso, posteriori excluso: tale residuum simpliciter vocamus residuum minimum. Si magis placet, loco illorum limitum etiam hi adoptari possunt $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ (altero admisso, altero excluso): residuum tali limitationi respondens *absolute minimum* dicemus.

Circa haec residua minima offerunt se problemata sequentia.

43.

Residuum minimum numeri complexi dati $A+Bi$ secundum modulum $a+bi$, cuius norma $=p$, invenitur sequenti modo. Si $x+yi$ est residuum minimum quaesitum, erit $(x+yi)(a-bi)$ residuum minimum producti $(A+Bi)(a-bi)$ secundum modulum $(a+bi)(a-bi)$, i. e. secundum modulum $p$. Statuendo itaque

$$aA+bB = Fp+f, \quad aB-bA = Gp+g$$

ita ut $f$, $g$ sint residua minima numerorum $aA+bB$, $aB-bA$ secundum modulum $p$, erit

$$x+yi=\frac{f+gi}{a-bi}$$

sive

$$x=\frac{af-bg}{p}=A-aF+bG$$
$$y=\frac{ag+bf}{p}=B-aG-bF$$

Manifesto residua minima $f, g$ vel inter limites 0 et $p-1$, vel inter hos $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$ accipi debent, prout numeri complexi vel residuum simpliciter minimum vel absolute minimum desideratur.

44.

Constructio systematis completi residuorum minimorum pro modulo dato pluribus modis effici potest. Methodus prima ita procedit, ut primo determinentur limites, intra quos termini reales iacere debent, ac dein pro singulis valoribus intra hos limites sitis assignentur limites partium imaginariarum. Criterium generale residui minimi $x+yi$ pro modulo $a+bi$ in eo consistit, ut tum $ax+by=\xi$, tum $ay-bx=\eta$ iaceat inter limites 0 et $aa+bb$, quoties de residuis simpliciter minimis agitur, vel inter limites $-\frac{1}{2}(aa+bb)$ et $+\frac{1}{2}(aa+bb)$, quoties residua absolute minima desiderantur, limite altero excluso. Regulae speciales distinctionem casuum, quos varietas signorum numerorum $a, b$ affert, requirerent, cui tamen evolvendae, quum nulli difficultati obnoxia sit, hic immorari supersedemus: sufficiat, methodi indolem per unicum exemplum exposuisse.

Pro modulo $5+2i$ residua simpliciter minima $x+yi$ ita comparata esse debent, ut tum $5x+2y=\xi$, tum $5y-2x=\eta$ aequetur alicui numerorum 0, 1, 2, 3 .... 28. Aequatio $29x=5\xi-2\eta$ ostendit, valores positivos ipsius $x$ maiores esse non posse quam $\frac{5.28}{29}$, negativos abstrahendo a signo non maiores quam $\frac{2.28}{29}$. Omnes itaque valores admissibiles ipsius $x$ erunt $-1, 0, 1, 2, 3, 4$. Pro $x=-1$ debet esse $2y$ aequalis alicui numerorum 5, 6, 7 .... 33, atque $5y$ alicui horum $-2, -1, 0, 1$ .... 26; hinc valor minimus ipsius $y$ est $+3$, maximus $+5$. Tractando perinde valores reliquos ipsius $x$, oritur sequens schema omnium residuorum minimorum:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-1$ | 3, 4, 5 |
| 0 | 0, 1, 2, 3, 4, 5 |
| $+1$ | 1, 2, 3, 4, 5, 6 |
| $+2$ | 1, 2, 3, 4, 5, 6 |
| $+3$ | 2, 3, 4, 5, 6 |
| $+4$ | 2, 3, 4 |

Simili modo pro residuis absolute minimis, $\xi$ et $\eta$ alicui numerorum $-14, -13, -12 \ldots . +14$ aequales esse debent; hinc $29x$ nequit esse extra limites $-7.14$ et $+7.14$, adeoque $x$ alicui numerorum $-3, -2, -1.0, 1, 2, 3$ aequalis esse debet. Pro $x = -3$ erit $2y = \xi - 5x = \xi + 15$ alicui numerorum $1, 2, 3 \ldots . 29$ aequalis, $5y = \eta + 2x = \eta - 6$ autem alicui horum $-20, -19, -18 \ldots . +8$: hinc prodit pro $y$ valor unicus $+1$. Tractando eodem modo valores reliquos ipsius $x$, habemus schema omnium residuorum absolute minimorum:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | $+1$ |
| $-2$ | $-2, -1, 0, +1, +2$ |
| $-1$ | $-3, -2, -1, 0, +1, +2$ |
| 0 | $-2, -1, 0, +1, +2$ |
| $+1$ | $-2, -1, 0, +1, +2, +3$ |
| $+2$ | $-2, -1, 0, +1, +2,$ |
| $+3$ | $-1$ |

45.

In applicatione methodi secundae duos casus distinguere conveniet.

In casu priori, ubi $a$ et $b$ divisorem communem non habent, fiat $\alpha a + \mathfrak{b} b = 1$, sitque $k$ residuum minimum positivum ipsius $\mathfrak{b} a - \alpha b$ secundum modulum $p$. Hinc aequationes identicae

$$a(\mathfrak{b}a - \alpha b) = \mathfrak{b}p - b(\alpha a + \mathfrak{b}b), \quad b(\mathfrak{b}a - \alpha b) = -\alpha p + a(\alpha a + \mathfrak{b}b)$$

docent, esse $ak \equiv -b$, $bk \equiv a \pmod{p}$. Statuendo itaque ut supra $ax + by = \xi$,

$ay - bx = \eta$, erit $\eta \equiv k\xi$, $\xi \equiv -k\eta \pmod{p}$. Omnes itaque numeri $\xi + \eta i$, quibus residua simpliciter minima $x + yi$ respondent, habebuntur, dum vel pro $\xi$ deinceps accipiuntur valores $0, 1, 2, 3 \ldots p-1$, et pro $\eta$ residua minima positiva productorum $k\xi$ secundum modulum $p$, vel ordine alio pro $\eta$ illi valores et pro $\xi$ residua minima productorum $-k\eta$. E singulis $\xi + \eta i$ dein respondentes $x + yi$ invenientur per formulam

$$x + yi = \frac{\xi + \eta i}{a - bi} = \frac{a\xi - b\eta}{p} + \frac{a\eta + b\xi}{p} \cdot i$$

Ceterum obvium est, $\eta$, dum $\xi$ unitate crescat, vel augmentum $k$ vel decrementum $p - k$ pati, adeoque $x + yi$

vel mutationem $\frac{a-kb}{p} + \frac{ak+b}{p} \cdot i$ vel hanc $\frac{a-kb}{p} + b + (\frac{ak+b}{p} - a) i$

quae observatio ad constructionem faciliorem reddendam inservit.

Denique patet, si residua absolute minima $x + yi$ desiderentur, haec praecepta eatenus tantum mutari, quatenus ipsi $\xi$ deinceps tribuendi sint valores inter limites $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$, dum pro $\eta$ accipere oporteat residua absolute minima productorum $k\xi$. Ecce conspectum residuorum minimorum pro modulo $5 + 2i$ hoc modo adornatorum:

Residua simpliciter minima.

| $\xi + \eta i$ | $x + yi$ | $\xi + \eta i$ | $x + yi$ | $\xi + \eta i$ | $x + yi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $10 + 25i$ | $+5i$ | $20 + 21i$ | $+2 + 5i$ |
| $1 + 17i$ | $-1 + 3i$ | $11 + 13i$ | $+1 + 3i$ | $21 + 9i$ | $+3 + 3i$ |
| $2 + 5i$ | $+i$ | $12 + i$ | $+2 + i$ | $22 + 26i$ | $+2 + 6i$ |
| $3 + 22i$ | $+1 + 4i$ | $13 + 18i$ | $+1 + 4i$ | $23 + 14i$ | $+3 + 4i$ |
| $4 + 10i$ | $+2i$ | $14 + 6i$ | $+2 + 2i$ | $24 + 2i$ | $+4 + 2i$ |
| $5 + 27i$ | $-1 + 5i$ | $15 + 23i$ | $+1 + 5i$ | $25 + 19i$ | $+3 + 5i$ |
| $6 + 15i$ | $+3i$ | $16 + 11i$ | $+2 + 3i$ | $26 + 7i$ | $+4 + 3i$ |
| $7 + 3i$ | $+1 + i$ | $17 + 28i$ | $+1 + 6i$ | $27 + 24i$ | $+3 + 6i$ |
| $8 + 20i$ | $+4i$ | $18 + 16i$ | $+2 + 4i$ | $28 + 12i$ | $+4 + 4i$ |
| $9 + 8i$ | $+1 + 2i$ | $19 + 4i$ | $+3 + 2i$ | | |

Residua absolute minima.

| $\xi+\eta i$ | $x+yi$ | $\xi+\eta i$ | $x+yi$ | $\xi+\eta i$ | $x+yi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-14-6i$ | $-2-2i$ | $-4-10i$ | $-2i$ | $+5-2i$ | $+1$ |
| $-13+11i$ | $-3+i$ | $-3+7i$ | $-1+i$ | $+6-14i$ | $+2-2i$ |
| $-12-i$ | $-2-i$ | $-2-5i$ | $-i$ | $+7+3i$ | $+1+i$ |
| $-11-13i$ | $-1-3i$ | $-1+12i$ | $-1+2i$ | $+8-9i$ | $+2-i$ |
| $-10+4i$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $+9+8i$ | $+1+2i$ |
| $-9-8i$ | $-1-2i$ | $+1-12i$ | $+1-2i$ | $+10-4i$ | $+2$ |
| $-8+9i$ | $-2+i$ | $+2+5i$ | $+i$ | $+11+13i$ | $+1+3i$ |
| $-7-3i$ | $-1-i$ | $+3-7i$ | $+1-i$ | $+12+i$ | $+2+i$ |
| $-6+14i$ | $-2+2i$ | $+4+10i$ | $+2i$ | $+13-11i$ | $+3-i$ |
| $-5+2i$ | $-1$ | | | $+14+6i$ | $+2+2i$ |

Casum secundum, ubi $a, b$ non sunt inter se primi, facile ad casum praecedentem reducere licet. Sit $\lambda$ divisor communis maximus numerorum $a, b$, atque $a=\lambda a'$, $b=\lambda b'$. Denotet $F$ indefinite residuum minimum pro modulo $\lambda$, quatenus tamquam numerus complexus consideratur, i. e. exhibeat indefinite numerum talem $x+yi$, ut $x, y$ sint vel inter limites $0$ et $\lambda$, vel inter hos $-\frac{1}{2}\lambda$ et $+\frac{1}{2}\lambda$ (prout de residuis vel simpliciter vel absolute minimis agitur): denotet porro $F'$ indefinite residuum minimum pro modulo $a'+b'i$. Tunc erit $(a'+b'i)F+F'$ indefinite residuum minimum pro modulo $a+bi$, prodibitque systema completum horum residuorum, dum omnia $F$ cum omnibus $F'$ combinantur.

## 46.

Duo numeri complexi inter se primi dicuntur, si praeter unitates alios divisores communes non admittunt: quoties autem tales divisores communes adsunt, ii divisores communes maximi vocantur, quorum norma maxima est.

Si duorum numerorum propositorum resolutio in factores primos praesto est, determinatio divisoris communis maximi prorsus eodem modo perficitur, ut pro numeris realibus (*Disquiss. Ar.* art. 18). Simul hinc elucet, omnes divisores communes duorum numerorum datorum metiri debere eorundem divisorem communem maximum hoc modo inventum. Quare quum sponte iam pateat, ternos numeros huic socios etiam esse divisores communes, semper quaterni numeri; et non plu-

res, divisores communes maximi appellandi erunt, horumque norma erit multiplum normae cuiusvis alius divisoris communis.

Si resolutio duorum numerorum propositorum in factores simplices non adest, divisor communis maximus adiumento similis algorithmi eruitur, ut pro numeris realibus. Sint $m$, $m'$ duo numeri propositi, formeturque per divisionem repetitam series $m''$, $m'''$ etc. ita, ut $m''$ sit residuum absolute minimum ipsius $m$ secundum modulum $m'$, dein $m''$ residuum absolute minimum ipsius $m'$ secundum modulum $m''$ et sic porro. Denotando normas numerorum $m, m', m'', m'''$ etc. resp. per $p, p', p'', p'''$ etc., erit $\frac{p''}{p'}$ norma quotientis $\frac{m''}{m'}$, adeoque per definitionem residui absolute minimi certo non maior quam $\frac{1}{2}$; idem valet de $\frac{p'''}{p''}$ etc. Quapropter integri reales positivi $p', p'', p'''$ etc. seriem continuo decrescentem formabunt, unde necessario tandem ad terminum 0 pervenietur, sive, quod idem est, in serie $m, m', m'', m'''$ etc. tandem ad terminum perveniemus, qui praecedentem absque residuo metitur. Sit hic $m^{(n+1)}$, statuamusque

$$m = km' + m''$$
$$m' = k'm'' + m'''$$
$$m'' = k''m''' + m''''$$

etc. usque ad

$$m^{(n)} = k^{(n)} m^{(n+1)}$$

Percurrendo has aequationes ordine inverso, elucet, $m^{(n+1)}$ singulos terminos praecedentes $m^{(n)} \ldots m'', m', m$ metiri; percurrendo autem easdem aequationes ordine directo, manifestum est, quemvis divisorem communem numerorum $m, m'$ etiam metiri singulos sequentes. Conclusio prior docet, $m^{(n+1)}$ esse divisorem communem numerorum $m, m'$; posterior autem, hunc divisorem esse maximum.

Ceterum quoties residuum ultimum $m^{(n+1)}$ alicui quatuor unitatum $1, -1, i, -i$ aequale evadit, hoc indicium erit, $m$ et $m'$ inter se primos esse.

47.

Si aequationes art. praec., omissa ultima, ita combinantur, ut $m'', m''', m'''' \ldots m^{(n)}$ eliminentur, orietur aequatio talis

$$m^{(n+1)} = hm + h'm'$$

ubi $h, h'$ erunt integri, et quidem, si designatione in *Disquiss. Ar.* art. 27 introducta uti placet

$$h = \pm [k', k'', k''' \ldots\ldots k^{(n-1)}] = \pm [k^{(n-1)}, k^{(n-2)} \ldots\ldots k'', k']$$
$$h' = \mp [k, k', k'', k''' \ldots\ldots k^{(n-1)}] = \mp [k^{(n-1)}, k^{(n-2)} \ldots\ldots k'', k', k]$$

valentibus signis superioribus vel inferioribus, prout $n$ par est vel impar. Hoc theorema ita enunciamus:

*Divisor communis maximus duorum numerorum complexorum $m, m'$ redigi potest ad formam $hm + h'm'$, ita ut $h, h'$ sint integri.*

Manifesto enim hoc non solum de eo divisore communi maximo valet, ad quem algorithmus art. praec. deduxit, sed etiam de tribus illi associatis, pro quibus loco coëfficientium $h, h'$ accipere oportebit vel hos $hi, h'i$ vel $-h, -h'$, vel $-hi, -h'i$.

Quoties itaque numeri $m, m'$ inter se primi sunt, satisfieri poterit aequationi

$$1 = hm + h'm'$$

Propositi sint e. g. numeri $31 + 6i = m$, $11 - 20i = m'$. Hic invenimus

$$\begin{array}{ll} k = i, & m'' = +11 - 5i \\ k' = +1 - i, & m''' = +5 - 4i \\ k'' = +2, & m'''' = +1 + 3i \\ k''' = -1 - 2i, & m''''' = +i \\ k'''' = +3 - i & \end{array}$$

atque hinc

$$[k', k'', k'''] = -6 - 5i$$
$$[k, k', k'', k'''] = +4 - 10i$$

et proin

$$m''''' = i = (6 + 5i)m + (4 - 10i)m'$$

nec non

$$1 = (5 - 6i)m + (-10 - 4i)m'$$

quod calculo instituto confirmatur.

48.

Per praecedentia omnia, quae ad theoriam congruentiarum primi gradus in arithmetica numerorum complexorum requiruntur, praeparata sunt: sed quum illa

essentialiter non differat ab ea, quae pro arithmetica numerorum realium locum habet, atque in *Disquisitionibus Arithmeticis* copiose exposita est, praecipua momenta hic adscripsisse sufficiet.

I. Congruentia $mt \equiv 1$ (mod. $m'$) aequivalet aequationi indeterminatae $mt + m'u = 1$, et si huic satisfit per valores $t = h$, $u = h'$, illius solutio generaliter exhibetur per $t \equiv h$ (mod. $m'$): conditio autem solubilitatis est, ut modulus $m'$ cum coëfficiente $m$ divisorem communem non habeat.

II. Solutio congruentiae $ax + b \equiv c$ (mod. $M$) in casu eo, ubi $a$, $M$ sunt inter se primi, pendet a solutione huius

$$at \equiv 1 \text{ (mod. } M)$$

cui si satisfacit $t = h$, illius solutio generalis continetur in formula

$$x \equiv (c - b)h \text{ (mod. } M)$$

III. Congruentia $ax + b \equiv c$ (mod. $M$) in casu eo, ubi $a$, $M$ divisorem communem $\lambda$ habent, aequivalet huic

$$\frac{a}{\lambda} \cdot x \equiv \frac{c-b}{\lambda} \text{ (mod. } \frac{M}{\lambda})$$

Dum itaque pro $\lambda$ adoptatur divisor communis maximus numerorum $a$, $M$, solutio congruentiae propositae ad casum praecedentem reducitur, patetque, ad resolubilitatem requiri et sufficere, ut $\lambda$ etiam differentiam $c - b$ metiatur.

49.

Hactenus elementaria tantum attigimus, quae tamen nexus caussa omittere non licuit. In disquisitionibus altioribus arithmetica numerorum complexorum arithmeticae realium in eo similis est, quod theoremata elegantiora et simpliciora prodeunt, dum tales modulos, qui sunt numeri primi, solos admittimus: revera illorum extensio ad modulos compositos plerumque prolixior quam difficilior est, et laboris potius quam artis. Quapropter in sequentibus imprimis de modulis primis agetur.

50.

Denotante $X$ functionem indeterminatae $x$ talem

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc.} + Mx + N$$

ubi $n$ est integer realis positivus, $A$, $B$. $C$ etc. integri reales vel imaginarii, $m$ autem integer complexus: vocabimus hic quoque *radicem* congruentiae $X \equiv 0$ (mod. $m$) quemlibet integrum, qui pro $x$ substitutus ipsi $X$ valorem per modulum $m$ divisibilem conciliat.. Solutiones per radices secundum modulum congruas non spectabimus tamquam diversas.

Quoties modulus est numerus primus, talis congruentia ordinis $n$ hic quoque plures quam $n$ solutiones diversas admittere non potest. Denotante $\alpha$ integrum quemvis determinatum (complexum), $X$ adiumento divisionis per $x-\alpha$ indefinite ad formam $X = (x-\alpha)X' + h$ reduci potest, ita ut $h$ fiat integer determinatus atque $X'$ functio ordinis $n-1$ cum coëfficientibus integris. Iam quoties $\alpha$ est radix congruentiae $X \equiv 0$ (mod. $m$), manifesto $h$ divisibilis erit per $m$, sive habebitur indefinite $X \equiv (x-\alpha)X'$ (mod. $m$).

Perinde si denotante $\mathfrak{б}$ integrum determinatum, $X'$ ad formam $(x-\mathfrak{б})X'' + h'$ reducitur, $X''$ erit functio ordinis $n-2$ cum coëfficientibus integris. Si vero $\mathfrak{б}$ supponitur esse radix congruentiae $X \equiv 0$, etiam satisfacere debet huic $(\mathfrak{б}-\alpha)X' \equiv 0$, nec non huic $X' \equiv 0$, siquidem radices $\alpha$, $\mathfrak{б}$ sunt incongruae, unde colligimus, etiam $h'$ per $m$ divisibilem esse debere, sive indefinite $X \equiv (x-\alpha)(x-\mathfrak{б})X''$ (mod. $m$).

Simili modo accedente radice tertia $\gamma$ prioribus incongrua, habebimus indefinite $X \equiv (x-\alpha)(x-\mathfrak{б})(x-\gamma)X'''$, ita ut $X'''$ sit functio ordinis $n-3$ cum coëfficientibus integris. Eodem modo ulterius procedere licet, patetque simul, coëfficientem termini altissimi in singulis functionibus esse $= A$, quem per $m$ non divisibilem esse supponere licet, alioquin enim congruentia $X \equiv 0$ essentialiter ad ordinem inferiorem referenda esset. Quoties itaque adsunt $n$ radices incongruae, puta $\alpha, \mathfrak{б}, \gamma \ldots . \nu$, habebimus indefinite

$$X \equiv A(x-\alpha)(x-\mathfrak{б})(x-\gamma) \ldots . (x-\nu) \text{ (mod. } m)$$

quapropter substitutio novi valoris singulis $\alpha, \mathfrak{б}, \gamma \ldots . \nu$ incongrui certo ipsi $X$ valorem per $m$ non divisibilem conciliaret, unde theorematis veritas sponte sequitur.

Ceterum haec demonstratio essentialiter convenit cum ea, quam in *Disq. Ar.* art. 43 tradidimus, et cuius singula momenta pro numeris complexis perinde valent ac pro realibus.

51.

Quae in Sectione tertia *Disquisitionum Arithmeticarum* circa residua potestatum tradita sunt, ad maximam partem, levibus mutationibus adhibitis, etiam in arithmetica numerorum complexorum valent: quinadeo demonstrationes theorematum plerumque retineri possent. Ne tamen quid desit, theoremata principalia demonstrationibus concisis firmata proferemus, ubi semper subintelligendum est, modulum esse numerum primum.

Theorema. *Denotante $k$ integrum per modulum $m$, cuius norma $= p$, non divisibilem, erit $k^{p-1} \equiv 1$ (mod. $m$).*

*Demonstr.* Constituant $a, b, c$ etc. systema completum residuorum incongruorum pro modulo $m$, ita tamen, ut residuum per $m$ divisibile omissum sit, adeoque multitudo illorum numerorum, quorum complexum denotamus per $C$, sit $= p-1$. Sit porro $C'$ complexus productorum $ka, kb, kc$ etc. Ex his productis per hyp. nullum erit divisibile per $m$, quare singula habebunt residua congrua in complexu $C$, puta fieri poterit $ak \equiv a'$, $bk \equiv b'$, $ck \equiv c'$ etc. (mod. $m$), ita ut numeri $a', b', c'$ etc. ipsi in complexu $C$ inveniantur: denotemus complexum numerorum $a', b', c'$ etc. per $C''$. Sint $P, P', P''$ producta e singulis numeris complexuum $C, C', C''$ resp., sive

$$P = abc \ldots .$$
$$P' = k^{p-1}abc \ldots . = k^{p-1}P$$
$$P'' = a'b'c' \ldots .$$

Quum numeri complexus $C''$ deinceps congrui sint numeris complexus $C'$, erit $P'' \equiv P'$ sive $P'' \equiv k^{p-1}P$. At quum facile perspiciatur, binos quosvis numeros complexus $C''$ inter se incongruos, adeoque omnes inter se diversos esse, necessario numeri complexus $C''$ cum numeris complexus $C$ prorsus conveniunt, ordine tantummodo mutato, unde fit $P'' = P$. Erit itaque $(k^{p-1}-1)P$ numerus per $m$ divisibilis, unde, quum $m$ sit numerus primus singulos factores ipsius $P$ non metiens, necessario $k^{p-1}-1$ per $m$ divisibilis esse debebit. Q. E. D.

52.

Theorema. *Denotante $k$, ut in art. praec., integrum per modulum $m$ non divisibilem, atque $t$ exponentem minimum (praeter 0), pro quo $k^t \equiv 1$ (mod. $m$), erit $t$ divisor cuiusvis alius exponentis $u$, pro quo $k^u \equiv 1$ (mod. $m$).*

*Demonstr.* Si $t$ non esset divisor ipsius $u$, sit $gt$ multiplum ipsius $u$ proxime maius quam $u$, adeoque $gt-u$ integer positivus minor quam $t$. Ex $k^t \equiv 1$, $k^u \equiv 1$, sequitur $0 \equiv k^{gt}-k^u \equiv k^u(k^{gt-u}-1)$, adeoque $k^{gt-u} \equiv 1$, i. e. datur potestas ipsius $k$ cum exponente minori quam $t$ unitati congrua, contra hyp.

Tamquam corollarium hinc sequitur, $t$ certo metiri numerum $p-1$.

Numeros tales $k$, pro quibus $t=p-1$, etiam hic *radices primitivas* pro modulo $m$ vocabimus: quales revera adesse iam ostendemus.

53.

Resolvatur numerus $p-1$ in factores suos primos, ita ut habeatur

$$p-1 = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots .$$

designantibus $a, b, c$ etc. numeros primos reales positivos inaequales. Sint $A, B, C$ etc. integri (complexi) per $m$ non divisibiles, atque resp. congruentiis

$$x^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \quad x^{\frac{p-1}{b}} \equiv 1, \quad x^{\frac{p-1}{c}} \equiv 1 \text{ etc.}$$

secundum modulum $m$ *non* satisfacientes, quales dari e theoremate art. 50 manifestum est. Denique sit $h$ congruus secundum modulum $m$ producto

$$A^{\frac{p-1}{a^\alpha}} B^{\frac{p-1}{b^\beta}} C^{\frac{p-1}{c^\gamma}} \ldots .$$

Tunc dico, $h$ fore radicem primitivam.

*Demonstr.* Denotando per $t$ exponentem infimae potestatis $h^t$ unitati congruae, erit, si $h$ non esset radix primitiva, $t$ submultiplum ipsius $p-1$, sive $\frac{p-1}{t}$ integer unitate maior. Manifesto hic integer factores suos primos reales inter hos $a, b, c$ etc. habebit: supponamus itaque, (quod licet), $\frac{p-1}{t}$ esse divisibilem per $a$, statuamusque $p-1 = atu$. Erit itaque, propter $h^t \equiv 1$, etiam $h^{tu} \equiv 1$ sive

$$A^{\frac{p-1}{a^\alpha}\cdot\frac{p-1}{a}} B^{\frac{p-1}{b^\beta}\cdot\frac{p-1}{a}} C^{\frac{p-1}{c^\gamma}\cdot\frac{p-1}{a}} \ldots \equiv 1$$

At manifesto $\frac{p-1}{ab^\beta}$ est integer, adeoque

$$B^{\frac{p-1}{b^\beta}\cdot\frac{p-1}{a}} = (B^{p-1})^{\frac{p-1}{ab^\beta}} \equiv 1$$

perinde etiam

$$C^{\frac{p-1}{c^\gamma}\cdot\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \text{ et sic porro; quapropter esse debet } A^{\frac{p-1}{a^\alpha}\cdot\frac{p-1}{a}} \equiv 1$$

Iam determinetur integer positivus $\lambda$ talis, ut fiat

$$\lambda b^\beta c^\gamma \ldots \equiv 1 \,(\text{mod.}\, a)$$

quod fieri poterit, quum numerus primus $a$ ipsum $b^\beta c^\gamma \ldots$ non metiatur, statuaturque $\lambda b^\beta c^\gamma \ldots = 1 + a\mu$. Manifesto fit

$$A^{\lambda\cdot\frac{p-1}{a^\alpha}\cdot\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \text{ sive, quoniam } \lambda\cdot\frac{p-1}{a^\alpha}\cdot\frac{p-1}{a} = (1+a\mu)\frac{p-1}{a} = (p-1)\mu + \frac{p-1}{a}$$

habemus $A^{(p-1)\mu}\cdot A^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1$, atque hinc, quum sponte sit $A^{(p-1)\mu} \equiv 1$, etiam $A^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1$, quod est contra hypothesin. Suppositio itaque, $t$ esse submultiplum ipsius $p-1$, consistere nequit, eritque adeo necessario $h$ radix primitiva.

54.

Denotante $h$ radicem primitivam pro modulo $m$, cuius norma $= p$, termini progressionis

$$1,\ h,\ hh,\ h^3 \ldots h^{p-2}$$

inter se incongrui erunt, unde facile colligitur, quemlibet integrum non divisibilem per modulum uni ex istis congruum esse debere, sive illam seriem exhibere systema completum residuorum incongruorum exclusa cifra. Exponens eius potestatis, cui numerus datus congruus est, vocari potest huius *index*, dum $h$ tamquam *basis* consideratur. Ecce quaedam exempla, ubi cuivis indici residuum absolute minimum apposuimus.

*Exemplum primum.*

$m = 5+4i,\ p = 41,\ h = 1+2i$

| Ind. | Residuum | Ind. | Residuum | Ind. | Residuum | Ind. | Residuum | Ind. | Residuum |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $+1$ | 8 | $-4$ | 16 | $-2+2i$ | 24 | $+2i$ | 32 | $+1+i$ |
| 1 | $+1+2i$ | 9 | $-3+i$ | 17 | $-1+2i$ | 25 | $-3i$ | 33 | $+1+3i$ |
| 2 | $+1-i$ | 10 | $-i$ | 18 | $+4i$ | 26 | $+2+2i$ | 34 | $+2$ |
| 3 | $+3+i$ | 11 | $+2-i$ | 19 | $+1+3i$ | 27 | $+2+i$ | 35 | $-3$ |
| 4 | $-2i$ | 12 | $-1-i$ | 20 | $-1$ | 28 | $+4$ | 36 | $+2-2i$ |
| 5 | $+3i$ | 13 | $+1-3i$ | 21 | $-1-2i$ | 29 | $+3-i$ | 37 | $+1-2i$ |
| 6 | $-2-2i$ | 14 | $-2$ | 22 | $-1+i$ | 30 | $+i$ | 38 | $-4i$ |
| 7 | $-2-i$ | 15 | $+3$ | 23 | $-3-i$ | 31 | $-2+i$ | 39 | $-1-3i$ |

*Exemplum secundum.*

$m = 7,\ p = 49,\ h = 1 + 2i$

| Ind. | Residuum | Ind. | Residuum | Ind. | Residuum | Ind. | Residuum | Ind. | Residuum |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $+1$ | 10 | $-1-i$ | 20 | $+2i$ | 30 | $+2-2i$ | 40 | $+3$ |
| 1 | $+1+2i$ | 11 | $+1-3i$ | 21 | $+3+2i$ | 31 | $-1+2i$ | 41 | $+3-i$ |
| 2 | $-3-3i$ | 12 | $-i$ | 22 | $-1+i$ | 32 | $+2$ | 42 | $-2-2i$ |
| 3 | $+3-2i$ | 13 | $+2-i$ | 23 | $-3-i$ | 33 | $+2-3i$ | 43 | $+2+i$ |
| 4 | $-3i$ | 14 | $-3+3i$ | 24 | $-1$ | 34 | $+1+i$ | 44 | $-2i$ |
| 5 | $-1-3i$ | 15 | $-2-3i$ | 25 | $-1-2i$ | 35 | $-1+3i$ | 45 | $-3-2i$ |
| 6 | $-2+2i$ | 16 | $-3$ | 26 | $+3+3i$ | 36 | $+i$ | 46 | $+1-i$ |
| 7 | $+1-2i$ | 17 | $-3+i$ | 27 | $-3+2i$ | 37 | $-2+i$ | 47 | $+3+i$ |
| 8 | $-2$ | 18 | $+2+2i$ | 28 | $+3i$ | 38 | $+3-3i$ | | |
| 9 | $-2+3i$ | 19 | $-2-i$ | 29 | $+1+3i$ | 39 | $+2+3i$ | | |

55.

Adiicimus circa radices primitivas et algorithmum indicum quasdam observationes, demonstrationibus propter facilitatem omissis.

I. Indices secundum modulum $p-1$ congrui in systemate dato residuis secundum modulum $m$ congruis respondent et vice versa.

II. Residua, quae respondent indicibus ad $p-1$ primis, etiam sunt radices primitivae et vice versa.

III. Si accepta radice primitiva $h$ pro basi, radicis alius primitivae $h'$ index est $t$, et vice versa $t'$ index ipsius $h$, dum $h'$ pro basi accipitur, erit $tt' \equiv 1$ (mod. $p-1$); et si iisdem positis indices cuiusdam alius numeri in his duobus systematibus resp. sunt $u$, $u'$, erit $tu' \equiv u$, $t'u \equiv u'$ (mod. $p-1$).

IV. Dum numeri $1$, $1+i$ eorumque terni socii (tamquam nimis ieiuni) a modulis nobis considerandis excluduntur, restant numeri primi ii, quos in art. 34 tertio et quarto loco posuimus. Posteriorum normae erunt numeri primi reales formae $4n+1$; priorum normae autem quadrata numerorum primorum realium imparium: in utroque igitur casu $p-1$ per $4$ divisibilis est.

V. Denotando indicem numeri $-1$ per $u$, erit $2u \equiv 0$ (mod. $p-1$), adeoque vel $u \equiv 0$, vel $u \equiv \frac{1}{2}(p-1)$: at quum index $0$ respondeat residuo $+1$, index numeri $-1$ necessario debet esse $\frac{1}{2}(p-1)$.

VI. Perinde denotando per $u$ indicem numeri $i$, erit $2u \equiv \frac{1}{2}(p-1)$ (mod. $p-1$), adeoque vel $u \equiv \frac{1}{4}(p-1)$ vel $u \equiv \frac{3}{4}(p-1)$. Sed hic ambiguitas ab electione radicis primitivae pendet. Scilicet si radice primitiva $h$ pro basi ac-

cepta index numeri $i$ est $\frac{1}{4}(p-1)$, index fiet $\frac{3}{4}(p-1)$, dum pro basi accipitur $h^{\mu}$, designante $\mu$ integrum positivum formae $4n+3$ ad $p-1$ primum, e. g. ipsum numerum $p-2$, et vice versa. Quare semissis altera radicum primitivarum conciliat numero $i$ indicem $\frac{1}{4}(p-1)$, altera indicem $\frac{3}{4}(p-1)$, manifestoque pro illis basibus $-i$ indicem $\frac{3}{4}(p-1)$, pro his indicem $\frac{1}{4}(p-1)$ habebit.

VII. Quoties modulus est numerus primus realis positivus formae $4n+3$, puta $=q$, adeoque $p=qq$, indices omnium numerorum realium per $q+1$ divisibiles erunt; denotante enim $t$ indicem numeri realis $k$, erit, propter $k^{q-1}\equiv 1$ (mod. $q$), $(q-1)t\equiv 0$ (mod. $qq-1$), adeoque $\frac{t}{q+1}$ integer. Perinde indices numerorum pure imaginariorum ut $ki$ per $\frac{1}{2}(q+1)$ divisibiles erunt. Patet itaque, radices primitivas pro talibus modulis inter solos numeros mixtos quaerendas esse.

VIII. Contra pro modulo $m$, qui est numerus primus complexus mixtus, (cuiusque proin norma $p$ est numerus primus realis formae $4n+1$), radices primitivae quaelibet etiam inter numeros reales eligi possunt, inter quos completum adeo systema residuorum incongruorum monstrare licet (art. 40). Manifesto autem quilibet numerus realis, qui est radix primitiva pro modulo complexo $m$, simul erit in arithmetica numerorum realium radix primitiva pro modulo $p$, et vice versa.

56.

Etiamsi theoria residuorum et non-residuorum quadraticorum in arithmetica numerorum complexorum sub ipsa theoria residuorum biquadraticorum contenta sit, tamen antequam ad hanc transeamus, illius theoremata palmaria hic seorsim proferemus: brevitatis vero caussa de solo casu principali, ubi modulus est numerus primus complexus (impar), hic loquemur.

Sit $m$ talis modulus, atque $p$ eius norma. Manifesto quivis integer (per $m$ non divisibilis, quod hic semper subintelligendum) quadrato secundum modulum $m$ congruus fieri vel potest vel non potest, prout illius index, radice aliqua primitiva pro basi accepta, par est vel impar; in casu priori ille integer residuum quadraticum ipsius $m$ dicetur, in posteriori non-residuum. Hinc concluditur, inter $p-1$ numeros qui systema completum residuorum incongruorum (per $m$ non divisibilium) exhibeant, semissem ad residua quadratica, semissem alteram ad non-residua quadratica referri. Cuivis vero alii numero extra illud systema idem

character hoc respectu tribuendus est, quo gaudet numerus systematis illi congruus.

Porro ibinde sequitur, productum e duobus residuis quadraticis, nec non productum e duobus non-residuis esse residuum quadraticum; contra productum e residuo quadratico in non-residuum fieri non-residuum; et generaliter productum e quotcunque factoribus esse residuum quadraticum vel non-residuum, prout multitudo non-residuorum inter factores par sit vel impar.

Pro distinguendis residuis quadraticis a non-residuis statim se offert criterium generale sequens:

Numerus $k$ per modulum non divisibilis huius residuum vel non-residuum quadraticum est, prout habetur vel $k^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1$, vel $k^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1$ (mod. $m$).

Veritas huius theorematis statim inde sequitur, quod, accepta radice primitiva quacunque pro basi, index potestatis $k^{\frac{1}{2}(p-1)}$ fit vel $\equiv 0$ vel $\equiv \frac{1}{2}(p-1)$, prout index numeri $k$ par est vel impar.

57.

Facile quidem est, pro modulo dato systema residuorum incongruorum completum in duas classes, puta residua et non-residua quadratica distinguere, quo pacto simul omnibus reliquis numeris classes suae sponte assignantur. At longe altioris indaginis est quaestio de criteriis ad distinguendum modulos eos, pro quibus numerus datus est residuum quadraticum, ab iis, pro quibus est non-residuum.

Quod quidem attinet ad unitates reales $+1$ et $-1$, hae in arithmetica numerorum complexorum sunt reapse quadrata, adeoque etiam residua quadratica pro *quovis* modulo. Aeque facile e criterio art. praec. sequitur, numerum $i$ (et perinde $-i$) esse residuum quadraticum cuiusvis moduli, cuius norma $p$ sit formae $8n+1$, non-residuum vero cuiusvis moduli, cuius norma sit formae $8n+5$. Quum manifesto nihil intersit, utrum numerus $m$, an aliquis numerorum ipsi associatorum $im$, $-m$, $-im$ pro modulo adoptetur, supponere licebit, modulum esse associatorum primarium (art. 36, II), adeoque statuendo modulum $= a+bi$, esse $a$ imparem, $b$ parem. Quo pacto quum semper sit $aa \equiv 1$ (mod. 8), $bb$ vero vel $\equiv 0$ vel $\equiv 4$ (mod. 8), prout $b$ sit pariter par vel impariter par, patet numeros $+i$ et $-i$ in casu priori esse residua quadratica moduli, in posteriori non-residua.

58.

Quum diiudicatio characteris numeri compositi, utrum sit residuum quadraticum an non-residuum, pendeat a characteribus factorum, manifesto sufficiet, si evolutionem criteriorum ad distinguendos modulos, pro quibus numerus datus $k$ sit residuum quadraticum, ab iis, pro quibus sit non-residuum, ad tales valores ipsius $k$ limitemus, qui sint numeri primi, insuperque inter associatos primarii. In qua investigatione *inductio* protinus theoremata maxime elegantia suppeditat.

Incipiamus a numero $1+i$, qui invenitur esse residuum quadraticum modulorum

$-1+2i$, $+3-2i$, $-5-2i$, $-1-6i$, $+5+4i$, $+5-4i$, $-7$, $+7+2i$, $-5+6i$, etc.

non-residuum quadraticum autem sequentium

$-1-2i$, $-3$, $+3+2i$, $+1+4i$, $+1-4i$, $-5+2i$, $-1+6i$, $+7-2i$, $-5-6i$, $-3+8i$, $-3-8i$, $+5+8i$, $+5-8i$, $+9+4i$, $+9-4i$ etc.

Si hunc conspectum, in quo semper e quaternis modulis associatis primarium apposuimus, attente examinamus, facile animadvertimus, modulos $a+bi$ in priori classe omnes esse tales, pro quibus $a+b$ fiat $\equiv +1$ (mod. 8), in posteriori vero tales, pro quibus $a+b \equiv -3$ (mod. 8). Manifesto hoc criterium, si loco moduli primarii $m$ adoptamus associatum $-m$, ita immutari debet, ut pro modulis prioris classis sit $a+b \equiv -1$, pro modulis posterioris $\equiv +3$ (mod. 8). Quare, siquidem inductio non fefellerit, generaliter, designante $a+bi$ numerum primum, in quo $a$ impar, $b$ par, $1+i$ fit eius residuum quadraticum vel non-residuum quadraticum, prout $a+b \equiv \pm 1$, vel $\equiv \pm 3$ (mod. 8).

Pro numero $-1-i$ eadem regula valet, quae pro $1+i$. Contra considerando $1-i$ tamquam productum ex $-i$ in $1+i$, manifestum est, numero $1-i$ eundem characterem competere, qui tribuendus sit ipsi $1+i$, quoties $b$ sit pariter par, oppositum autem, quoties $b$ sit impariter par, unde facile colligitur, $1-i$ esse residuum quadraticum numeri primi $a+bi$, quoties sit $a-b \equiv \pm 1$, non-residuum autem, quoties habeatur $a-b \equiv \pm 3$ (mod. 8), semper supponendo, $a$ esse imparem, $b$ parem.

Ceterum haec secunda propositio e priori etiam deduci potest adiumento theorematis generalioris, quod ita enunciamus:

In theoria residuorum quadraticorum character numeri $\alpha+\beta i$ respectu moduli $a+bi$ idem est, qui numeri $\alpha-\beta i$ respectu moduli $a-bi$.

Demonstratio huius theorematis inde petitur, quod uterque modulus eandem normam $p$ habet, atque quoties $(\alpha+\beta i)^{\frac{1}{4}(p-1)}-1$ per $a+bi$ divisibilis est, etiam $(\alpha-\beta i)^{\frac{1}{4}(p-1)}-1$ per $a-bi$ divisibilis evadit, quoties autem $(\alpha+\beta i)^{\frac{1}{4}(p-1)}+1$ per $a+bi$ divisibilis est, etiam $(\alpha-\beta i)^{\frac{1}{4}(p-1)}+1$ per $a-bi$ divisibilis esse debet.

59.

Progrediamur ad numeros primos impares.

Numerum $-1+2i$ invenimus esse residuum quadraticum modulorum $+3+2i$, $+1-4i$, $-5+2i$, $-5-2i$, $-1-6i$, $+7-2i$, $-3+8i$, $+5+8i$, $+5-8i$, $+9+4i$ etc.

non-residuum autem modulorum $-1-2i$, $-3$, $+3-2i$, $+1+4i$, $-1+6i$, $+5+4i$, $+5-4i$, $-7$, $+7+2i$, $-5+6i$, $-5-6i$, $-3-8i$, $+9-4i$ etc.

Reducendo modulos prioris classis ad residua eorum absolute minima secundum modulum $-1+2i$, haec sola invenimus $+1$ et $-1$, puta $+3+2i\equiv-1$, $+1-4i\equiv-1$, $-5+2i\equiv+1$, $-5-2i\equiv-1$ etc.

Contra omnes moduli posterioris classis congrui inveniuntur secundum modulum $-1+2i$ vel ipsi $+i$, vel ipsi $-i$.

At numeri $+1$, $-1$ ipsi sunt residua quadratica moduli $-1+2i$, atque $+i$ et $-i$ eiusdem non-residua: quocirca, quatenus inductioni fidem habere licet, prodit theorema: Numerus $-1+2i$ est residuum vel non-residuum quadraticum numeri primi $a+bi$, prout hic est residuum vel non-residuum quadraticum ipsius $-1+2i$, siquidem $a+bi$ est primarius e quaternis associatis, vel potius, si $a$ est impar, $b$ par.

Ceterum ex hoc theoremate sponte sequuntur theoremata analoga circa numeros $+1-2i$, $-1-2i$, $+1+2i$.

60.

Instituendo similem inductionem circa numerum $-3$ vel $+3$, invenimus, utrumque esse residuum quadraticum modulorum $+3+2i$, $+3-2i$,

$-1+6i$, $-1-6i$, $-7$, $-5+6i$, $-5-6i$, $-3+8i$, $-3-8i$, $+9+4i$, $+9-4i$ etc.

non-residuum vero horum $-1+2i$, $-1-2i$, $+1+4i$, $+1-4i$, $-5+2i$, $-5-2i$, $+5+4i$, $+5-4i$, $+7+2i$, $+7-2i$, $+5+8i$, $+5-8i$ etc.

Priores secundum modulum 3 congrui sunt alicui ex his quatuor numeris $+1$, $-1$, $+i$, $-i$; posteriores autem alicui ex his $+1+i$, $+1-i$, $-1+i$, $-1-i$. Illi sunt ipsa residua quadratica numeri 3, hi non-residua.

Docet itaque haec inductio, numerum primum $a+bi$, supponendo $a$ imparem, $b$ parem, ad numerum $-3$ (nec non ad $+3$) eandem relationem habere, quam hic habet ad illum, quatenus scilicet alter alterius residuum quadraticum sit aut non-residuum.

Extendendo similem inductionem ad alios numeros primos, ubique hanc elegantissimam reciprocitatis legem confirmatam invenimus, deferimurque ad theorema hocce fundamentale circa residua quadratica in arithmetica numerorum complexorum.

*Denotantibus $a+bi$, $A+Bi$ numeros primos tales, ut $a$, $A$ sint impares, $b$, $B$ pares: erit vel uterque alterius residuum quadraticum, vel uterque alterius non-residuum.*

At non obstante summa theorematis simplicitate, ipsius demonstratio magnis difficultatibus premitur, quibus tamen hic non immoramur, quum theorema ipsum sit tantummodo casus specialis theorematis generalioris, summam theoriae residuorum biquadraticorum quasi exhaurientis. Ad hanc igitur iam transeamus.

## 61.

Quae in art. 2 prioris commentationis de notione residui et non-residui biquadratici prolata sunt, etiam ad arithmeticam numerorum complexorum extendimus, et perinde ut illic etiam hic disquisitionem ad modulos tales, qui sunt numeri primi, restringimus: simul plerumque tacite subintelligendum erit, modulum ita accipi, ut sit inter associatos primarius, puta $\equiv 1$ secundum modulum $2+2i$, nec non numeros, de quorum charactere (quatenus sint residua biquadratica vel non-residua) agitur, per modulum non esse divisibiles.

Pro modulo itaque dato numeri per eum non divisibiles in tres classes dispertiri possent, quarum prima contineret residua biquadratica, secunda non-residua biquadratica ea, quae sunt residua quadratica, tertia non-residua quadratica.

Sed hic quoque praestat, loco tertiae classis binas stabilire, ut omnino habeantur quaternae.

Assumta radice quacunque primitiva pro basi, residua biquadratica habebunt indices per 4 divisibiles sive formae $4n$; non-residua ea, quae sunt residua quadratica, habebunt indices formae $4n+2$; denique non-residuorum quadraticorum indices erunt partim formae $4n+1$, partim formae $4n+3$. Hoc modo classes quaternae quidem oriuntur, at distinctio inter binas posteriores non esset absoluta, sed ab electione radicis primitivae pro basi assumtae dependens; facile enim perspicitur, semissem radicum primitivarum non-residuo quadratico dato conciliare indicem formae $4n+1$, semissem alteram vero indicem formae $4n+3$. Quam ambiguitatem ut tollamus, supponemus semper talem radicem primitivam adoptari, pro qua index $\frac{1}{4}(p-1)$ competat numero $+i$ (conf. art. 55. VI). Hoc pacto classificatio oritur, quam concinnius independenter a radicibus primitivis ita enunciare possumus.

Classis *prima* contineat numeros $k$ eos, pro quibus fit $k^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv 1$: hi numeri sunt moduli residua biquadratica.

Classis *secunda* contineat eos, pro quibus $k^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv i$.

Classis *tertia* eos, pro quibus $k^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv -1$.

Classis *quarta* denique eos, pro quibus $k^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv -i$.

Classis tertia comprehendet non-residua biquadratica ea, quae sunt residua quadratica; inter secundam et quartam non-residua quadratica distributa erunt.

Numeris harum classium tribuemus resp. *characteres biquadraticos* 0, 1, 2, 3. Si characterem $\lambda$ numeri $k$ secundum modulum $m$ ita definimus, ut sit exponens eius potestatis ipsius $i$, cui numerus $k^{\frac{1}{4}(p-1)}$ congruus est, manifesto characteres secundum modulum 4 congrui pro aequivalentibus habendi sunt. Ceterum haec notio tantisper ad modulos eos limitatur, qui sunt numeri primi: in continuatione harum disquisitionum ostendemus, quomodo etiam modulis compositis adaptari possit.

## 82.

Quo facilius inductio copiosa circa numerorum characteres adstrui possit, tabulam compendiosam hic adiungimus, cuius auxilio character cuiusvis numeri propositi respectu moduli, cuius norma valorem 157 non transscendit, levi opera obtinetur, dummodo ad observationes sequentes attendatur.

Quum character numeri compositi aequalis sit (sive secundum modulum 4 congruus) aggregato characterum singulorum factorum, sufficit, si pro modulo dato characteres numerorum primorum assignare possumus. Porro quum characteres unitatum $-1$, $i$, $-i$ manifesto sint congrui numeris $\frac{1}{4}(p-1)$, $\frac{1}{4}(p-1)$, $\frac{3}{4}(p-1)$ secundum modulum 4, etiam sufficiet, characteres numerorum inter associatos primariorum exhibuisse. Denique quum moduli secundum modulum $m$ congrui eundem characterem habeant, sufficit, characteres talium numerorum in tabulam recipere, qui continentur in systemate residuorum absolute minimorum. Praeterea per ratiocinium simile ut in art. 58 demonstratur, si pro modulo $a+bi$ character numeri $A+Bi$ sit $\lambda$, pro modulo $a-bi$ autem $\lambda'$, sit character numeri $A-Bi$, semper esse $\lambda \equiv -\lambda' (\text{mod. } 4)$, sive $\lambda+\lambda'$ per 4 divisibilem: quapropter sufficit, in tabulam recipere modulos, in quibus $b$ est vel 0 vel positivus.

Ita e. g. si quaeritur character numeri $11-6i$ respectu moduli $-5-6i$, substituimus loco horum numerorum hosce $11+6i$, $-5+6i$; dein determinamus (art. 43) residuum absolute minimum numeri $11+6i$ secundum modulum $-5+6i$, quod fit $-1-4i = -1\times(1+4i)$; quare quum pro modulo $-5+6i$ character ipsius $-1$ sit 30, character numeri $1+4i$ autem, ex tabula, 2, erit 32 sive 0 character numeri $11+6i$ pro modulo $-5+6i$, et proin per observationem ultimam etiam character numeri $11-6i$ pro modulo $-5-6i$. Perinde si quaeritur character numeri $-5+6i$ respectu moduli $11+6i$, illius residuum absolute minimum $1-5i$ resolvitur in factores $-i$, $1+i$, $3-2i$, quibus respondent characteres 117, 0, 1, unde character quaesitus erit 118 sive 2; idem character etiam numero $-5-6i$ respectu moduli $11-6i$ tribuendus est.

| Modulus. | Character. | Numeri. |
|---|---|---|
| $-3$ | 3 | $1+i$ |
| $+3+2i$ | 3 | $1+i$ |
| $+1+4i$ | 1 | $-1+2i$ |
| | 3 | $1+i$ |
| $-5+2i$ | 0 | $-1-2i$ |
| | 1 | $1+i$ |
| | 2 | $-1+2i$ |
| $-1+6i$ | 0 | $-3$ |
| | 1 | $1+i$, $-1+2i$ |

| Modulus. | Character. | Numeri. |
|---|---|---|
| $-1+6i$ | 2 | $-1-2i$ |
| $+5+4i$ | 0 | $1+i$ |
| | 1 | $-3$ |
| | 3 | $-1+2i,\ -1-2i$ |
| $-7$ | 0 | $-3$ |
| | 1 | $-1+2i,\ -3-2i$ |
| | 2 | $1+i$ |
| | 3 | $-1-2i$ |
| $+7+2i$ | 0 | $1+i,\ 3+2i,\ 3\quad 2i,\ 1-4i$ |
| | 1 | $-3$ |
| | 2 | $-1-2i,\ 1+4i$ |
| | 3 | $-1+2i$ |
| $-5+6i$ | 0 | $1+i,\ -3,\ 3+2i,\ 3-2i$ |
| | 1 | $1-4i$ |
| | 2 | $1+4i$ |
| | 3 | $-1+2i,\ -1-2i$ |
| $-3+8i$ | 0 | $-1+2i,\ 3-2i,\ 1-4i$ |
| | 1 | $1+i,\ 3+2i$ |
| | 2 | $-3$ |
| | 3 | $-1-2i,\ 1+4i,\ -5+2i$ |
| $+5+8i$ | 0 | $-1-2i$ |
| | 1 | $-5-2i,\ -1+6i$ |
| | 2 | $-1+2i,\ 3-2i$ |
| | 3 | $1+i,\ -3,\ 3+2i,\ 1+4i,\ 1-4i$ |
| $+9+4i$ | 0 | $-1+2i,\ 3+2i$ |
| | 1 | $1+i,\ -1-2i,\ 3-2i$ |
| | 2 | $-3,\ 1+4i$ |
| | 3 | $1-4i,\ -5+2i$ |
| $-1+10i$ | 0 | $1+i,\ -1+2i,\ -1-2i,\ 3+2i$ |
| | 1 | $-3$ |
| | 2 | $3-2i,\ -5+2i,\ 5-4i$ |
| | 3 | $1+4i,\ 1-4i$ |

| Modulus. | Character. | Numeri. |
|---|---|---|
| $+3+10i$ | 1 | $1+i,\ -1-2i,\ 1-4i$ |
| | 2 | $-3,\ 3+2i,\ 1+4i,\ -5-2i$ |
| | 3 | $-1+2i,\ 3-2i$ |
| $-7+8i$ | 0 | $1+i,\ -7$ |
| | 1 | $3+2i,\ 3-2i,\ 1-4i,\ -5-2i$ |
| | 2 | $-1-2i,\ 1+4i,\ -5+2i,\ -1-6i$ |
| | 3 | $-1+2i,\ -3,\ -1+6i$ |
| $-11$ | 0 | $-3$ |
| | 1 | $1+i,\ 3-2i,\ 1+4i,\ -5+2i,\ 5+4i$ |
| | 2 | $-1+2i,\ -1-2i$ |
| | 3 | $3+2i,\ 1-4i,\ -5-2i,\ 5-4i$ |
| $-11+4i$ | 0 | $1+i,\ -1+2i,\ 3+2i,\ 5+4i$ |
| | 1 | $-1-2i,\ -1+6i$ |
| | 2 | $-5+2i$ |
| | 3 | $-3,\ 3-2i,\ 1+4i,\ 1-4i,\ -5-2i$ |
| $+7+10i$ | 0 | $1+4i,\ 1-4i,\ -1+6i,\ -1-6i$ |
| | 1 | $-1+2i,\ 3+2i,\ -5+2i$ |
| | 2 | $1+i,\ 3-2i$ |
| | 3 | $-1-2i,\ -3,\ -5,\ -2i$ |
| $+11+6i$ | 0 | $1+i,\ -1+2i,\ -3,\ 1+4i,\ 1-4i,\ -7$ |
| | 1 | $-1-2i,\ 3+2i,\ 3-2i$ |
| | 2 | $-5-2i,\ -1+6i,\ 5-4i$ |
| | 3 | $-5+2i,\ 5+4i,\ 7-2i$ |

## 63.

Operam nunc dabimus, ut criteria communia modulorum, pro quibus numerus primus datus characterem eundem habet, per inductionem detegamus. Modulos semper supponimus primarios inter associatos, puta tales $a+bi$, pro quibus vel $a\equiv 1$, $b\equiv 0$; vel $a\equiv 3$, $b\equiv 2$ (mod. 4).

Respectu numeri $1+i$, a quo initium facimus, inductionis lex facilius arripitur, si modulos prioris generis (pro quibus $a\equiv 1$, $b\equiv 0$) a modulis posterioris generis (pro quibus $a\equiv 3$, $b\equiv 2$) separamus. Adiumento tabulae art. praec. invenimus respondere

| characterem | modulis primi generis. |
|---|---|
| 0 | $5+4i$, $-7+8i$, $-7-8i$, $-11+4i$ |
| 1 | $1-4i$, $-3+8i$, $-3-8i$, $9+4i$, $-11$ |
| 2 | $5-4i$, $-7$, $-11-4i$ |
| 3 | $-3$, $1+4i$, $5+8i$, $5-8i$, $9-4i$ |

Si haec septemdecim exempla attente consideramus, in omnibus invenimus characterem $\equiv \frac{1}{4}(a-b-1)$ (mod. 4).

Perinde respondet

| character | modulis secundi generis. |
|---|---|
| 0 | $3-2i$, $-1-6i$, $7+2i$, $-5+6i$, $-1+10i$, $11+6i$ |
| 1 | $-5+2i$, $-1+6i$, $7-2i$, $-1-10i$, $3+10i$ |
| 2 | $-1+2i$, $-5-2i$, $3-10i$, $7+10i$ |
| 3 | $-1-2i$, $3+2i$, $-5-6i$, $7-10i$, $11-6i$ |

In omnibus his viginti exemplis, levi attentione adhibita, invenitur character $\equiv \frac{1}{4}(a-b-5)$ (mod. 4).

Facile has duas regulas in unam pro utroque modulorum genere valentem contrahere licet, si perpendimus, $\frac{1}{4}bb$ esse pro modulis prioris generis $\equiv 0$, pro modulis posterioris generis $\equiv 1$ (mod. 4). Est itaque character numeri $1+i$ respectu moduli cuiusvis primi inter associatos primarii $\equiv \frac{1}{4}(a-b-1-bb)$ (mod. 4).

Obiter hic annotare convenit, quum $(b+1)^2$ semper sit formae $8n+1$, sive $\frac{1}{4}(2b+bb)$ par, characterem istum semper parem vel imparem fieri, prout $\frac{1}{4}(a+b-1)$ par sit vel impar, quod quadrat cum regula pro charactere quadratico in art. 58 prolata.

Quum $\frac{1}{4}(a-b-1)$, $\frac{1}{4}(a-b+3)$ sint integri, quorum alter par, alter impar, ipsorum productum par erit, sive $\frac{1}{8}(a-b-1)(a-b+3) \equiv 0$ (mod. 4). Hinc loco expressionis allatae pro charactere biquadratico haec quoque adoptari potest

$$\tfrac{1}{4}(a-b-1-bb)-\tfrac{1}{8}(a-b-1)(a-b+3) = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab-3bb+1)$$

quae forma eo quoque nomine se commendat, quod non restringitur ad modulos primarios, sed tantummodo supponit, $a$ esse imparem, $b$ parem: manifesto enim in hac suppositione vel $a+bi$, vel $-a-bi$ erit numerus inter associatos primarius, valorque istius formulae pro utroque modulo idem.

## 64.

Proficiscendo a regula ultima in art. praec. eruta invenimus esse

| numeri | characterem $\equiv$ |
|---|---|
| $-1+i$ | $\frac{1}{8}(aa+2ab-bb-1)$ |
| $-1-i$ | $\frac{1}{8}(-aa+2ab+bb+1)$ |
| $+1-i$ | $\frac{1}{8}(aa+2ab+3bb-1)$ |

Hoc statim inde sequitur, quod character ipsius $i$ est $\frac{1}{4}(aa+bb-1)$, character ipsius $-1$ autem $\frac{1}{2}(aa+bb-1)\equiv\frac{1}{2}bb$, quum $aa-1$ semper sit formae $8n$. Manifesto hae quatuor regulae, etiamsi hactenus ab inductione mutuatae sint, ita inter se sunt nexae, ut quamprimum unius demonstratio absoluta fuerit, tres reliquae simul sint demonstratae. Vix opus est monere, etiam in his regulis tantummodo supponi $a$ imparem, $b$ parem.

Si formulas ad modulos primarios restrictas adhibere non displicet, hac forma uti possumus. Est

| numeri | character $\equiv$ |
|---|---|
| $-1+i$ | $\frac{1}{4}(-a-b+1-bb)$ |
| $-1-i$ | $\frac{1}{4}(a-b-1+bb)$ |
| $+1-i$ | $\frac{1}{4}(-a-b+1+bb)$ |

Formulae simplicissimae prodeunt; si, ut initio inductionis nostrae feceramus, modulos primi et secundi generis distinguimus. Est scilicet character

| numeri | pro modulis primi generis | pro modulis secundi generis |
|---|---|---|
| $-1+i$ | $\frac{1}{4}(-a-b+1)$ | $\frac{1}{4}(-a-b-3)$ |
| $-1-i$ | $\frac{1}{4}(a-b-1)$ | $\frac{1}{4}(a-b+3)$ |
| $+1-i$ | $\frac{1}{4}(-a-b+1)$ | $\frac{1}{4}(-a-b+5)$ |

## 65.

Pro numero $-1+2i$, ad quem iam progredimur, eandem distinctionem inter modulos $a+bi$ eos, pro quibus $a\equiv 1$, $b\equiv 0$, atque eos, pro quibus $a\equiv 3$, $b\equiv 2$ quoque adhibebimus. Tabula art. 62 docet, respectu illius numeri respondere

| characterem | modulis primi generis |
| --- | --- |
| 0 | $-3+8i,\ +5-8i,\ +9+4i,\ -11+4i$ |
| 1 | $+1+4i,\ +5-4i,\ -7,\ -3-8i$ |
| 2 | $+1-4i,\ +5+8i,\ -7-8i,\ -11$ |
| 3 | $-3,\ +5+4i,\ +9-4i,\ -7+8i,\ -11-4i$ |

Revocatis singulis his modulis ad residua absolute minima secundum modulum $-1+2i$, animadvertimus, omnes, quibus respondet character 0, esse $\equiv 1$; eos, quibus character 1 respondet, $\equiv i$; eos, quorum character est 2, fieri $\equiv -1$; denique omnes, quorum character est 3, fieri $\equiv -i$. At characteres numerorum $1, i, -1, -i$ pro modulo $-1+2i$ ipsi sunt 0, 1, 2, 3 resp.; quapropter in omnibus his 17 exemplis character numeri $-1+2i$ respectu moduli prioris generis $a+bi$, cum charactere huius numeri respectu moduli $-1+2i$ identicus est.

Perinde adiumento tabulae invenitur, respondere

| characterem | modulis secundi generis |
| --- | --- |
| 0 | $+3+2i,\ -5-2i,\ -1+10i,\ -1-10i,\ +11+6i$ |
| 1 | $+3-2i,\ -1+6i,\ -5-6i,\ +7+10i,\ +7-10i$ |
| 2 | $-5+2i,\ -1-6i,\ +7-2i$ |
| 3 | $-1-2i,\ +7+2i,\ -5+6i,\ +3+10i,\ +3-10i,\ +11-6i$ |

Revocatis his modulis ad residua minima secundum modulum $-1+2i$, omnia, quibus resp. characteres 0, 1, 2, 3 respondent, congrua inveniuntur numeris $-1, -i, +1, +i$: his vero ipsis numeris, si vice versa $-1+2i$ pro modulo adoptatur, competunt characteres 2, 3, 0, 1 resp. Quapropter in omnibus his 19 exemplis character numeri $-1+2i$ respectu moduli secundi generis duabus unitatibus differt a charactere huius numeri respectu numeri $-1+2i$ pro modulo habiti.

Ceterum nullo negotio perspicitur, prorsus similia respectu numeri $-1-2i$ locum habitura esse.

66.

Pro numero $-3$ distinctionem inter modulos primi generis et secundi omittimus, quum eventus doceat, illam hic superfluam esse. Respondet itaque

| character | modulis |
|---|---|
| 0 | $-1+6i,\ -1-6i,\ -7,\ -5+6i,\ -5-6i,\ -11,\ 11+6i,\ 11-6i$ |
| 1 | $-1-2i,\ 1-4i,\ -5+2i,\ 5+4i,\ 7+2i,\ 5-8i,\ -1+10i,\ -7-8i,$ $-11-4i,\ 7-10i$ |
| 2 | $3+2i,\ 3-2i,\ -3+8i,\ -3-8i,\ 9+4i,\ 3+10i,\ 3-10i$ |
| 3 | $-1+2i,\ 1+4i,\ -5-2i,\ 5-4i,\ 7-2i,\ 5+8i,\ -1-10i,\ -7+8i,$ $-11+4i,\ 7+10i$ |

Revocatis his modulis ad residua minima secundum modulum 3, videmus, eos, quibus respondet character 0, esse partim $\equiv 1$, partim $\equiv -1$; eos, quorum character est 1, fieri vel $\equiv 1-i$, vel $\equiv -1+i$; eos, quorum character est 2, fieri vel $\equiv i$, vel $\equiv -i$; denique eos, quibus competit character 3, esse vel $\equiv 1+i$, vel $\equiv -1-i$. Ex hac itaque inductione colligimus, characterem numeri $-3$ pro modulo, qui est numerus primus inter associatos primarius, identicum esse cum charactere huius ipsius numeri, dum 3, sive, quod eodem redit, $-3$ tamquam modulus consideratur.

67.

Simili inductione circa alios numeros primos instituta, invenimus, numeros $3\pm 2i$, $-1\pm 6i$, $7\pm 2i$, $-5\pm 6i$ etc. suppeditare theoremata ei similia, ad quod in art. 65 respectu numeri $-1+2i$ pervenimus; contra numeros $1\pm 4i$, $5\pm 4i$, $-3\pm 8i$, $5\pm 8i$, $9\pm 4i$ etc. perinde se habere ut numerum $-3$. Inductio itaque perducit ad elegantissimum theorema, quod ad instar theoriae residuorum quadraticorum in arithmetica numerorum realium THEOREMA FUNDAMENTALE theoriae residuorum biquadraticorum nuncupare liceat, scilicet:

*Denotantibus $a+bi$, $a'+b'i$ numeros primos diversos inter associatos suos primarios, i. e. secundum modulum $2+2i$ unitati congruos, character biquadraticus numeri $a+bi$ respectu moduli $a'+b'i$ identicus erit cum charactere numeri $a'+b'i$ respectu moduli $a+bi$, si vel uterque numerorum $a+bi$, $a'+b'i$, vel alteruter saltem, ad primum genus refertur, i. e. secundum modulum 4 unitati congruus est: contra characteres illi duabus unitatibus inter se different, si neuter numerorum $a+bi$, $a'+b'i$ ad primum genus refertur, i. e. si uterque secundum modulum 4 congruus est numero $3+2i$.*

At non obstante summa huius theorematis simplicitate, ipsius demonstratio inter mysteria arithmeticae sublimioris maxime recondita referenda est, ita ut, saltem ut nunc res est, per subtilissimas tantummodo investigationes enodari possit, quae limites praesentis commentationis longe transgrederentur. Quamobrem promulgationem huius demonstrationis, nec non evolutionem nexus inter hoc theorema atque ea, quae in initio huius commentationis per inductionem stabilire coeperamus, ad commentationem tertiam nobis reservamus. Coronidis tamen loco iam hic trademus, quae ad demonstrationem theorematum in artt. 63, 64 propositorum requiruntur.

68.

Initium facimus a numeris primis $a+bi$ talibus, pro quibus $b=0$ (tertia specie art. 34), ubi itaque (ut numerus inter associatos primarius sit) $a$ debet esse numerus primus realis negativus formae $-(4n+3)$, pro quo scribemus $-q$, quales sunt $-3$, $-7$, $-11$, $-19$ etc. Denotando per $\lambda$ characterem numeri $1+i$, illo numero pro modulo accepto, esse debet

$$i^\lambda \equiv (1+i)^{\frac{1}{2}(qq-1)} \equiv 2^{\frac{1}{4}(qq-1)}\,.\,i^{\frac{1}{4}(qq-1)} \pmod{q}$$

Sed constat, 2 esse residuum quadraticum, vel non-residuum quadraticum ipsius $q$, prout $q$ sit formae $8n+7$, vel formae $8n+3$, unde colligimus, esse generaliter

$$2^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(q+1)} \equiv i^{\frac{1}{2}(q+1)} \pmod{q}$$

adeoque evehendo ad potestatem exponentis $\frac{1}{2}(q+1)$

$$2^{\frac{1}{4}(qq-1)} \equiv i^{\frac{1}{4}(q+1)^2} \pmod{q}$$

Aequatio itaque praecedens hanc formam induit

$$i^\lambda \equiv i^{\frac{1}{4}(q+1)^2+\frac{1}{4}(qq-1)} \equiv i^{\frac{1}{2}(qq+q)} \pmod{q}$$

unde sequitur

$$\lambda \equiv \tfrac{1}{2}(qq+q) \equiv \tfrac{1}{2}(q+1)^2 - \tfrac{1}{2}(q+1) \pmod{4}$$

sive quum habeatur $\frac{1}{2}(q+1)^2 \equiv 0 \pmod{4}$, $\lambda \equiv -\frac{1}{2}(q+1) \equiv \frac{1}{2}(a-1) \pmod{4}$.

Quod est ipsum theorema art. 63 pro casu $b=0$.

69.

Longe vero difficilius absolvuntur moduli $a+bi$ tales, pro quibus non est $b=0$ (numeri quartae speciei art. 34), pluresque disquisitiones erunt praemittendae. Normam $aa+bb$, quae erit numerus primus realis formae $4n+1$, designabimus per $p$.

Denotetur per $S$ complexus omnium residuorum simpliciter minimorum pro modulo $a+bi=m$, exclusa cifra, ita ut multitudo numerorum in $S$ contentorum sit $=p-1$. Designet $x+yi$ indefinite numerum huius systematis, statuaturque $ax+by=\xi$, $ay-bx=\eta$. Erunt itaque $\xi$, $\eta$ integri inter limites 0 et $p$ *exclusive* contenti: in casu praesente enim, ubi $a$, $b$ inter se primi sunt, formulae art. 45, puta $\eta\equiv k\xi$, $\xi\equiv -k\eta$ (mod. $p$) docent, neutrum numerorum $\xi$, $\eta$ esse posse $=0$, nisi alter simul evanescat, adeoque fiat $x=0$, $y=0$, quam combinationem iam eiecimus. Criterium itaque numeri $x+yi$ in $S$ contenti, consistit in eo, ut quatuor numeri $\xi$, $\eta$, $p-\xi$, $p-\eta$ sint positivi.

Praeterea observamus pro nullo tali numero esse posse $\xi=\eta$; hinc enim sequeretur $p(x+y)=a(\xi+\eta)+b(\xi-\eta)=2a\xi$, quod est absurdum, quum nullus factorum 2, $a$, $\xi$ per $p$ divisibilis sit. Simili ratione aequatio $p(x-y+a+b)=2a\xi+(a+b)(p-\xi-\eta)$ docet, esse non posse $\xi+\eta=p$. Quapropter quum numeri $\xi-\eta$, $p-\xi-\eta$ esse debeant vel positivi vel negativi, hinc petimus subdivisionem systematis $S$ in quatuor complexus $C$, $C'$, $C''$, $C'''$, puta ut coniiciantur

| in complexum | numeri pro quibus |
|---|---|
| $C$ | $\xi-\eta$ positivus, $p-\xi-\eta$ positivus |
| $C'$ | $\xi-\eta$ positivus, $p-\xi-\eta$ negativus |
| $C''$ | $\xi-\eta$ negativus, $p-\xi-\eta$ negativus |
| $C'''$ | $\xi-\eta$ negativus, $p-\xi-\eta$ positivus |

Criterium itaque numeri complexus $C$ proprie sextuplex est, puta sex numeri $\xi$, $\eta$, $p-\xi$, $p-\eta$, $\xi-\eta$, $p-\xi-\eta$ positivi esse debent; sed manifesto conditiones 2, 5 et 6 iam sponte implicant reliquas. Similia circa complexus $C'$, $C''$, $C'''$ valent, ita ut criteria completa sint triplicia, puta

| pro complexu | positivi esse debent numeri |
|---|---|
| $C$ | $\eta,\quad \xi-\eta,\quad p-\xi-\eta$ |
| $C'$ | $p-\xi,\quad \xi-\eta,\quad \xi+\eta-p$ |
| $C''$ | $p-\eta,\quad \eta-\xi,\quad \xi+\eta-p$ |
| $C'''$ | $\xi,\quad \eta-\xi,\quad p-\xi-\eta$ |

Ceterum vel nobis non monentibus quisque facile intelliget, in repraesentatione figurata numerorum complexorum (vid. art. 39) numeros systematis $S$ intra quadratum contineri, cuius latera iungant puncta numeros $0$, $a+bi$, $(1+i)(a+bi)$, $i(a+bi)$ repraesentantia, et subdivisionem systematis $S$ respondere partitioni quadrati per rectas diagonales. Sed hocce loco ratiocinationibus pure arithmeticis uti maluimus, illustrationem per intuitionem figuratam lectori perito brevitatis caussa linquentes.

70.

Si quatuor numeri complexi $r=x+yi$, $r'=x'+y'i$, $r''=x''+y''i$, $r'''=x'''+y'''i$ ita inter se nexi sunt, ut habeatur $r'=m+ir$, $r''=m+ir'=(1+i)m-r$, $r'''=m+ir''=im-ir$, atque primus $r$ ad complexum $C$ pertinere supponitur, reliqui $r'$, $r''$, $r'''$ resp. ad complexus $C'$, $C''$, $C'''$ pertinebunt. Statuendo enim $\xi=ax+by$, $\eta=ay-bx$, $\xi'=ax'+by'$, $\eta'=ay'-bx'$, $\xi''=ax''+by''$, $\eta''=ay''-bx''$, $\xi'''=ax'''+by'''$, $\eta'''=ay'''-bx'''$, invenitur

$$\eta=p-\xi'=p-\eta''=\xi'''$$
$$\xi-\eta=\xi'+\eta'-p=\eta''-\xi''=p-\xi'''-\eta'''$$
$$p-\xi-\eta=\xi'-\eta'=\xi''+\eta''-p=\eta'''-\xi'''$$

unde adiumento criteriorum theorematis veritas sponte demanat. Et quum rursus fiat $r=m+ir'''$, facile perspicietur, si $r$ supponatur pertinere ad $C'$, numeros $r'$, $r''$, $r'''$ pertinere resp. ad $C''$, $C'''$, $C$; si ille ad $C''$, hos ad $C'''$, $C$, $C'$; denique si ille ad $C'''$, hos ad $C$, $C'$, $C''$.

Simul hinc colligitur, in singulis complexibus $C$, $C'$, $C''$, $C'''$ aeque multos numeros reperiri, puta $\frac{1}{4}(p-1)$.

71.

Theorema. *Si denotante $k$ integrum per $m$ non divisibilem singuli numeri complexus $C$ per $k$ multiplicantur, productorumque residuis simpliciter minimis secun-*

*dum modulum* $m$ *inter complexus* $C$, $C'$, $C''$, $C'''$ *distributis, multitudo eorum, quae ad singulos hos complexus pertinent, resp. per* $c$, $c'$, $c''$, $c'''$ *denotatur: character numeri* $k$ *respectu moduli* $m$ *erit* $\equiv c' + 2c'' + 3c'''$ (*mod.* 4).

*Demonstr.* Sint illa $c$ residua minima ad $C$ pertinentia $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc.; dein $c'$ residua ad $C'$ pertinentia haec $m + i\alpha'$, $m + i\beta'$, $m + i\gamma'$, $m + i\delta'$ etc.; porro $c''$ residua ad $C''$ pertinentia haec $(1+i)m - \alpha''$, $(1+i)m - \beta''$, $(1+i)m - \gamma''$, $(1+i)m - \delta''$ etc.; denique $c'''$ residua ad $C'''$ pertinentia haec $im - i\alpha'''$, $im - i\beta'''$, $im - i\gamma'''$, $im - i\delta'''$ etc. Iam consideremus quatuor producta, scilicet

1) productum ex omnibus $\frac{1}{4}(p-1)$ numeris complexum $C$ constituentibus:

2) productum productorum, quae e multiplicatione singulorum horum numerorum per $k$ orta erant;

3) productum e residuis minimis horum productorum, puta e numeris $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc., $m + i\alpha'$, $m + i\beta'$ etc. etc.

4) productum ex omnibus $c + c' + c'' + c'''$ numeris $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc., $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ etc., $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, $\delta''$ etc., $\alpha'''$, $\beta'''$, $\gamma'''$, $\delta'''$ etc.

Denotando haec quatuor producta ordine suo per $P$, $P'$, $P''$, $P'''$, manifesto erit

$$P' = k^{\frac{1}{4}(p-1)} P, \quad P' \equiv P'', \quad P'' \equiv P''' i^{c' + 2c'' + 3c'''} \pmod{m}$$

et proin

$$P k^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv P''' i^{c' + 2c'' + 3c'''} \pmod{m}$$

At facile perspicitur, numeros $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ etc., $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, $\delta''$ etc., $\alpha'''$, $\beta'''$, $\gamma'''$, $\delta'''$ etc. omnes ad complexum $C$ pertinere, atque tum inter se tum a numeris $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. diversos esse, sicuti hi ipsi inter se diversi sint. Omnes itaque hi numeri simul sumti, et abstrahendo ab ordine, prorsus identici esse debent cum omnibus numeris complexum $C$ constituentibus, unde colligimus $P = P'''$, adeoque

$$P k^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv P i^{c' + 2c'' + 3c'''} \pmod{m}$$

Denique quum singuli factores producti $P$ per $m$ non sint divisibiles, hinc concluditur

$$k^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv i^{c' + 2c'' + 3c'''} \pmod{m},$$

unde $c' + 2c'' + 3c'''$ erit character numeri $k$ respectu moduli $m$. Q. E. D.

72.

Quo theorema generale art. praec. ad numerum $1+i$ applicari possit, complexum $C$ denuo in duos complexus minores $G$ et $G'$ subdividere oportet, et quidem referemus in complexum $G$ numeros eos $x+yi$, pro quibus $ax+by=\xi$ minor est quam $\frac{1}{2}p$, in alterum $G'$ eos, pro quibus $\xi$ est maior quam $\frac{1}{2}p$; multitudinem numerorum in complexibus $G$, $G'$ contentorum resp. per $g$, $g'$ denotabimus, unde erit $g+g'=\frac{1}{4}(p-1)$.

Criterium completum numerorum ad $G$ pertinentium itaque erit, ut tres numeri $\eta$, $\xi-\eta$, $p-2\xi$ sint positivi: nam conditio tertia pro complexu $C$, secundum quam $p-\xi-\eta$ positivus esse debet, sub illis implicite iam continetur, quum sit $p-\xi-\eta=(\xi-\eta)+(p-2\xi)$. Perinde criterium completum numerorum ad $G'$ pertinentium consistet in valoribus positivis trium numerorum $\eta$, $p-\xi-\eta$, $2\xi-p$.

Hinc facile concluditur, productum cuiusvis numeri complexus $G$ per numerum $1+i$ pertinere ad complexum $C'''$; si enim statuitur

$$(x+yi)(1+i)=x'+y'i, \text{ atque } ax'+by'=\xi', \; ay'-bx'=\eta', \text{ invenitur}$$

$$\xi'=\xi-\eta,\; \eta'-\xi'=2\eta,\; p-\xi'-\eta'=p-2\xi$$

i. e. criterium pro numero $x+yi$ complexui $G$ subdito identicum est cum criterio pro numero $x'+y'i$ ad complexum $C'''$ pertinente.

Prorsus simili modo ostenditur, productum cuiusvis numeri complexus $G'$ per $1+i$ pertinere ad complexum $C''$.

Erit itaque, si in art. praec. ipsi $k$ valorem $1+i$ tribuimus; $c=0$, $c'=0$, $c''=g'$, $c'''=g$, et proin character numeri $1+i$ fiet $3g+2g'=\frac{1}{2}(p-1)+g$. Et quum characteres numerorum $i$, $-1$, sint $\frac{1}{4}(p-1)$, $\frac{1}{2}(p-1)$, characteres numerorum $-1+i$, $-1-i$, $1-i$ resp. erunt $\frac{3}{4}(p-1)+g$, $g$, $\frac{1}{4}(p-1)+g$. Totus igitur rei cardo iam in investigatione numeri $g$ vertitur.

73.

Quae in artt. 69—72 exposuimus, proprie independentia sunt a suppositione, $m$ esse numerum primarium: abhinc vero saltem supponemus, $a$ imparem, $b$ parem esse, praetereaque $a$, $b$ et $a-b$ esse numeros positivos. Ante omnia limites valorum ipsius $x$ in complexu $G$ stabilire oportet.

Statuendo $ay-bx=\eta$, $(a+b)x-(a-b)y=\zeta$, $p-2ax-2by=\theta$, criterium numerorum $x+yi$ ad complexum $G$ pertinentium consistit in tribus conditionibus, ut $\eta$, $\zeta$, $\theta$ sint numeri positivi. Quum fiat $px=(a-b)\eta+a\zeta$, $p(a-2x)=a\theta+2b\eta$, manifestum est, $x$ et $2a-x$ esse debere numeros positivos, sive $x$ alicui numerorum $1, 2, 3 \ldots \frac{1}{2}(a-1)$ aequalem. Porro quum sit $(a-b)\theta=2b\zeta+p(a-b-2x)$, patet, quamdiu $x$ minor sit quam $\frac{1}{2}(a-b)$, conditionem secundam (iuxta quam $\zeta$ positivus esse debet) iam implicare tertiam (quod $\theta$ debet esse positivus); contra quoties $x$ sit maior quam $\frac{1}{2}(a-b)$, conditionem secundam iam contineri sub tertia. Quamobrem pro valoribus ipsius $x$ his $1, 2, 3 \ldots \frac{1}{2}(a-b-1)$ tantummodo prospiciendum est, ut $\eta$ et $\zeta$ positivi evadant, sive ut $y$ maior sit quam $\frac{bx}{a}$ et minor quam $\frac{(a+b)x}{a-b}$: pro valore itaque tali dato ipsius $x$ aderunt numeri $x+yi$ omnino

$$\left[\frac{(a+b)x}{a-b}\right]-\left[\frac{bx}{a}\right]$$

si uncis in eadem significatione utimur, qua iam alibi passim usi sumus (Conf. *Theorematis arithm. dem. nova* art. 4 et *Theorematis fund. in doctr. de residuis quadr.* etc. *Algorithm. nov.* art. 3). Contra pro valoribus ipsius $x$ his $\frac{1}{2}(a-b+1)$, $\frac{1}{2}(a-b+3) \ldots \frac{1}{2}(a-1)$ sufficiet, ut ipsis $\eta$ et $\theta$ valores positivi concilientur, sive ut $y$ maior sit quam $\frac{bx}{a}$ et minor quam $\frac{p-2ax}{2b}$ sive $\frac{1}{2}b+\frac{aa-2ax}{2b}$: quare pro valore tali dato ipsius $x$ aderunt numeri $x+yi$ omnino

$$\left[\tfrac{1}{2}b+\frac{aa-2ax}{2b}\right]-\left[\frac{bx}{a}\right]$$

Hinc itaque colligimus, multitudinem numerorum complexus $G$ esse

$$g=\Sigma\left[\frac{(a+b)x}{a-b}\right]+\Sigma\left[\tfrac{1}{2}b+\frac{aa-2ax}{2b}\right]-\Sigma\left[\frac{bx}{a}\right]$$

ubi in termino primo summatio extendenda est per omnes valores integros ipsius $x$ ab 1 usque ad $\frac{1}{2}(a-b-1)$, in secundo ab $\frac{1}{2}(a-b+1)$ usque ad $\frac{1}{2}(a-1)$, in tertio ab 1 usque ad $\frac{1}{2}(a-1)$.

Si characteristica $\varphi$ in eadem significatione utimur, ut loco citato (*Theorematis fund.* etc. *Algor. nov.* art. 3), puta ut sit

$$\varphi(t, u)=\left[\frac{u}{t}\right]+\left[\frac{2u}{t}\right]+\left[\frac{3u}{t}\right] \ldots +\left[\frac{t'u}{t}\right]$$

denotantibus $t$, $u$ numeros positivos quoscunque, atque $t'$ numerum $[\frac{1}{2}t]$, terminus ille primus fit $=\varphi(a-b, a+b)$, tertius $=-\varphi(a, b)$; secundus vero fit

$$= \tfrac{1}{4}bb + \Sigma\left[\frac{aa-2ax}{2b}\right]$$

Sed fit, scribendo terminos inverso ordine,

$$\Sigma\left[\frac{aa-2ax}{2b}\right] = \left[\frac{a}{2b}\right]+\left[\frac{3a}{2b}\right]+\left[\frac{5a}{2b}\right]+\ldots+\left[\frac{(b-1)a}{2b}\right] = \varphi(2b,\, a)-\varphi(b,\, a)$$

Formula itaque nostra sequentem induit formam:

$$g = \varphi(a-b,\, a+b)+\varphi(2b,\, a)-\varphi(a,\, b)-\varphi(b,\, a)+\tfrac{1}{4}bb$$

Consideremus primo terminum $\varphi(a-b,\; a+b)$, qui protinus transmutatur in $\varphi(a-b,\; 2b)+1+2+3+$ etc. $+\tfrac{1}{2}(a-b-1)$ sive in

$$\varphi(a-b,\, 2b)+\tfrac{1}{8}((a-b)^2-1)$$

Dein quum per theorema generale fiat $\varphi(t,\, u)+\varphi(u,\, t) = [\tfrac{1}{2}t].[\tfrac{1}{2}u]$, dum $t,\, u$ sunt integri positivi inter se primi, habemus

$$\varphi(a-b,\, 2b) = \tfrac{1}{2}b(a-b-1)-\varphi(2b,\, a-b)$$

adeoque

$$\varphi(a-b,\, a+b) = \tfrac{1}{8}(aa+2ab-3bb-4b-1)-\varphi(2b,\, a-b)$$

Disponamus partes ipsius $\varphi(2b,\, a-b)$ sequenti modo

$$\left[\frac{a-b}{2b}\right]+\left[\frac{3(a-b)}{2b}\right]+\left[\frac{5(a-b)}{2b}\right]+\text{etc.}+\left[\frac{(b-1)(a-b)}{2b}\right]$$
$$+\left[\frac{a-b}{b}\right]+\left[\frac{2(a-b)}{b}\right]+\left[\frac{3(a-b)}{b}\right]+\text{etc.}+\left[\frac{\frac{1}{2}b(a-b)}{b}\right]$$

Series secunda manifesto fit

$$= \varphi(b,\, a-b) = \varphi(b,\, a)-1-2-3-\text{etc.}-\tfrac{1}{2}b = \varphi(b,\, a)-\tfrac{1}{8}(bb+2b)$$

seriem primam ordine terminorum inverso ita exhibemus:

$$\left[\tfrac{1}{2}(a+1-b)-\frac{a}{2b}\right]+\left[\tfrac{1}{2}(a+3-b)-\frac{3a}{2b}\right]+\left[\tfrac{1}{2}(a+5-b)-\frac{5a}{2b}\right]+\text{etc.}+\left[\tfrac{1}{2}(a-1)-\frac{(b-1)a}{2b}\right]$$

quae expressio, quum denotante $t$ numerum integrum, $u$ fractum, generaliter sit $[t-u] = t-1-[u]$, mutatur in sequentem

$$\tfrac{1}{8}b(2a-4-b)-\left[\frac{a}{2b}\right]-\left[\frac{3a}{2b}\right]-\left[\frac{5a}{2b}\right]-\text{etc.}-\left[\frac{(b-1)a}{2b}\right]$$
$$= \tfrac{1}{8}b(2a-4-b)-\varphi(2b,\, a)+\varphi(b,\, a)$$

Hinc fit

$$\varphi(2b, a-b) = 2\varphi(b, a) - \varphi(2b, a) + \tfrac{1}{4}b(a-3-b)$$

et proin

$$\varphi(a-b, a+b) = \varphi(2b, a) - 2\varphi(b, a) + \tfrac{1}{8}(aa - bb + 2b - 1)$$

Substituendo hunc valorem in formula pro $g$ supra tradita, insuperque $\varphi(a, b) + \varphi(b, a) = \tfrac{1}{4}b(a-1)$, obtinemus

$$g = 2\varphi(2b, a) - 2\varphi(b, a) + \tfrac{1}{8}(aa - 2ab + bb + 4b - 1)$$

74.

Per ratiocinia prorsus similia absolvitur casus is, ubi manentibus $a$, $b$ positivis $a-b$ est negativus, sive $b-a$ positivus. Aequationes $p(a-2x) = 2b\eta + a\theta$, $p(b-a+2x) = 2b\zeta + (b-a)\theta$ docent, $\tfrac{1}{2}a - x$ atque $x + \tfrac{1}{2}(b-a)$ positivos, et proin $x$ alicui numerorum $-\tfrac{1}{2}(b-a-1)$, $-\tfrac{1}{2}(b-a-3)$, $-\tfrac{1}{2}(b-a-5) \ldots\ldots + \tfrac{1}{2}(a-1)$ aequalem esse debere. Porro ex aequatione $px + (b-a)\eta = a\zeta$ sequitur, pro valoribus negativis ipsius $x$ conditionem, ex qua $\eta$ debet esse positivus, iam contineri sub conditione, ex qua $\zeta$ debet esse positivus, contrarium vero evenire, quoties ipsi $x$ valor positivus tribuatur. Hinc valores ipsius $y$ pro valore determinato negativo ipsius $x$ inter $\frac{(a+b)x}{a-b}$ et $\frac{p-2ax}{2b}$, contra pro valore positivo ipsius $x$ inter $\frac{bx}{a}$ et $\frac{p-2ax}{2b}$ contenti esse debent: manifesto pro $x = 0$ hi limites sunt $0$ et $\frac{p-2ax}{2b}$, valore $y = 0$ ipso excluso. Hinc colligitur

$$g = -\Sigma\left[\frac{(a+b)x}{a-b}\right] + \Sigma\left[\tfrac{1}{2}b + \frac{aa-2ax}{2b}\right] - \Sigma\left[\frac{bx}{a}\right]$$

ubi in termino primo summatio extendenda est per omnes valores negativos ipsius $x$ inde a $-1$ usque ad $-\tfrac{1}{2}(b-a-1)$; in secunda per omnes valores ipsius $x$ inde a $-\tfrac{1}{2}(b-a-1)$ usque ad $\tfrac{1}{2}(a-1)$; in tertia per omnes valores positivos ipsius $x$ inde a $+1$ usque ad $\tfrac{1}{2}(a-1)$: hoc pacto e summatione prima prodit $-\varphi(b-a, b+a)$, e secunda perinde ut in art. praec. $\tfrac{1}{4}bb + \varphi(2b, a) - \varphi(b, a)$, denique e tertia $-\varphi(a, b)$, sive habetur

$$g = -\varphi(b-a, b+a) + \varphi(2b, a) - \varphi(b, a) - \varphi(a, b) + \tfrac{1}{4}bb$$

Iam simili modo ut in art. praec. evolvitur

$$\varphi(b-a,\ b+a) = \varphi(b-a,\ 2b) - \tfrac{1}{8}((b-a)^2-1)$$
$$= \tfrac{1}{8}(3bb-2ab-aa-4b+1) - \varphi(2b,\ b-a)$$

nec non

$$\varphi(2b, b-a) = \varphi(2b, a) - 2\varphi(b, a) + \tfrac{1}{2}b(b-1-a)$$

adeoque

$$\varphi(b-a,\ b+a) = 2\varphi(b, a) - \varphi(2b, a) + \tfrac{1}{8}(bb-aa-2b+1)$$

tandemque

$$g = 2\varphi(2b, a) - 2\varphi(b, a) + \tfrac{1}{8}(aa-2ab+bb+4b-1)$$

Evictum est itaque, eandem formulam pro $g$ valere, sive sit $a-b$ positivus sive negativus, dummodo $a$, $b$ sint positivi.

75.

Ut reductionem ulteriorem assequamur, statuemus

$$L = [\tfrac{a}{2b}] + [\tfrac{2a}{2b}] + [\tfrac{2a}{2b}] + \text{etc.} + [\tfrac{\frac{1}{2}ba}{2b}]$$
$$M = [\tfrac{(\frac{1}{2}b+1)a}{2b}] + [\tfrac{(\frac{1}{2}b+2)a}{2b}] + [\tfrac{(\frac{1}{2}b+3)a}{2b}] + \text{etc.} + [\tfrac{ba}{2b}]$$
$$N = [\tfrac{a+b}{2b}] + [\tfrac{2a+b}{2b}] + [\tfrac{3a+b}{2b}] + \text{etc.} + [\tfrac{\frac{1}{2}ba+b}{2b}]$$

Quum facile perspiciatur, haberi generaliter $[u]+[u+\frac{1}{2}] = [2u]$, quamcunque quantitatem realem denotet $u$, fit $L+N = \varphi(b, a)$, et quum manifesto sit $L+M = \varphi(2b, a)$, erit

$$\varphi(2b, a) - \varphi(b, a) = M - N$$

Porro autem obvium est, aggregatum termini primi seriei $N$ cum penultimo termino seriei $M$, puta $[\frac{a+b}{2b}] + [\frac{(b-1)a}{2b}]$ fieri $= \frac{1}{2}(a-1)$, atque eandem summam effici e termino secundo seriei $N$ cum antepenultimo seriei $M$, et sic porro: quare quum etiam terminus ultimus seriei $M$ fiat $= \frac{1}{2}(a-1)$, ultimus vero terminus seriei $N$ sit $= [\frac{a+2}{4}] = \frac{1}{4}(a\mp 1)$, valente signo superiori vel inferiori, prout $a$ est formae $4n+1$ vel $4n-1$: erit

$$M+N = \tfrac{1}{4}(a-1)b + \tfrac{1}{4}(a\mp 1)$$

et proin

$$\varphi(2b, a) - \varphi(b, a) = \tfrac{1}{4}(a-1)b + \tfrac{1}{4}(a\mp 1) - 2N$$

Formula itaque pro $g$ in artt. 73 et 74 inventa, transit in sequentem

$$g = \tfrac{1}{8}((a+b)^2-1)+2n-4N$$

statuendo $a \mp 1 = 4n$, ubi $n$ erit integer. Sed quum hinc habeatur $1 = 16nn-8an+aa$, formula haec etiam sequenti modo exhiberi potest:

$$g = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab+bb+1)+4(\tfrac{1}{2}(a+1)n-nn-N).$$

Quapropter quum $g$ sit character numeri $-1-i$ pro modulo $a+bi$, hic character fit $\equiv \frac{1}{8}(-aa+2ab+bb+1)(\text{mod.}\,4)$, quod est ipsum theorema supra (art. 64) per inductionem erutum, sponteque inde demanant theoremata circa characteres numerorum $1+i$, $1-i$, $-1+i$. Quamobrem haec quatuor theoremata pro casu eo, ubi $a$ et $b$ sunt positivi, iam rigorose sunt demonstrata.

76.

Si manente $a$ positivo $b$ est negativus, statuatur $b=-b'$, ut fiat $b'$ positivus. Quum iam evictum sit, ita pro modulo $a+b'i$ characterem numeri $-1-i$ esse $\equiv \frac{1}{8}(-aa+2ab'+b'b'+1)(\text{mod.}\,4)$, character numeri $-1+i$ pro modulo $a-b'i$ per theorema in art. 62 prolatum erit $\equiv \frac{1}{8}(aa-2ab'-b'b'-1)$, i. e. character numeri $-1+i$ pro modulo $a+bi$ fit $\equiv \frac{1}{8}(aa+2ab-bb-1)$: hoc vero est ipsum theorema in art. 64 allatum, unde tria reliqua circa characteres numerorum $1+i$, $1-i$, $-1-i$ sponte demanant. Quapropter ista theoremata etiam pro casu, ubi $b$ negativus est, demonstrata sunt, scilicet pro omnibus casibus, ubi $a$ est positivus.

Denique si $a$ est negativus, statuatur $a=-a'$, $b=-b'$. Quum itaque per iam demonstrata character numeri $1+i$ respectu moduli $a'+b'i$ sit $\equiv \frac{1}{8}(-a'a'+2a'b'-3b'b'+1)(\text{mod.}\,4)$, nihilque intersit, utrum numerum $a'+b'i$ an oppositum $-a'-b'i$ moduli loco habeamus; manifesto character numeri $1+i$ respectu moduli $a+bi$ est $\equiv \frac{1}{8}(-aa+2ab-3bb+1)$, et similia valent circa characteres numerorum $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.

Ex his itaque colligitur, demonstrationem theorematum circa characteres numerorum $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ (artt. 63. 64) nulli amplius limitationi obnoxiam esse.

# ANZEIGEN

EIGNER

# SCHRIFTEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1808 Mai 12.

Eine vom Herrn Prof. Gauss am 15. Januar d. J. der königl. Societät der Wissenschaften überreichte Abhandlung,

*Theorematis arithmetici demonstratio nova*,

deren Inhaltsanzeige wir hier noch nachzuholen haben, hat das berühmte Fundamental-Theorem der Lehre von den quadratischen Resten zum Gegenstande, welches sowohl in der ganzen *höhern Arithmetik*, als in den angrenzenden Theilen der Analysis eine so wichtige Rolle spielt. Bekanntlich heisst eine ganze Zahl $a$ *quadratischer Rest* der ganzen Zahl $b$, wenn es Zahlen der Form $xx-a$ gibt, die durch $b$ theilbar sind, sowie im entgegengesetzten Falle $a$ *quadratischer Nichtrest* von $b$ genannt wird: die Zahl $a$ kann positiv oder negativ sein, $b$ hingegen wird immer als positiv angesehen. Die höhere Arithmetik lehrt, dass alle Primzahlen $b$, für welche eine gegebene Zahl $a$ quadratischer Rest ist, unter gewissen linearischen Formen begriffen sind, so wie wiederum andere linearische Formen alle Primzahlen enthalten, von denen $a$ Nichtrest ist. So ist z. B. $-1$ quadratischer Rest aller Primzahlen der Form $4n+1$, quadratischer Nichtrest aller Primzahlen der Form $4n+3$; ferner $+2$ ist quadratischer Rest aller Primzahlen der Formen $8n+1$, $8n+7$, hingegen quadratischer Nichtrest aller Primzahlen der Formen $8n+3$, $8n+5$. Aehnlicher specieller Lehrsätze gibt es eine unendliche Menge, die sich aber alle aus der Verbindung der beiden angeführten

mit folgendem allgemeinen ableiten lassen: Zwei ungleiche positive (ungerade) Primzahlen, $p$, $q$, haben allemal *gleiche* Relation wechselseitig zu einander (d.i. die eine ist quadratischer Rest oder Nichtrest der andern, je nachdem die andere Rest oder Nichtrest der ersten ist), wenn entweder beide von der Form $4n+1$ sind, oder wenigstens die eine: hingegen ist ihre wechselseitige Relation entgegengesetzt (d.i. die eine ist Nichtrest der andern, wenn diese Rest von jener ist, und umgekehrt), so oft *beide* zugleich von der Form $4n+3$ sind. Dies ist das erwähnte Fundamental-Theorem, welches man in mehr als einer Gestalt ausdrücken kann: die hier gewählte ist diejenige, in der es in der Abhandlung des Hrn. Prof. Gauss neu bewiesen ist.

Die schönsten Lehrsätze der höhern Arithmetik, und namentlich auch diejenigen, wovon hier die Rede ist, haben das Eigne, dass sie durch Induction leicht entdeckt werden, ihre Beweise hingegen äusserst versteckt liegen, und nur durch sehr tief eindringende Untersuchungen aufgespürt werden können. Gerade diess ist es, was der höhern Arithmetik jenen zauberischen Reiz gibt, der sie zur Lieblingswissenschaft der ersten Geometer gemacht hat, ihres unerschöpflichen Reichthums nicht zu gedenken, woran sie alle andere Theile der reinen Mathematik so weit übertrifft. Die beiden oben erwähnten Specialsätze waren schon Fermat bekannt, welcher, seiner Behauptung nach, auch im Besitz ihrer Beweise war: ob er sich darin nicht täuschte, können wir nicht entscheiden, da er nie Etwas davon bekannt gemacht hat: aber für möglich dürfen wir es gewiss halten, da mehrere Beispiele von Selbsttäuschung bei andern grossen Geometern, namentlich bei Euler, Legendre und auch bei Fermat selbst, vorhanden sind. Von dem ersten jener Theoreme gab Euler den ersten Beweis; allein das andere zu demonstriren, glückte diesem grossen Geometer, seiner eifrigen, viele Jahre hindurch fortgesetzten, Bemühungen ungeachtet, nicht; erst Lagrange war es vorbehalten, diese Lücke auszufüllen. Beide Geometer bewiesen auch noch verschiedene andre specielle Sätze, eine grössere Anzahl aber, die sie durch Induction fanden, entzog sich ihren Bemühungen, sie zu beweisen, stets. Es ist indess ein merkwürdiges Spiel des Zufalls, dass beide Geometer durch Induction nicht auf das allgemeine Fundamental-Theorem gekommen sind, das einer so einfachen Darstellung fähig ist. Dieses ist zuerst, obwohl in einer etwas andern Gestalt, von Legendre vorgetragen, in der *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris* 1785; sowohl hier, als nachher in seinem Werke: *Essai d'une théorie des nombres*, hat

dieser treffliche Analyst den Beweis auf sehr scharfsinnige Untersuchungen zu gründen gesucht, die aber gleichwohl nicht zu dem gewünschten Ziele geführt haben, welches, wenn wir uns nicht irren, auch auf diesem Wege nicht erreicht werden konnte.

Der Verfasser der Abhandlung, welcher diese Anzeige gewidmet ist, betrat die Bahn der höhern Arithmetik zu einer Zeit, wo ihm alle frühern Arbeiten andrer Geometer in dieser Wissenschaft ganz unbekannt waren: diesem Umstande ist es hauptsächlich zuzuschreiben, dass er überall einen ganz eigenthümlichen Gang genommen hat. Jenes Fundamental-Theorem fand er zwar schon sehr früh durch Induction, allein erst ein ganzes Jahr später gelang es ihm, nach vielen Schwierigkeiten und vergeblichen Versuchen, den ersten vollkommen strengen Beweis aufzufinden, der im vierten Abschnitte seiner *Disquisitiones arithmeticae* entwickelt ist: dieser Beweis gründet sich aber auf sehr mühsame und weitläuftige Auseinandersetzungen. In der Folge kam er noch auf drei andre Beweise, die zwar von jener Unbequemlichkeit frei sind, aber dagegen andre sehr tiefliegende und ihrem Inhalte nach ganz heterogene Untersuchungen voraussetzen: der eine dieser Beweise ist gleichfalls in dem angeführten Werke Art. 262 mitgetheilt, die beiden andern werden zu ihrer Zeit bekannt gemacht werden. Immer blieb also noch der Wunsch übrig, dass es möglich sein möchte, einen kürzern, von fremdartigen Untersuchungen unabhängigen, Beweis zu entdecken. Der Verf. hofft daher, dass die Freunde der höhern Arithmetik mit Vergnügen einen fünften Beweis sehen werden, der in gegenwärtiger Abhandlung auf weniger als fünf Seiten vorgetragen ist, und in jeder Hinsicht nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint. Bei der gedrängten Kürze, worin dieser Beweis abgefasst ist, können wir freilich hier von dem Gange desselben nur eine unvollkommene Idee geben: mehr würde hier aber auch um so überflüssiger sein, da der XVIte Band der *Commentationes*, worin er bereits abgedruckt ist, nächstens erscheinen wird.

Die Grundlage des Beweises ist folgender neuer Lehrsatz: Wenn $p$ eine (positive ungerade) Primzahl, $k$ eine beliebige, durch $p$ nicht theilbare, ganze Zahl bedeutet; wenn ferner unter den Resten, die aus der Division der $\frac{1}{2}(p-1)$ Producte $k, 2k, 3k \ldots \frac{1}{2}(p-1)k$ durch $p$ entstehen, in allen sich $\mu$ Reste befinden, die grösser als $\frac{1}{2}p$ sind (also $\frac{1}{2}(p-1)-\mu$ solche, die kleiner sind, als $\frac{1}{2}p$), so wird $k$ ein quadratischer Rest von $p$ sein, wenn $\mu$ gerade ist, hingegen ein quadratischer Nichtrest, wenn $\mu$ ungerade ist. Die Zahl $\mu$, die bloss von $k$

20

und $p$ abhängig ist, mag durch das Zeichen $(k, p)$ dargestellt werden. Durch eine Reihe von Schlüssen, die keines Auszugs fähig sind, wird nun gezeigt, dass, wenn $k$ und $p$ zwei ungerade Zahlen sind, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, allemal $(k, p) + (p, k) + \frac{1}{4}(k-1)(p-1)$ eine *gerade* Zahl wird: daraus folgt also, dass, so oft $k$ und $p$ beide von der Form $4n+3$ sind, nothwendig eine der Zahlen $(k, p)$, $(p, k)$ gerade, die andere ungerade sein muss; in allen übrigen Fällen hingegen, d. i. so oft beiden Zahlen, $k$ und $p$, oder wenigstens einer, die Form $4n+1$ zukommt, werden nothwendig entweder $(k, p)$, $(p, k)$ beide zugleich gerade, oder beide zugleich ungerade sein. Hieraus folgt, in Verbindung mit obigem Lehrsatze, die Wahrheit des Fundamental-Theorems von selbst. — Auf demselben Wege, auf dem diese Resultate gefunden werden, wird in der Abhandlung zugleich ein neuer Beweis für die oben erwähnten beiden Specialsätze gegeben: es lässt sich nemlich leicht zeigen, dass $(-1, p) = \frac{1}{2}(p-1)$, also gerade oder ungerade, je nachdem $p$ die Form $4n+1$ oder $4n+3$ hat; eben so wird $(2, p) = \frac{1}{4}(p-1)$, wenn $p$ die Form $4n+1$ hat, und $(2, p) = \frac{1}{4}(p+1)$, wenn $p$ von der Form $4n+3$ ist, daher $(2, p)$ gerade wird, so oft $p$ die Form $8n+1$ oder $8n+7$ hat, hingegen ungerade, so oft $p$ von der Form $8n+3$ oder $8n+5$ ist.

Eine von Hrn. Prof. Gauss der königl. Societät der Wissenschaften übergebene Vorlesung:

*Summatio quarumdam serierum singularium*,

hat zum Zweck, eine merkwürdige, zur Theilung des Kreises gehörige, Untersuchung, wozu der Grund bereits in den *Disquisitionibus Arithmeticis* gelegt war, ausführlicher und in grösserer Allgemeinheit zu entwickeln, sie mit vollständigen Beweisen zu versehen, und ihren unerwarteten Zusammenhang mit andern wichtigen Wahrheiten zu zeigen. Wenn $n$ eine Primzahl, $k$ eine beliebige, durch $n$ nicht theilbare, ganze Zahl, $\omega$ den Bogen $\frac{1}{n}\cdot 360^0$ bedeutet, und die verschiedenen, unter den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots n-1$ befindlichen, quadratischen Reste von $n$ durch $a, a', a''$ u. s. w., hingegen die nach Ausschluss dieser von jenen übrig bleibenden, oder die quadratischen Nicht-Reste von $n$, durch $b, b', b''$ u. s. w. vorgestellt werden: so ist in dem angeführten Werke Art. 356 bewiesen, dass in dem Falle, wo $n$ von der Form $4m+1$ ist,

$$\left.\begin{array}{l}\cos ak\omega+\cos a'k\omega+\cos a''k\omega+\text{etc.}\\-\cos bk\omega-\cos b'k\omega-\cos b''k\omega-\text{etc.}\end{array}\right\}=\pm\sqrt{n}$$

und

$$\left.\begin{array}{l}\sin ak\omega+\sin a'k\omega+\sin a''k\omega+\text{etc.}\\-\sin bk\omega-\sin b'k\omega-\sin b''k\omega-\text{etc.}\end{array}\right\}=0$$

hingegen in dem Falle, wo $n$ von der Form $4m+3$ ist, die Summe der ersten Reihe $=0$, und die der zweiten $=\pm\sqrt{n}$ wird. Das der Wurzelgrösse vorzusetzende Zeichen hängt von dem Werthe der Zahl $k$ oder vielmehr von dessen Relation zu $n$ ab, und lässt sich leicht für *alle* Werthe von $k$ bei einem gegebenen Werthe von $n$ bestimmen, sobald es für *einen* bestimmt ist. Man kann nemlich zeigen, dass für alle Werthe von $k$, welche quadratische Reste von $n$ sind, durchaus *einerlei* Zeichen gilt, und dann das entgegengesetzte für alle diejenigen, die quadratische Nichtreste von $n$ sind. Da in dem angeführten Werke die Untersuchung so weit bereits geführt, und nur die Bestimmung des Zeichens für irgend einen Werth von $k$ noch übrig war: so hätte man glauben sollen, dass nach Beseitigung der Hauptsache diese nähere Bestimmung sich leicht würde ergänzen lassen, um so mehr, da die Induction dafür sogleich ein äusserst einfaches Resultat gibt: für $k=1$, oder für alle Werthe, welche quadratische Reste von $n$ sind, muss nemlich die Wurzelgrösse in obigen Formeln durchaus *positiv* genommen werden. Allein bei der Aufsuchung des Beweises dieser Bemerkung treffen wir auf ganz unerwartete Schwierigkeiten, und dasjenige Verfahren, welches so genugthuend zu der Bestimmung des absoluten Werths jener Reihen führte, wird durchaus unzureichend befunden, wenn es die vollständige Bestimmung der Zeichen gilt. Den *metaphysischen* Grund dieses Phänomens (um den bei den Französischen Geometern üblichen Ausdruck zu gebrauchen) hat man in dem Umstande zu suchen, dass die Analyse bei der Theilung des Kreises zwischen den Bögen $\omega, 2\omega, 3\omega \ldots (n-1)\omega$ keinen Unterschied macht, sondern alle auf gleiche Art umfasst; und da hiedurch die Untersuchung ein neues Interesse erhält: so fand Hr. Prof. G. hierin gleichsam eine Aufforderung, nichts unversucht zu lassen, um die Schwierigkeit zu beseitigen. Erst nach vielen und mannigfaltigen vergeblichen Versuchen ist ihm dieses auf einem auch an sich selbst merkwürdigen Wege gelungen. Er geht nemlich von der Summation einiger Reihen aus, deren Glieder unter folgender Form begriffen sind:

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)\;(1-xx)\;(1-x^3)\ldots.(1-x^\mu)}$$

Bezeichnet man, der Kürze halber, eine solche Function durch $(m,\mu)$, welche, wie in der Abhandlung gezeigt wird, immer eine *ganze* Function von $x$ ist: so brechen die Reihen

$$1-(m,1)+(m,2)-(m,3)+\text{etc.}$$
$$1+x^{\frac{1}{2}}(m,1)+x(m,2)+x^{\frac{3}{2}}(m,3)+\text{etc.}$$

nach dem $m+1^{\text{sten}}$ Gliede ab, insofern $m$ eine ganze positive Zahl bedeutet, und die Summe der ersten Reihe wird für gerade Werthe von $m$

$$=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots(1-x^{m-1})$$

und $=0$ für ungerade Werthe von $m$; hingegen die Summe der zweiten Reihe wird allemal

$$=(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)(1+x^{\frac{3}{2}})\ldots(1+x^{\frac{1}{2}m})$$

Auch für gebrochene und negative Werthe von $m$ führt die Summation dieser Reihen auf interessante Resultate, obwohl dieselben zu der gegenwärtigen Absicht nicht nöthig sind: wir begnügen uns, nur eines derselben hier anzuführen. Die unendliche Reihe

$$1+x+x^3+x^6+x^{10}+\text{etc.}$$

wo die Exponenten die Trigonalzahlen sind, ist das Product aus den Factoren

$$\frac{1-xx}{1-x}\times\frac{1-x^4}{1-x^3}\times\frac{1-x^6}{1-x^5}\times\frac{1-x^8}{1-x^7}\ \text{etc.}$$

oder, wenn man lieber will, aus

$$(1+x)^2(1+xx)^2(1+x^3)^2(1+x^4)^2\ \text{etc.}$$

in

$$(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)\ \text{etc.}$$

Die Entwickelung der Art, wie diese Summationen auf den Hauptgegenstand angewandt werden, würde uns hier zu weit führen: wir dürfen die Leser um so eher auf diese selbst verweisen, da sie bald im Druck erscheinen wird. Jene oben angeführten Summationen sind nur eine specielle Anwendung von der Summation folgender Reihen:

$$1+\cos k\omega+\cos 4k\omega+\cos 9k\omega+\text{etc.}+\cos(n-1)^2k\omega=T$$
$$\sin k\omega+\sin 4k\omega+\sin 9k\omega+\text{etc.}+\sin(n-1)^2k\omega=U$$

welche in der Abhandlung für alle Werthe von $k$, und ohne die Einschränkung.

dass $n$ eine Primzahl sei, gelehrt wird. Es wird nämlich gezeigt, dass

$$T = \pm\sqrt{n},\ T = \pm\sqrt{n},\ T = 0,\ T = 0$$

und

$$U = \pm\sqrt{n},\ U = 0,\qquad U = 0,\ U = \pm\sqrt{n}$$

wird, je nachem $n$ von der Form $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ resp. ist; das Zeichen der Wurzelgrösse hängt hier wiederum von $k$ ab, und die die Unterscheidung vieler einzelner Fälle nöthig machende Bestimmung desselben auf zwei verschiedenen Wegen wird so entwickelt und bewiesen, dass nichts zu wünschen übrig bleiben wird. Die Vergleichung dieser beiden Wege unter sich führt noch auf folgenden sehr merkwürdigen Lehrsatz: Wenn $n$ das Product aus einer beliebigen Anzahl ungleicher ungerader Primzahlen $a$, $b$, $c$, $d$ u. s. w. ist, unter welchen sich zusammen $\mu$ von der Form $4m+3$ befinden; wenn ferner unter jenen Factoren zusammen $\nu$ vorkommen, von deren jedem das Product der übrigen (also resp. $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{b}$, $\frac{n}{c}$, $\frac{n}{d}$ u. s. w.) ein quadratischer Nichtrest ist; so wird $\nu$ gerade sein, so oft $\mu$ von der Form $4m$ oder $4m+1$ ist, hingegen ungerade, so oft $\mu$ von der Form $4m+2$ oder $4m+3$ ist. Von diesem Lehrsatze ist das bekannte Fundamental-Theorem bei den quadratischen Resten nur ein specieller Fall, sowie umgekehrt jener leicht aus diesem abgeleitet werden kann. Man sieht sich also durch diese Untersuchungen zugleich im Besitz von einem vierten Beweise dieses wichtigen Theorems, welches von dem Verf. zuerst auf zwei ganz verschiedenen Wegen in den *Disquisitionibus Arithmeticis* und auf einem dritten eben so verschiedenen unlängst in einer eigenen Abhandlung bewiesen war.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1817. März 10.

Am 10. Februar wurde der Königl. Societät von Hrn. Hofr. Gauss eine Vorlesung eingereicht, überschrieben:

*Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae.*

Es ist eine Eigenthümlichkeit der höhern Arithmetik, dass so viele ihrer schönsten Lehrsätze mit grösster Leichtigkeit durch Induction entdeckt werden können, deren Beweise jedoch nichts weniger als nahe liegen, sondern oft erst nach vielen vergeblichen Versuchen mit Hülfe tiefeindringender Untersuchungen und glücklicher Combinationen gefunden werden. Diess merkwürdige Phänomen entspringt aus der oft wunderbaren Verkettung der verschiedenartigen Lehren in jenem Theile der Mathematik, und eben daher kommt es, dass häufig solche Lehrsätze, von denen anfangs ein Beweis Jahre lang vergeblich gesucht war, späterhin sich auf mehreren ganz verschiedenen Wegen beweisen lassen. Sobald ein neuer Lehrsatz durch Induction entdeckt ist, hat man die Auffindung *irgend eines* Beweises freilich als das erste Erforderniss zu betrachten: allein nachdem ein solcher geglückt ist, darf man in der höhern Arithmetik die Untersuchung nicht immer als abgeschlossen und die Aufspürung anderer Beweise als überflüssigen Luxus ansehen. Denn theils kommt man gewöhnlich auf die schönsten und einfachsten

Beweise nicht zuerst, und dann ist gerade die Einsicht in die wunderbare Verkettung der Wahrheiten der höhern Arithmetik dasjenige, was einen Hauptreiz dieses Studiums ausmacht, und nicht selten wiederum zur Entdeckung neuer Wahrheiten führt. Aus diesen Gründen ist hier die Auffindung neuer Beweise für schon bekannte Wahrheiten öfters für wenigstens eben so wichtig anzusehen, als die Entdeckung der Wahrheiten selbst. Kennern der höhern Arithmetik sind diese Betrachtungen nicht neu; man weiss, dass ein grosser Theil von Eulers Verdiensten um dieselbe in der Auffindung von Beweisen für Lehrsätze besteht, die schon von Fermat wie es scheint durch Induction gefunden waren.

Die Lehre von den quadratischen Resten gibt einen einleuchtenden Beleg zu dem vorhin Gesagten. Sie beruhet hauptsächlich auf dem sogenannten Fundamental-Theorem, welches darin besteht, dass die wechselseitigen Relationen zweier (ungeraden positiven) Primzahlen zu einander (in sofern der eine quadratischer Rest oder Nichtrest der andern ist) einerlei sind, so oft eine der Primzahlen oder beide unter der Form $4k+1$ stehen, entgegengesetzt aber, so oft beide Primzahlen von der Form $4k+3$ sind. Für solche Leser, die mit der höhern Arithmetik weniger bekannt sind, erinnern wir, dass eine ganze Zahl quadratischer Rest einer andern heisst, wenn die erstere um ein Vielfaches der andern vermehrt ein Quadrat geben kann; Nichtrest hingegen, wenn diess nicht möglich ist. Die Geschichte dieses schönen durch Induction äusserst leicht zu findenden Lehrsatzes wollen wir hier nicht vollständig wiederholen, sondern nur bemerken, dass der Verfasser vorliegender Abhandlung, nach Anfangs ziemlich lange vergeblich angestellten Untersuchungen, nach und nach bereits vier unter sich ganz verschiedene Beweise gegeben hat, wovon zwei in den *Disquisitionibus Arithmeticis* enthalten sind, der dritte den Gegenstand einer eigenen Abhandlung im sechzehnten Bande der Commentationen ausmacht, und der vierte in eine Abhandlung *summatio quarumdam serierum singularium* im ersten Bande der *Commentationes recentiores* verwebt ist; über diese beiden Abhandlungen kann man unsere Anzeigen 1808. Mai 12 und Sept. 19 nachsehen, wo auch vollständigere geschichtliche Nachweisungen befindlich sind. Dass der Verf. bei diesen vier Beweisen, ungeachtet jeder derselben für sich in Rücksicht auf Strenge nichts zu wünschen übrig lässt, noch nicht stehen geblieben ist, bedarf zwar bei den Freunden der höhern Arithmetik keiner Rechtfertigung; indessen würde er doch wahrscheinlich sich nicht so eifrig bemüht haben, jenen Beweisen noch andere hinzuzufügen, wenn

nicht ein besonderer Umstand ihn dazu veranlasst hätte, der hier erwähnt werden muss. Seit dem Jahre 1805 hatte er nemlich angefangen, sich mit den Theorien der cubischen und biquadratischen Reste zu beschäftigen, welche noch weit reichhaltiger und interessanter sind, als die Theorie der quadratischen Reste. Es zeigten sich bei jenen Untersuchungen dieselben Erscheinungen wie bei der letztern, nur gleichsam mit vergrössertem Massstabe. Durch Induction, sobald nur der rechte Weg dazu eingeschlagen war, fanden sich sogleich eine Anzahl höchst einfacher Theoreme, die jene Theorien ganz erschöpfen, mit den für die quadratischen Reste geltenden Lehrsätzen eine überraschende Aehnlichkeit haben, und namentlich auch zu dem Fundamentaltheorem das Gegenstück darbieten. Allein die Schwierigkeiten, für jene Lehrsätze ganz befriedigende Beweise zu finden, zeigten sich hier noch viel grösser, und erst nach vielen, eine ziemliche Reihe von Jahren hindurch fortgesetzten Versuchen ist es dem Verfasser endlich gelungen, sein Ziel zu erreichen. Die grosse Analogie der Lehrsätze selbst, bei den quadratischen und bei den höhern Resten, liess vermuthen, dass es auch analoge Beweise für jene und diese geben müsse; allein die zuerst für die quadratischen Reste gefundenen Beweisarten vertrugen gar keine Anwendung auf die höhern Reste, und gerade dieserUmstand war der Bewegungsgrund, für jene immer noch andere neue Beweise aufzusuchen. Der Verf. wünscht daher, dass man die vorliegende Abhandlung, die für die Theorie der quadratischen Reste noch einige neue Hülfsquellen eröffnet, als Vorläuferin der Theorie der cubischen und biquadratischen Reste betrachte, die er in Zukunft bekannt zu machen denkt, und die zu den schwierigsten Gegenständen der höhern Arithmetik gehören.

Die gegenwärtige Abhandlung besteht aus dreien von einander unabhängigen Theilen. Sie enthält nemlich den fünften und sechsten Beweis des Fundamental-Theorems und eine neue, mit dem dritten Beweise zusammenhängende Methode, zu entscheiden, ob eine vorgegebene ganze Zahl von einer gegebenen Primzahl quadratischer Rest oder Nichtrest sei. Unter den vier ersten Beweisen war der dritte unstreitig derjenige, der die grösste Einfachheit mit Unabhängigkeit von fremdartigen Untersuchungen vereinigte, daher ihn auch Legendre in die neue Ausgabe seines *Essai d'une théorie des nombres* aufgenommen hat. Der *fünfte* Beweis scheint dem dritten in beiden Hinsichten wenigstens gleich zu kommen. Beide Beweise haben insofern einige Verwandtschaft, dass sie von einem und demselben Lehnsatze ausgehen, sind aber bei der weitern Ausführung völlig von ein-

ander verschieden. Dieser Lehnsatz besteht in Folgendem: Wenn $m$ eine (positive ungerade) Primzahl; $M$ eine ganze durch $m$ nicht theilbare Zahl bedeutet, wenn ferner unter den Resten, die aus der Division der Producte

$$M,\ 2M,\ 3M,\ 4M \ldots\ldots \tfrac{1}{2}(m-1)M$$

durch $m$ entstehen, die Anzahl derjenigen, die grösser als $\frac{1}{2}m$ sind, durch $n$ bezeichnet wird, so ist $M$ quadratischer Rest oder Nichtrest von $m$, jenachdem $n$ gerade oder ungerade ist. Um nun zu dem Beweise des Fundamentallehrsatzes zu gelangen, wird angenommen, dass auch $M$ eine ungerade positive Primzahl und $N$ in Beziehung auf $M$ und $m$ dasselbe bedeutet, was $n$ in Beziehung auf $m$ und $M$ ausdrückt, so dass $N$ gerade oder ungerade entscheidet, ob $m$, quadratischer Rest oder Nichtrest von $M$ ist. Durch eine sehr kurze Reihe von Schlüssen zeigt der Verfasser, dass die Anzahl aller positiven ganzen Zahlen, die zugleich kleiner als $\frac{1}{2}mM$ sind, mit $m$ dividirt einen Rest kleiner als $\frac{1}{2}m$, und mit $M$ dividirt einen Rest kleiner als $\frac{1}{2}M$ geben,

$$= \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1) + \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}N$$

und folglich allemal

$$\tfrac{1}{4}(m-1)(M-1) + n + N$$

eine gerade Zahl sei. So oft also wenigstens eine der Zahlen $m, M$ von der Form $4k+1$ ist, mithin $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$ gerade, wird auch $n+N$ gerade sein, folglich entweder $n$ und $N$ beide gerade, oder beide ungerade. Wenn hingegen sowohl $m$ als $M$ von der Form $4k+3$ ist, wird nothwendig $n+N$ ungerade, folglich eine der Zahlen $n, N$ gerade, die andere ungerade sein. Hieraus folgt in Verbindung mit obigem Lehnsatze das Fundamental-Theorem von selbst.

Der *sechste* Beweis ist zwar von gleicher Kürze und Concinnität wie der fünfte, beruhet aber doch auf etwas künstlichern Combinationen. Der beschränkte Raum dieser Blätter erlaubt nur, mit Uebergehung des Einzelnen, hier das Hauptmoment zu berühren. Es bezeichnen

$p, q$ zwei (ungleiche positive ungerade) Primzahlen,

$\alpha$ eine sogenannte *radix primitiva* für den Modulus $p$, d. i. eine durch $p$ nicht theilbare (hier positive) ganze Zahl von der Art, dass keine niedrigere Potenz als $\alpha^{p-1}$ nach dem Modulus $p$ der Einheit congruent wird

$x$ eine unbestimmte Grösse

$\xi$ die Function

$$x - x^{\alpha} + x^{\zeta} - x^{\eta} + x^{\theta} - \text{etc.} - x^{\lambda}$$

wo (des bequemern Drucks wegen) $\zeta, \eta, \theta \ldots \lambda$ statt der Zahlen $\alpha\alpha$, $\alpha^3$, $\alpha^4 \ldots \alpha^{p-2}$ gesetzt sind;

$\varepsilon$ die Einheit, positiv genommen, wenn $p$ von der Form $4k+1$, negativ, wenn $p$ von der Form $4k+3$ ist;

$\delta$ die Einheit, positiv genommen, wenn wenigstens eine der Zahlen $p, q$ von der Form $4k+1$ ist, negativ, wenn beide von der Form $4k+3$ sind;

$\gamma$ die Einheit, positiv genommen, wenn $q$ ein quadratischer Rest von $p$ ist, negativ, wenn $q$ quadratischer Nichtrest von $p$ ist;

$\beta$ die Einheit, positiv genommen, wenn $p$ ein quadratischer Rest von $q$, negativ, wenn $p$ ein quadratischer Nichtrest von $q$ ist.

Nach diesen Vorbereitungen folgt leicht aus dem 51. Art. der *Disquisitiones Arithmeticae*, dass die Function

$$\xi^q - x^q + x^{q\alpha} - x^{q\zeta} + x^{q\eta} - x^{q\theta} + \text{etc.} + x^{q\lambda}$$

entwickelt lauter durch $q$ theilbare Coëfficienten bekommt, und daher, wenn diese Function $= qX$ gesetzt wird, $X$ eine auch in Beziehung auf die Coëfficienten *ganze* Function werde. Durch Schlüsse, in die näher einzugehen, hier zu weitläufig sein würde, wird in der Abhandlung bewiesen, dass die Function $qX\xi$ mit $x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + x^{p-4} + \text{etc.} + x + 1$ dividirt, den Rest

$$\varepsilon p\,(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma)$$

gibt, daher aus der Division der Function $X\xi$ mit demselben Divisor der Rest

$$\frac{\varepsilon p\,(\delta p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma)}{q}$$

hervorgehen wird. Diese Grösse muss daher nothwendig eine ganze Zahl sein, woraus, weil $\delta\delta = 1$ ist, leicht geschlossen wird, dass

$$p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \gamma\delta$$

durch $q$ theilbar sein müsse. Da nun auch $p^{\frac{1}{2}(q-1)} - \beta$ durch $q$ nach einem bekannten Theorem theilbar ist, so wird nothwendig $\beta = \gamma\delta$ sein, woraus wiederum das Fundamental-Theorem von selbst folgt.

Das Fundamental-Theorem, verbunden mit einigen bekannten Lehnsätzen, kann zwar zu einer ziemlich kurzen Auflösung der Aufgabe dienen, zu entscheiden, ob eine vorgegebne ganze positive Zahl von einer gegebnen Primzahl quadratischer Rest oder Nichtrest sei, wie in der Abhandlung ausführlich gezeigt ist. Allein bei weiterm Nachdenken über den dritten Beweis des Fundamental-Theorems kam der Verf. auf eine noch viel geschmeidigere Auflösung, welche die dritte Abtheilung der Abhandlung ausmacht, und wovon wir hier bloss die Endregel hersetzen, indem wir die Entwickelung ihrer Gründe Kürze halber übergehen. Wenn entschieden werden soll, ob die ganze positive Zahl $b$, welche durch die Primzahl $a$ nicht theilbar ist, von dieser ein quadratischer Rest oder Nichtrest sei, so bilde man, ganz auf dieselbe Art, wie wenn der grösste gemeinschaftliche Divisor von $a$ und $b$ gesucht werden sollte, die Gleichungen

$$a = \sigma b + c$$
$$b = \gamma c + d$$
$$c = \delta d + e$$
$$d = \varepsilon e + f \text{ u. s. w.}$$

bis man in der Reihe der Zahlen $a, b, c, d, e, f$ u. s. w. auf die Einheit kommt. Man bezeichne die Zahlen $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}d$ u. s. w.; mit Weglassung des ihnen anhängenden Bruches $\frac{1}{2}$, in so fern einige der Zahlen $a, b, c, d$ u. s. w. ungerade sind, durch $a', b', c', d'$ u. s. w.; man nenne $\mu$ die Anzahl der in der Reihe $a', b', c', d'$ u. s. w. vorkommenden Folgen zweier ungeraden Zahlen unmittelbar nach einander, endlich nenne man $\nu$ die Anzahl derjenigen ungeraden Zahlen in der Reihe $\sigma, \gamma, \delta, \varepsilon$ u. s. w., welchen in der Reihe $b', c', d', e'$ u. s. w. der Ordnung nach eine Zahl von der Form $4k+1$ oder $4k+2$ entspricht. Diess vorausgesetzt, wird $b$ quadratischer Rest oder Nichtrest von $a$ sein, je nachdem $\mu+\nu$ gerade oder ungerade ist, den einzigen Fall ausgenommen, wo zugleich $b$ gerade und $a$ von der Form $8k+3$ oder $8k+5$ ist, in welchen von jener Regel das Gegentheil Statt findet, so dass ein gerades $\mu+\nu$ anzeigt, dass $b$ quadratischer Nichtrest von $a$ ist, ein ungerades $\mu+\nu$ hingegen, dass $b$ quadratischer Rest von $a$ ist.

---

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1825 April 11.

Am 5. April überreichte Hr. Hofr. Gauss der Königl. Societät eine Vorlesung, überschrieben:

*Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio prima.*

Die Theorie der quadratischen Reste bildet bekanntlich einen der interessantesten Theile der Höhern Arithmetik, welche man jetzt nach vielfach wiederholten Untersuchungen als vollendet und abgeschlossen betrachten kann: die Geschichte desselben betreffende Nachrichten findet man in diesen Blättern 1808 Mai 12 und Sept. 19, und 1817 März 10. An letzterm Orte sind auch bereits einige vorläufige Nachrichten über die Nachforschungen mitgetheilt, welche der Verfasser der vorliegenden Abhandlung seit dem Jahre 1805 über die verwandte, eben so fruchtbare und interessante, aber sehr viel schwierigere Theorie der cubischen und biquadratischen Reste angestellt hatte. Obgleich schon damals im Besitz der wesentlichen Momente dieser Theorien, ist er doch bisher durch andere Arbeiten abgehalten, öffentlich etwas davon bekannt zu machen, und erst jetzt ist es ihm möglich geworden, sich mit der Ausarbeitung eines Theils dieser Untersuchungen zu beschäftigen. Der Anfang ist jetzt mit der Theorie der biquadratischen Reste gemacht, die der Theorie der quadratischen Reste näher verwandt ist, als die der cubischen. Inzwischen ist die gegenwärtige Abhandlung

noch keinesweges dazu bestimmt, den überaus reichhaltigen Gegenstand zu erschöpfen. Die Entwickelung der *allgemeinen* Theorie, welche eine ganz eigenthümliche Erweiterung des Feldes der höhern Arithmetik erfordert, bleibt vielmehr der künftigen Fortsetzung vorbehalten, während in diese erste Abhandlung diejenigen Untersuchungen aufgenommen sind, welche sich ohne eine solche Erweiterung vollständig darstellen liessen. Von den Resultaten kann in dieser Anzeige nur ein Theil ausgehoben werden.

Eine ganze Zahl $a$ heisst biquadratischer Rest der ganzen Zahl $p$, wenn es Zahlen der Form $x^4-a$ gibt, die durch $p$ theilbar sind; biquadratischer Nichtrest hingegen, wenn keine Zahlen jener Form durch $p$ theilbar sein können. Offenbar sind alle biquadratischen Reste von $p$ zugleich quadratische Reste derselben Zahl, und also alle quadratischen Nichtreste auch biquadratische Nichtreste: allein nicht alle quadratischen Reste sind zugleich biquadratische Reste. Es ist zureichend, die Untersuchungen auf den Fall einzuschränken, wo $p$ eine Primzahl von der Form $4n+1$, und $a$ nicht durch $p$ theilbar ist, da alle anderen Fälle sich leicht auf diesen zurückführen lassen.

Die Untersuchungen über diesen Gegenstand zerfallen in zwei Abtheilungen, je nachdem $p$ oder $a$ als gegeben angesehen wird. Die erstere ist von viel geringerer Schwierigkeit als die zweite, und verglichen mit letzterer als ganz elementarisch zu betrachten. Alles Wesentliche, was darüber zu sagen ist, enthält die Abhandlung vollständig.

Aus der zweiten Abtheilung hingegen sind hier nur erst einige specielle Fälle abgehandelt, die sich ohne zu grosse Zurüstungen abmachen liessen, und als Vorbereitungen zu der künftig zu gebenden allgemeinen Theorie dienen können. Diess sind diejenigen, wo $a=-1$, und $a=\pm 2$ gesetzt wird. Der erstere Fall hat gar keine Schwierigkeit: es war auch schon in dem Werke, *Disquisitiones Arithmeticae*, gezeigt, dass $-1$ ein biquadratischer Rest von $p$ ist, so oft $p$ die Form $8n+1$ hat, hingegen ein bloss quadratischer Rest und biquadratischer Nichtrest von $p$, wenn $p$ von der Form $8n+5$ wird. Ganz anders verhält es sich mit dem Fall $a=\pm 2$. Es ist zwar längst bekannt, dass $+2$ und $-2$ von $p$ quadratische und also auch biquadratische Nichtreste sind, wenn $p$ die Form $8n+5$ hat, und wenigstens quadratische Reste, wenn $p$ von der Form $8n+1$ ist, wie auch dass bei dieser Form von $p$ entweder $+2$ und $-2$ zugleich biquadratische Reste, oder zugleich biquadratische Nichtreste werden: al-

lein die Unterscheidung, welcher dieser beiden Fälle eintrete, ist eine Untersuchung von viel höherer Art, und es werden dazu in der Abhandlung zwei verschiedene Criterien entwickelt.

Das erste Criterium hängt mit der Zerlegung der Zahl $p$ in ein einfaches und ein doppeltes Quadrat zusammen, die bekanntlich (da, wie schon bemerkt ist, angenommen wird, dass $p$ eine Primzahl sei) immer möglich und nur auf Eine Art möglich ist. Setzt man $p = gg + 2hh$, so wird $\pm 2$ ein biquadratischer Rest von $p$, wenn $g$ von der Form $8n+1$ oder $8n+7$, ein biquadratischer Nichtrest hingegen, wenn $g$ von der Form $8n+3$ oder $8n+5$ ist.

Das zweite Criterium hängt zusammen mit der Zerlegung der Zahl $p$ in zwei Quadrate, die bekanntlich auch immer möglich und nur auf Eine Art möglich ist. Setzt man $p = ee + ff$, und nimmt an, dass $ee$ das ungerade, $ff$ das gerade Quadrat bedeutet, so bringt schon die vorausgesetzte Form von $p = 8n+1$ mit sich, dass auch $\frac{1}{2}f$ eine gerade Zahl wird, also $f$ entweder von der Form $8m$ oder von der Form $8m+4$: im erstern Fall nun wird $\pm 2$ biquadratischer Rest, im andern biquadratischer Nichtrest von $p$ sein.

Wir deuten hier nur die Bemerkung an, wozu die höhere Arithmetik so oft Gelegenheit gibt, dass nicht so wohl die Schönheit und Einfachheit der Theoreme selbst, als die Schwierigkeit ihrer Begründung sie vorzüglich merkwürdig macht. Sobald man einmal veranlasst ist, das Dasein eines Zusammenhanges zwischen dem Verhalten der Zahl $\pm 2$ und den beiden angeführten Zerlegungen der Zahl $p$ zu vermuthen, ist es äusserst leicht, diesen Zusammenhang durch Induction wirklich zu entdecken. Allein schon bei dem ersten Criterium ist der Beweis dafür nicht ganz leicht zu führen, viel tiefer versteckt liegt er aber bei dem zweiten, wo er mit anderweitigen subtilen Hülfsuntersuchungen innigst verkettet ist, die ihrerseits wieder zu einer merkwürdigen Erweiterung der Theorie der Kreistheilung führen. Diese wunderbare Verkettung der Wahrheiten ist es vorzüglich was, wie man schon oft bemerkt hat, der höhern Arithmetik einen so eigenthümlichen Reiz gibt. Diese Begründungen selbst vertragen übrigens natürlich hier keinen Auszug, und müssen in der Abhandlung selbst nachgesehen werden. Allein ein paar andere neue arithmetische Theoreme, welche gleichfalls mit der Begründung des zweiten Criterium innigst verbunden sind, verdienen wohl, ihrer Einfachheit wegen, hier noch besonders herausgehoben zu werden.

Wenn $p$ eine Primzahl von der Form $4k+1$ ist, und $= ee + ff$ ge-

setzt wird, so dass $ee$ das ungerade, $ff$ das gerade Quadrat bedeutet; wenn man ferner

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots k = q$$
$$(k+1)(k+2)(k+3) \ldots\ldots 2k = r$$

setzt; so wird allemal $\pm e$ der kleinste Rest sein, welcher hervorgeht, indem man $\frac{r}{2q}$ mit $p$ dividirt, und $\pm f$ der kleinste Rest, welchen man aus der Division von $\frac{1}{2}rr$ mit $p$ erhält (kleinsten Rest immer so verstanden, dass er zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ genommen wird). Die Zahl $\frac{r}{2q}$, welche für $p = 5$ den Werth 1 erhält, kann man für grössere Werthe von $p$ auch in folgende Form setzen

$$\frac{6 \,.\, 10 \,.\, 14 \,.\, 18 \ldots\ldots (p-3)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots\ldots k}$$

Es ist sehr merkwürdig, dass so die Zerlegung der Zahl $p$ in zwei Quadrate ganz auf directem Wege erhalten werden kann: aber fast noch merkwürdiger ist ein dabei Statt findender Nebenumstand. Allemal nemlich findet man durch dieses Verfahren die Wurzel des ungeraden Quadrats, $e$, mit positivem Zeichen, wenn $e$, positiv genommen, von der Form $4m+1$ ist, und mit negativem, wenn $e$ positiv genommen von der Form $4m+3$ ist. Hingegen hat für das Zeichen, mit welchem die Wurzel des geraden Quadrats, $f$, aus jener Operation hervorgeht, noch durchaus keine allgemeine Regel aufgefunden werden können, weder *a priori*, noch auf dem Wege der Induction, und der Verfasser empfiehlt daher, am Schlusse der Abhandlung, diesen Gegenstand den Freunden der höhern Arithmetik zu weiterer Nachforschung, überzeugt, dass mit dem Gelingen derselben sich zugleich eine ergiebige Quelle neuer Erweiterungen dieses schönen Theils der Mathematik eröffnen werde.

---

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1831 April 23.

Eine am 15. April von dem Hofr. Gauss der Königl. Societät überreichte Vorlesung:

*Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda,*

ist die Fortsetzung der bereits im sechsten Bande der *Commentationes novae* abgedruckten Abhandlung, wovon auch in unsern Blättern zu seiner Zeit 1825 April 11 eine Anzeige gemacht war. Auch diese Fortsetzung, obgleich mehr als doppelt stärker wie die erste Abhandlung, erschöpft den überaus reichhaltigen Gegenstand noch nicht, und erst einer künftigen dritten Abhandlung wird die Vollendung des Ganzen verbehalten bleiben.

Obgleich die Grundbegriffe dieser Lehren und der Inhalt der ersten Abhandlung als allen, die aus der höhern Arithmetik ein Studium gemacht haben, bekannt vorausgesetzt werden können, wollen wir doch jene zur Bequemlichkeit solcher Freunde dieses Theils der Mathematik, welchen die erste Abhandlung nicht gleich zur Hand ist, hier kurz in Erinnerung bringen. In Beziehung auf eine beliebige ganze Zahl $p$ heisst eine andere $k$ ein biquadratischer Rest, wenn es Zahlen der Form $x^4 - k$ gibt, die durch $p$ theilbar sind; im entgegengesetzten Fall heisst sie biquadratischer Nichtrest von $p$. Es ist zureichend, sich hiebei auf den Fall einzuschränken, wo $p$ eine Primzahl der Form $4n+1$, und $k$ durch

dieselbe nicht theilbar ist, da alle andere Fällen entweder für sich klar, oder auf diesen zurückzuführen sind.

Für einen solchen *gegebenen* Werth von $p$ zerfallen sämmtliche durch $p$ nicht theilbare Zahlen in *vier* Klassen, wovon die eine die biquadratischen Reste, eine zweite solche biquadratische Nichtreste, die quadratische Reste von $p$ sind, enthält, und in die beiden übrigen die biquadratischen Nichtreste, welche zugleich quadratische Nichtreste sind, vertheilt werden. Das Princip dieser Vertheilung besteht darin, dass allemal entweder $k^n - 1$, oder $k^n + 1$, oder $k^n - f$, oder $k^n + f$ durch $p$ theilbar sein wird, wo $f$ eine ganze Zahl bedeutet, die $ff + 1$ durch $p$ theilbar macht. Jeder, dem die elementarische Terminologie bekannt ist, sieht von selbst, wie diese Worterklärungen in dieselbe eingekleidet werden.

Die Theorie dieser Classificirung nicht nur für den an der Oberfläche liegenden Fall $k = -1$, sondern auch für die, subtile Hülfsuntersuchungen erfordernden, Fälle $k = \pm 2$, findet sich in der ersten Abhandlung ganz vollendet. Im Anfang der gegenwärtigen Abhandlung wird nun zu grössern Werthen von $k$ fortgeschritten: man braucht aber dabei zunächst nur solche in Betracht zu ziehen, die selbst Primzahlen sind, und der Erfolg zeigt, dass die Resultate am einfachsten ausfallen, wenn man die Werthe positiv oder negativ nimmt, je nachdem sie, absolut betrachtet, von der Form $4m+1$ oder $4m+3$ sind. Die Induction gibt hier sofort mit grosser Leichtigkeit eine reiche Ernte von neuen Lehrsätzen, wovon wir hier nur ein paar anführen. Die Numerirung der Classen mit 1, 2, 3, 4 wird auf die Fälle bezogen, wo $k^n$ den Zahlen $1, f, -1, -f$ congruent wird; zugleich ist für die Zahl $f$ immer derjenige Werth angenommen, welcher $a + bf$ durch $p$ theilbar macht, wenn $aa + bb$ die Zerlegung von $p$ in ein ungerades und ein gerades Quadrat vorstellt. So findet sich durch die Induction, dass die Zahl $-3$ allemal zu der Classe 1, 2, 3, 4 gehört, je nachdem $b$, $a+b$, $a$, $a-b$ durch 3 theilbar ist; dass die Zahl $+5$ der Reihe nach zu jenen Classen gehört, je nachdem $b$, $a-b$, $a$, $a+b$ durch 5 theilbar ist; dass die Zahl $-7$ in die Classe 1 fällt, wenn $a$ oder $b$; in die Classe 2, wenn $a-2b$ oder $a-3b$; in die Classe 3, wenn $a-b$ oder $a+b$; in die Classe 4, wenn $a+2b$ oder $a+3b$ durch 7 theilbar ist. Aehnliche Theoreme ergeben sich in Beziehung auf die Zahlen $-11$, $+13$, $+17$, $-19$, $-23$ u. s. f. So leicht sich aber alle dergleichen specielle Theoreme durch die Induction entdecken lassen, so schwer scheint

es, auf diesem Wege ein allgemeines Gesetz für diese Formen aufzufinden, wenn auch manches Gemeinschaftliche bald in die Augen fällt, und noch viel schwerer ist es, für diese Lehrsätze die Beweise zu finden. Die für die Zahlen $+2$ und $-2$ in der ersten Abhandlung gebrauchten Methoden vertragen hier keine Anwendung mehr; und wenn gleich andere Methoden ebenfalls das, was sich auf die erste und dritte Classe bezieht, zu erledigen dienen könnten, so zeigen sich doch solche zur Begründung von *vollständigen* Beweisen untauglich.

Man erkennt demnach bald, dass man in dieses reiche Gebiet der höhern Arithmetik nur auf ganz neuen Wegen eindringen kann. Der Verf. hatte schon in der ersten Abhandlung eine Andeutung gegeben, dass dazu eine eigenthümliche Erweiterung des ganzen Feldes der höhern Arithmetik wesentlich erforderlich ist, ohne damals sich näher darüber zu erklären, worin dieselbe bestehe: die gegenwärtige Abhandlung ist dazu bestimmt, diesen Gegenstand ins Licht zu setzen.

Es ist dieses nichts anders, als dass für die wahre Begründung der Theorie der biquadratischen Reste das Feld der höhern Arithmetik, welches man sonst nur auf die reellen ganzen Zahlen ausdehnte, auch über die imaginären erstreckt werden, und diesen das völlig gleiche Bürgerrecht mit jenen eingeräumt werden muss. Sobald man diess einmal eingesehen hat, erscheint jene Theorie in einem ganz neuen Lichte, und ihre Resultate gewinnen eine höchst überraschende Einfachheit.

Ehe jedoch in diesem erweiterten Zahlengebiet die Theorie der biquadratischen Reste selbst entwickelt werden kann, müssen in jenem die dieser Theorie vorangehenden Lehren der höhern Arithmetik, die bisher nur in Beziehung auf reelle Zahlen bearbeitet sind, an dieser Erweiterung Theil nehmen. Von diesen vorgängigen Untersuchungen können wir hier nur Einiges anführen. Der Verf. nennt jede Grösse $a+bi$, wo $a$ und $b$ reelle Grössen bedeuten, und $i$ der Kürze wegen anstatt $\sqrt{-1}$ geschrieben ist, eine complexe ganze Zahl, wenn zugleich $a$ und $b$ ganze Zahlen sind. Die complexen Grössen stehen also nicht den reellen entgegen, sondern enthalten diese als einen speciellen Fall, wo $b=0$, unter sich. Zur bequemen Handhabung war es erforderlich, mehrere auf die complexen Grössen sich beziehende Begriffsbildungen mit besondern Benennungen zu belegen, welche wir aber in dieser Anzeige zu umgehen suchen werden.

So wie in der Arithmetik der reellen Zahlen nur von zwei Einheiten, der positiven und negativen, die Rede ist, so haben wir in der Arithmetik der com-

plexen Zahlen vier Einheiten $+1$, $-1$, $+i$, $-i$. *Zusammengesetzt* heisst eine complexe ganze Zahl, wenn sie das Product aus zwei von den Einheiten verschiedenen ganzen Factoren ist; eine complexe Zahl hingegen, die eine *solche* Zerlegung in Factoren nicht zulässt, heisst eine complexe Primzahl. So ist z. B die reelle Zahl 3, auch als complexe Zahl betrachtet, eine Primzahl, während 5 als complexe Zahl zusammengesetzt ist $=(1+2i)(1-2i)$. Eben so wie in der höhern Arithmetik der reellen Zahlen spielen auch in dem erweiterten Felde dieser Wissenschaft die Primzahlen eine Hauptrolle.

Wird eine complexe ganze Zahl $a+bi$ als Modulus angenommen, so lassen sich $aa+bb$ unter sich nicht congruente, und nicht mehrere, complexe Zahlen aufstellen, von denen einer jede vorgegebene ganze complexe Zahl congruent sein muss, und die man ein vollständiges System incongruenter Reste nennen kann. Die sogenannten kleinsten und absolut kleinsten Reste in der Arithmetik der reellen Zahlen haben auch hier ihr vollkommenes Analogon. So besteht z. B. für den Modulus $1+2i$ das vollständige System der absolut kleinsten Reste aus den Zahlen $0$, $1$, $i$, $-1$ und $-i$. Fast die sämmtlichen Untersuchungen der vier ersten Abschnitte der *Disquisitiones Arithmeticae* finden mit einigen Modificationen, auch in der erweiterten Arithmetik ihren Platz. Das berühmte Fermatsche Theorem z. B. nimmt hier folgende Gestalt an: Wenn $a+bi$ eine complexe Primzahl ist, und $k$ eine durch jene nicht theilbare complexe Zahl, so ist immer $k^{aa+bb-1}\equiv 1$ für den Modulus $a+bi$. Ganz besonders merkwürdig ist es aber, dass das Fundamentaltheorem für die quadratischen Reste in der Arithmetik der complexen Zahlen sein vollkommenes, nur hier noch einfacheres, Gegenstück hat; sind nemlich $a+bi$, $A+Bi$ complexe Primzahlen, so dass $a$ und $A$ ungerade, $b$ und $B$ gerade sind, so ist die erste quadratischer Rest der zweiten, wenn die zweite quadratischer Rest der ersten ist, hingegen die erste quadratischer Nichtrest der zweiten, wenn die zweite quadratischer Nichtrest der ersten ist.

Indem die Abhandlung nach diesen Voruntersuchungen zu der Lehre von den biquadratischen Resten selbst übergeht, wird zuvörderst, anstatt der blossen Unterscheidung zwischen biquadratischen Resten und Nichtresten eine Vertheilung der durch den Modulus nicht theilbaren Zahlen in vier Classen festgesetzt. Ist nemlich der Modulus eine complexe Primzahl $a+bi$, wo immer $a$ ungerade, $b$ gerade vorausgesetzt, und der Kürze wegen $p$ statt $aa+bb$ geschrieben wird, und $k$ eine complexe durch $a+bi$ nicht theilbare Zahl, so wird allemal $k^{\frac{1}{4}(p-1)}$

einer der Zahlen $+1$, $+i$, $-1$, $-i$ congruent sein, und dadurch eine Vertheilung sämmtlicher durch $a+bi$ nicht theilbarer Zahlen in vier Classen begründet, denen der Reihe nach der biquadratische Character 0, 1, 2, 3 beigelegt wird. Offenbar bezieht sich der Character 0 auf die biquadratischen Reste, die übrigen auf die biquadratischen Nichtreste, und zwar so, dass dem Character 2 zugleich quadratische Reste, den Charactern 1 und 3 hingegen quadratische Nichtreste entsprechen.

Man erkennt leicht, dass es hauptsächlich darauf ankommt, diesen Character bloss für solche Werthe von $k$ bestimmen zu können, die selbst complexe Primzahlen sind, und hier führt sogleich die Induction zu höchst einfachen Resultaten.

Wird zuerst $k = 1+i$ gesetzt, so zeigt sich, dass der Character dieser Zahl allemal $\equiv \frac{1}{4}(-aa+2ab-3bb+1)$ (mod. 4) wird, und ähnliche Ausdrücke finden sich für die Fälle $k = 1-i$, $k = -1+i$, $k = -1-i$.

Ist hingegen $k = \alpha+6i$ eine solche Primzahl, wo $\alpha$ ungerade und $6$ gerade ist, so ergibt sich durch die Induction sehr leicht ein dem Fundamentaltheorem für die quadratischen Reste ganz analoges Reciprocitätsgesetz, welches am einfachsten auf folgende Art ausgedrückt werden kann:

Wenn sowohl $\alpha+6-1$ als $a+b-1$ durch 4 theilbar sind (auf welchen Fall alle übrigen leicht zurückgeführt werden können), und der Character der Zahl $\alpha+6i$ in Beziehung auf den Modulus $a+bi$ durch $\lambda$, hingegen der Character von $a+bi$ in Beziehung auf den Modulus $\alpha+6i$ durch $l$ bezeichnet wird, so ist $\lambda = l$, wenn zugleich eine der Zahlen $6$, $b$ (oder beide) durch 4 theilbar ist, hingegen $\lambda = l\pm 2$, wenn keine der Zahlen $6$, $b$ durch 4 theilbar ist.

Diese Theoreme enthalten im Grunde alles Wesentliche der Theorie der biquadratischen Reste in sich; so leicht es aber war, sie durch Induction zu entdecken, so schwer ist es, strenge Beweise für sie zu geben, besonders für das zweite, das Fundamentaltheorem der biquadratischen Reste. Wegen des grossen Umfanges, zu welchem schon die gegenwärtige Abhandlung angewachsen ist, sah sich der Verfasser genöthigt, die Darstellung des Beweises für das letztere Theorem, in dessen Besitz er seit 20 Jahren ist, für eine künftige dritte Abhandlung zurückzulassen. Dagegen ist in vorliegender Abhandlung noch der vollständige Beweis für das erstere die Zahl $1+i$ betreffende Theorem (von welchem die an-

deren für $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ abhängig sind) mitgetheilt, welcher schon einigen Begriff von der Verwicklung des Gegenstandes geben kann.

Wir haben nun noch einige allgemeine Anmerkungen beizufügen. Die Versetzung der Lehre von den biquadratischen Resten in das Gebiet der complexen Zahlen könnte vielleicht manchem, der mit der Natur der imaginären Grössen weniger vertraut und in falschen Vorstellungen davon befangen ist, anstössig und unnatürlich scheinen, und die Meinung veranlassen, dass die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekomme, und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne. Nichts würde ungegründeter sein, als eine solche Meinung. Im Gegentheil ist die Arithmetik der complexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig, und wenn gleich der Verf. in seiner diessmaligen Darstellung eine rein arithmetische Behandlung befolgt hat, so hat er doch auch für diese die Einsicht lebendiger machende und deshalb sehr zu empfehlende Versinnlichung die nöthigen Andeutungen gegeben, welche für selbstdenkende Leser zureichend sein werden. So wie die absoluten ganzen Zahlen durch eine in einer geraden Linie unter gleichen Entfernungen geordnete Reihe von Punkten dargestellt werden, in der der Anfangspunkt die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u. s. w. vertritt; und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunkts erforderlich ist: so bedarf es zur Darstellung der complexen ganzen Zahlen nur des Zusatzes, dass jene Reihe als in einer bestimmten unbegrenzten Ebene befindlich angesehen, und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen von einander angenommen werde, so dass wir anstatt einer Reihe von Punkten ein System von Punkten vor uns haben, die sich auf eine zweifache Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung einer Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen. Der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der einen Seite der Reihe, welche die reellen Zahlen repräsentirt, bezieht sich dann auf die Zahl $i$, so wie der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der andern Seite auf $-i$ u. s. f. Bei dieser Darstellung wird die Ausführung der arithmetischen Operationen in Beziehung auf die complexen Grössen, die Congruenz, die Bildung eines vollständigen Systems incongruenter Zahlen für einen gegebenen Modulus u. s. f. einer Versinnlichung fähig, die nichts zu wünschen übrig lässt.

Von der andern Seite wird hierdurch die wahre Metaphysik der imaginären Grössen in ein neues helles Licht gestellt.

Unsere allgemeine Arithmetik, von deren Umfang die Geometrie der Alten so weit überflügelt wird, ist ganz die Schöpfung der neuern Zeit. Ursprünglich ausgehend von dem Begriff der absoluten ganzen Zahlen hat sie ihr Gebiet stufenweise erweitert; zu den ganzen Zahlen sind die gebrochenen, zu den rationalen die irrationalen, zu den positiven die negativen, zu den reellen die imaginären hinzugekommen. Diess Vorschreiten ist aber immer anfangs mit furchtsam zögerndem Schritt geschehen. Die ersten Algebraisten nannten noch die negativen Wurzeln der Gleichungen falsche Wurzeln, und sie sind es auch, wo die Aufgabe, auf welche sie sich beziehen, so eingekleidet vorgetragen ist, dass die Beschaffenheit der gesuchten Grösse kein Entgegengesetztes zulässt. Allein so wenig man in der *Allgemeinen* Arithmetik Bedenken hat, die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es so viele zählbare Dinge gibt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn ist, eben so wenig durften in jener den negativen Zahlen gleiche Rechte mit den positiven deshalb versagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengesetztes zulassen: die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen andern Fällen ein adäquates Substrat finden. Darüber ist man nun freilich seit langer Zeit im Klaren: allein die den reellen Grössen gegenübergestellten imaginären — ehemals, und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, *unmögliche* genannt — sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Grössen steuert, verschmähen zu wollen.

Der Verf. hat diesen hochwichtigen Theil der Mathematik seit vielen Jahren aus einem verschiedenen Gesichtspunkt betrachtet, wobei den imaginären Grössen eben so gut ein Gegenstand untergelegt werden kann, wie den negativen: es hat aber bisher an einer Veranlassung gefehlt, dieselbe öffentlich bestimmt auszusprechen, wenn gleich aufmerksame Leser die Spuren davon in der 1799 erschienenen Schrift über die Gleichungen, und in der Preisschrift über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In der gegenwärtigen Abhandlung sind die Grundzüge davon kurz angegeben; sie bestehen in Folgendem.

Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo

das gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen findet diese Voraussetzung nur da Statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände) sondern Relationen zwischen je zweien Gegenständen das gezählte sind. Postulirt wird dabei, dass diese Gegenstände auf eine bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind z. B. $A, B, C, D \ldots$, und dass die Relation des $A$ zu $B$ als der Relation des $B$ zu $C$ u. s. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter als der *Umtausch* der Glieder der Relation, so dass wenn die Relation (oder der Uebergang) von $A$ zu $B$ als $+1$ gilt, die Relation von $B$ zu $A$ durch $-1$ dargestellt werden muss. Insofern also eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe.

Sind aber die Gegenstände von solcher Art, dass sie nicht in Eine, wenn gleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen, oder was dasselbe ist, bilden sie eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen; verhält es sich dann mit den Relationen einer Reihe zu einer andern oder den Uebergängen aus einer in die andere auf eine ähnliche Weise wie vorhin mit den Uebergängen von einem Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derselben Reihe, so bedarf es offenbar zur Abmessung des Ueberganges von einem Gliede des Systems zu einem andern ausser den vorigen Einheiten $+1$ und $-1$ noch zweier andern unter sich auch entgegengesetzten $+i$ und $-i$. Offenbar muss aber dabei noch postulirt werden, dass die Einheit $i$ allemal den Uebergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem *bestimmten* Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können.

Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es bloss mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun: insofern ist er eben so, wie er den durch $+1$ und $-1$ bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente $+1$, $-1$, $+i$ und $-i$ zu erstrecken befugt.

Zur Anschauung lassen sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung

im Raume bringen, und der einfachste Fall ist, wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen, indem man nemlich eine unbegrenzte Ebene durch zwei Systeme von Parallellinien, die einander rechtwinklig durchkreuzen, in Quadrate vertheilt, und die Durchschnittspunkte zu den Symbolen wählt. Jeder solche Punkt $A$ hat hier vier Nachbaren, und wenn man die Relation des $A$ zu einem benachbarten Punkte durch $+1$ bezeichnet, so ist die durch $-1$ zu bezeichnende von selbst bestimmt, während man, welche der beiden andern man will, für $+i$ wählen, oder den sich auf $+i$ beziehenden Punkt nach Gefallen *rechts* oder *links* nehmen kann. Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, so bald man vorwärts und rückwärts in der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, *in sich* völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern *nur* durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können *). Wenn man aber auch über letzteres sich entschlossen hat, sieht man, dass es doch von unserer Willkür abhing, welche von den beiden in Einem Punkte sich durchkreuzenden Reihen wir als Hauptreihe, und welche Richtung in ihr man als auf positive Zahlen sich beziehend ansehen wollten; man sieht ferner, dass wenn man die vorher als $+i$ behandelte Relation für $+1$ nehmen will, man nothwendig die vorher durch $-1$ bezeichnete Relation für $+i$ nehmen muss. Das heisst aber, in der Sprache der Mathematiker, $+i$ ist mittlere Proportionalgrösse zwischen $+1$ und $-1$, oder entspricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$: wir sagen absichtlich nicht *die* mittlere Proportionalgrösse, denn $-i$ hat offenbar gleichen Anspruch. Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Grösse in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.

Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnissvolle Dunkelheit dabei ge-

*) Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum *nur* Form unserer äussern Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset.

funden, so ist diess grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, $-1$, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird.

ANZEIGEN

NICHT EIGNER

# S C H R I F T E N.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1809 März 11.

*Recherches sur l'irréductibilité Arithmétique et Géométrique des nombres et de leurs puissances.* 1808. (Ohne Druckort. 25 S. in gr. Quart.)

Eine Schrift, deren Zweck dahin geht, die irrationalen Wurzelgrössen in Gestalt von rationalen Grössen darzustellen. Wir müssen uns begnügen, die Freunde der Mathematik auf diess Werkchen aufmerksam gemacht zu haben, da die Grenzen dieser Blätter uns nicht verstatten, in die Darstellung und Prüfung des dem Verf. eigenthümlichen Gesichtspunkts und der von der gewöhnlichen ganz abgehenden Behandlung der Wurzelgrössen hier umständlicher einzugehen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1812 März 23.

*Cribrum Arithmeticum, sive tabula continens numeros primos a compositis segregatos, occurrentes in serie numerorum ab unitate progredientium usque ad decies centena millia et ultra haec ad viginti millia* (1020000). *Numeris compositis, per* 2, 3, 5 *non dividuis, adscripti sunt divisores simplices, non minimi tantum, sed omnino*

*omnes. Confecit* Ladislaus Chernac, *Pannonius, A. L. M. Philos. et Medic. Doctor, in almo lyceo Daventriensi philosophiae professor. Daventriae* 1811. (Auf Kosten des Verfassers. gedruckt bei J. H. Lange. XXII u. 1022 S. gr. Quart.)

Der vollständige Titel dieses wichtigen und sehr verdienstlichen Werks bezeichnet den Inhalt schon hinreichend: es ist eine durch eine eben so sorgfältige als mühsame Arbeit von mehreren Jahren berechnete Tafel für alle einfache Factoren aller durch 2, 3 und 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 1020000, sauber und, soviel wir bei hin und wieder angestellter Prüfung gefunden haben, sehr correct gedruckt. Wie schätzbar ein solches der Arithmetik gemachtes Geschenk sei, beurtheilt ein Jeder leicht, der viel mit grössern Zahlenrechnungen zu thun hat. Der Verf. verdient doppelten Dank, sowohl für seine höchst mühsame Arbeit selbst, wodurch er seinen Namen den unvergesslichen von Rhaeticus, Pitiscus, Briggs, Vlacq, Wolfram, Taylor u. A. zugesellt hat, als für den gewiss sehr erheblichen auf den Druck gemachten Aufwand, wofür sich sonst schwerlich ein Verleger gefunden haben möchte. Schon öfters sind dergleichen Tafeln, obwohl meistens in geringerer Ausdehnung, berechnet, aber entweder ganz im Manuscripte geblieben, oder im Abdruck nicht vollendet. Lambert munterte bekanntlich ehedem nach besten Kräften zur Fortsetzung der Pellschen, bis 100000 gehenden und oft abgedruckten, Tafel auf, und einer von Bernoulli in Lambert's Briefwechsel gegebenen Nachricht zufolge hatte Oberreit sie bis 500000 fortgeführt, wovon die Abschrift in Schulze's Hände gekommen war. Anton Felkel hatte sie, wie in der Monatl. Correspondenz 2. Bd. S. 223 berichtet wird, bis zu zwei Millionen in der Handschrift vollendet, und wollte sie späterhin bis 2460000 geben; allein was davon in Wien auf öffentliche Kosten bereits gedruckt war, wurde, weil sich keine Käufer fanden, im Türkenkriege zu Patronen verbraucht! So ging eine verdienstliche vieljährige Arbeit für das Publicum verloren: um so mehr hielten wir es für Pflicht, die Erscheinung des gegenwärtigen Werks hier anzuzeigen. Die erste Million ist nun für Jedermanns Gebrauch da; und wer Gelegenheit und Eifer für diesen Gegenstand hat, möge daher seine Mühe auf das Weitere richten.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1814 November 3.

*Tables des diviseurs pour tous les nombres du deuxième million, ou plus exactement depuis* 1020000 *à* 2028000, *avec les nombres premiers qui s'y trouvent. Par* J. Ch. Burckhardt, *membre de l'institut impérial, du bureau des longitudes de France, et de plusieurs autres sociétés savantes. Paris,* 1814. *M^me V^e Courcier.* (VIII u. 112 S. in Folio.)

Früher, als wir bei der Anzeige der die erste Million umfassenden Factorentafel von Chernac zu hoffen gewagt hätten, können wir schon die Vollendung und Erscheinung einer ähnlichen Tafel für die zweite Million berichten. Der verdiente Verfasser, dessen Name schon die grösste Sorgfalt und Genauigkeit verbürgt, hat sich durch diese mühsame Arbeit alle Freunde der Arithmetik sehr verpflichtet. Chernac's Tafel für die erste Million gibt alle einfachen Factoren; die Burckhardt'sche für die zweite hingegen nur jedesmal den kleinsten Divisor. Die vollständige Zerlegung einer Zahl der zweiten Million erfordert also die Division mit dem kleinsten Divisor und das Aufsuchen des Quotienten in der Chernac'schen Tafel: allein diese kleine Mühe ist von gar keiner Erheblichkeit gegen den grossen Vortheil, die Tafel in einem so viel kleineren Raum zu besitzen, wobei die Aussicht bleibt, mit der Zeit die Tafel noch bis zu zehn Millionen ausgedehnt zu sehen. Die Zusammendrängung in den kleinen Band hat der Verfasser theils durch die Beschränkung auf den kleinsten Divisor, theils durch einen möglichst öconomischen Druck möglich gemacht. Wenn $a$ unbestimmt jede der achtzig Zahlen unter 300 bedeutet, die durch 2, 3 und 5 nicht theilbar sind, so ist überhaupt jede durch 2, 3 und 5 nicht theilbare Zahl in der Form $300n+a$ begriffen. Alle achtzig Zahlen, für welche $n$ einerlei Werth hat, finden sich in Einer verticalen Columne, und solcher Columnen enthält jede Seite dreissig. Jede Seite umfasst also von neuntausend in der natürlichen Ordnung fortschreitenden Zahlen alle, welche durch 2, 3 oder 5 nicht theilbar sind.

Die Methode, nach welcher Herr Burckhardt seine Tafel construirt hat, verdient hier noch eine besondere Erwähnung. Er liess ein Netz in Kupfer stechen, wo durch 81 horizontale und 78 verticale Linien ein in $80\times 77$ d.i. 6160 kleine Quadrate getheiltes Rechteck gebildet wurde, und davon die nöthige Anzahl von Abdrücken machen. An der Seite konnten sogleich die achtzig Werthe

von *a* mit gestochen werden; die Werthe von 300*n* in fortlaufender Ordnung wurden mit der Feder über die 77 verticalen Columnen geschrieben. So stellt jedes Blatt alle durch 2, 3 und 5 nicht theilbaren Zahlen vor, welche unter je 23100 in natürlicher Ordnung fortschreitenden Zahlen befindlich sind, und 44 Blätter sind hinreichend, eine ganze Million zu umfassen. Man sieht leicht, dass die Zahlen, deren kleinster Theiler 7 oder 11 ist, auf jedem folgenden Blatte in derselben Ordnung wiederkehren, daher diese Divisoren sogleich auf die Kupferplatte gestochen werden konnten, und mithin auf jedem Blatte schon von selbst an den gehörigen Plätzen erschienen. Um nun die folgenden Divisoren z. B. 13 einzutragen, nahm Herr B. von einem überzähligen Blatt der Breite nach bloss 13 Columnen, und indem er dasselbe als den Anfang seiner Tafel betrachtete, schnitt er alle die Quadrate, die den Divisor 13 enthalten mussten, aus. Er brauchte also dieses Gitter nur auf die dreizehn ersten Columnen des ersten Blattes zu legen, dann auf die dreizehn folgenden u. s. w., um sogleich alle Plätze zu sehen, die, in so fern sie nicht schon 7 oder 11 enthielten, mit 13 ausgefüllt werden mussten. Eben so wurde nachher mit dem Divisor 17 u. s. w. verfahren. Bis zum Divisor 73 reichten auf diese Weise die überzähligen Blätter hin; für die grössern Divisoren 79, 83 u. s. w. scheint Herr B. den Rahmen aus zwei oder mehreren Theilen zusammengesetzt zu haben. Bei den Divisoren hingegen, die über 500 hinausgehen, zog Herr B. vor, die Vielfachen durch Addition zu suchen, wobei er für den andern Factor bloss die Primzahlen zu nehmen brauchte. Wir finden diess ganze Verfahren höchst zweckmässig, und würden es allen denen zur Nachahmung empfehlen, die etwa Neigung haben sollten, die Tafel noch weiter fortzusetzen. Für die dritte und vierte Million hat inzwischen der Verfasser selbst schon einen grossen Theil der Rechnungen ausgeführt, daher wir gegründete Hoffnung haben, auch diese demnächst durch den Druck bekannt gemacht zu sehen.

---

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1818 November 2.

---

*Tables des diviseurs pour tous les nombres du troisième million, ou plus exactement, depuis* 2028000 *à* 3036000, *avec les nombres premiers qui s'y trouvent, par* J. Chr. Burckhardt, *membre de l'académie royale des sciences, du bureau des longi-*

*tudes de France et de plusieurs autres sociétés savantes.* Paris 1816. *M^me V^e Courcier.* (112 Seiten in Folio.)

Da wir bereits bei der Anzeige der Tafel für die Factoren der zweiten Million die von dem verdienten Verf. angewandte Berechnungsmethode und die Einrichtung der Tafel selbst umständlich beschrieben haben, so können wir uns hier mit der blossen Anzeige von der Erscheinung der Tafel für die dritte Million begnügen. In Kurzem haben wir nun auch noch die Tafel für die *erste* Million, auf dieselbe Art dargestellt von dem Verf. zu erwarten, so dass dann die ganze Tafel bis über drei Millionen nur einen mässigen Band ausmachen wird. Dem Verf. gebührt dafür der Dank aller Freunde der Arithmetik, die durch diese mühsame Arbeit ein Bedürfniss in einer Ausdehnung befriedigt sehen, die alles, was man noch vor wenigen Jahren zu hoffen wagen konnte, weit übersteigt.

---

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1817 August 9.

---

*Tables des diviseurs, pour tous les nombres du premier million, ou plus exactement depuis 1 à 1020000, avec les nombres premiers qui s'y trouvent; par* J. Chr. Burckhardt, *membre de l'académie des sciences dans l'institut royal, du bureau des longitudes de France, et de plusieurs autres sociétés savantes.* Paris 1817. *M^me V^e Courcier.* (114 Seiten in Folio.)

Indem wir uns hier auf die Anzeigen der Tafeln für die zweite und dritte Million beziehen, kündigen wir jetzt bloss das wirkliche Erscheinen dieser Factorentafeln für die erste Million an. Wir besitzen also nunmehr ein zusammenhängendes Ganzes für die drei ersten Millionen. Für die gegenwärtige erste Million bediente sich der Verfasser theils des *Cribrum Arithmeticum* von Chernac, theils einer handschriftlichen Tafel von Schenmark, welche die Bibliothek des Königlichen Instituts besitzt. Letztere war indessen nicht ganz mit aller zu wünschenden Sorgfalt construirt, und die Entscheidung in Fällen, wo beide von einander abwichen, welche von beiden Recht habe, war oft ziemlich mühsam. In der Chernac'schen Tafel zeigte sich nur eine sehr geringe Anzahl von Fehlern, welche Herr Burckhardt hier mitgetheilt hat.

Auch für die vierte, fünfte und sechste Million hat der Verf. die Materialien bereits grösstentheils vorräthig, und er erbietet sich, diese Fortsetzung zu liefern, wenn der Verleger durch einen hinreichenden Absatz der drei ersten Millionen aufgemuntert wird. Es wäre in der That sehr zu beklagen, wenn die Früchte einer so mühsamen und nützlichen Arbeit der Welt entzogen werden sollten.

---

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1825 December 19.

---

Der Königl. Societät ist abseiten des Herrn Erchinger zu Thuningen im Königreich Würtemberg eine kleine Abhandlung vorgelegt worden, welche die

*Geometrische Construction des regelmässigen Siebenzehnecks*

zum Gegenstande hat. Die Allgemeine Theorie der regelmässigen Vielecke hat bekanntlich durch die innige Verbindung, in welche sie mit der höhern Arithmetik gebracht ist, eine neue Gestalt und Erweiterung erhalten; ein, wenn gleich verhältnissmässig nur kleiner Theil derselben ist die Theorie derjenigen Vielecke, die sich geometrisch beschreiben lassen. Seit dem Zeitalter der Griechen wusste man, dass das Dreieck, Fünfeck, Funfzehneck und alle diejenigen Vielecke, welche durch Verdopplung oder wiederholte Verdopplung der Seitenzahl aus diesen entspringen, jene Eigenschaft haben, und man glaubte, behauptete auch wohl ausdrücklich, dass dieses die einzigen seien. Die höhere Arithmetik hat gelehrt, dass dieses ein Irrthum war: indem sie die wahren Quellen der ganz allgemeinen Theorie offen legte, ergab sich von selbst, dass es ausser den genannten Vielecken noch unzählige andere gibt, die geometrisch construirt werden können, von denen das Siebenzehneck das einfachste ist. Die Ueberlegenheit der Analyse, welche das Allgemeinste, wie das Besondere mit gleicher Leichtigkeit umfasst, über die Geometrie, die immer beim Besondern stehen bleiben muss, beim Fortschreiten von den einfachern Fällen zu den zusammengesetztern durch stets vergrösserte Verwicklung aufgehalten wird, und jenen den bekannten nächsten Fall schwerlich jemals ohne fremde Hülfe erreicht hätte, zeigt sich dabei im hellsten Lichte. Inzwischen ist es immer wichtig, interessant und wünschenswerth, dass auch die rein geometrischen Behandlungen fortwährend cultivirt werden, und dass die Geo-

metric wenigstens einen Theil der neuen Felder, die die Analyse erobert, sich aneigne. Ref. ist nicht bekannt, dass bisher jemand die Construction des Siebenzehnecks öffentlich behandelt hätte, ausser Herrn PAUKER in den Schriften der Kurländischen Gesellschaft und in seiner Geometrie. Verschieden davon und mehr im rein geometrischen Geiste durchgeführt ist die von Hrn ERCHINGER, welche im Folgenden besteht. (Die dazu gehörige Figur, eine gerade Linie, auf welcher der Folge nach die Punkte $DBGAIFCE$ liegen, kann jeder sich selbst zeichnen.) Eine nach Gefallen angenommene gerade Linie $AB$ verlängere man rückwärts und vorwärts nach $C$ und $D$ so, dass $AC \times BC = AD \times BD = 4 AB \times AB$ werden; ferner bestimme man die Punkte $E$, $G$ an beiden Seiten der verlängerten Linie $CA$ so, dass $AE \times EC = AG \times CG = AB \times AB$, und den Punkt $F$ auf der Seite $A$ der verlängerten Linie $BA$ so, dass $AF \times DF = AB \times AB$ wird; endlich theile man $AE$ in $I$ so, dass $AI \times EI = AB \times AF$ werde, wo $AI$ der kleinere, und $EI$ der grössere Abschnitt von $AE$ ist. Man mache dann ein Dreieck, in welchem zwei Seiten jede $= AB$, die dritte $= AI$ wird. Beschreibt man um dieses Dreieck einen Kreis, so wird $AI$ die Seite des in den Kreis beschriebenen regelmässigen Siebenzehnecks sein.

Wenn man die Richtigkeit dieser Construction durch die Vergleichung mit der in den *Disquisitiones Arithmeticae* Art. 354 als ein Beispiel aufgestellter Theorie des Siebenzehnecks prüft, so bemerkt man leicht, dass jene nichts anders ist, als die geometrische Uebersetzung derjenigen Gleichungen, auf welche die Anwendung der allgemeinen Theorie führt: in der That sind die Entfernungen der Punkte $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $I$ von $A$ nichts anderes, als die Grössen, die a. a. O. mit (8.1), (8.3), (4.1), (4.3), (4.9), (2.1) bezeichnet sind, wenn man das positive und negative Zeichen durch die Lage ausdrückt, und die Entfernung des Punktes $B$ von $A$ in eben dem Sinn genommen $= -1$ setzt. Allein das eigentlich Verdienstliche der Abhandlung des Hrn. ERCHINGER besteht nicht sowohl in der Aufstellung der Construction selbst, da die Analyse bereits den einfachsten Weg vorgezeichnet hatte, als in der rein geometrischen Begründung ihrer Richtigkeit, und diese ist mit so musterhafter mühsamer Sorgfalt, alles nicht rein Elementarische zu vermeiden, durchgeführt, dass sie dem Verf. zur Ehre gereicht, und den Wunsch veranlasst, dass sein in der That nicht gemeines mathematisches Talent alle Aufmunterung finden möge.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1831 Juli 9.

*Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von* Ludwig August Seeber, *Dr. der Philosophie, ordentl. Professor der Physik an der Universität in Freiburg. Freiburg im Breisgau* 1831. (248 S. in 4.)

Die Functionen zweier unbestimmten Grössen $x$ und $y$ von der Gestalt $axx + 2bxy + cyy$, wo $a, b, c$ bestimmte ganze Zahlen vorstellen, bilden bekanntlich unter dem Namen der *quadratischen Formen*, oder, wo eine weitere Unterscheidung erforderlich wird, der *binären quadratischen Formen*, einen der interessantesten und reichhaltigsten Gegenstände der höheren Arithmetik. Die dabei zunächst vorkommenden Aufgaben: zu entscheiden, ob eine solche gegebene Form eine andere $a'x'x' + 2b'x'y' + c'y'y'$ unter sich begreift, d. i. durch eine Substitution $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sind, in dieselbe verwandelt werden kann; ob eine solche Relation zweier Formen eine gegenseitige ist, wo die Formen äquivalent heissen; ferner in beiden Fällen alle möglichen Umformungen der einen in die andere anzugeben; endlich alle möglichen Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl durch eine gegebene Form vermöge ganzer Werthe der unbestimmten Grössen aufzufinden — diese Aufgaben sind in den *Disquisitiones Arithmeticae* vollständig aufgelöset, machen aber von dem die quadratischen Formen betreffenden Abschnitte dieses Werks nur den bei weiten kleineren Theil aus. Die darauf folgenden feineren Untersuchungen erforderten zum Theil eine vorläufige Bearbeitung eines um eine Stufe höheren und viel grössere Schwierigkeiten darbietenden Feldes, nemlich der Lehre von ähnlichen Functionen dreier unbestimmter Grössen $x, y, z$, welche also die Gestalt haben $axx + byy + czz + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$, und ternäre quadratische Formen heissen. Die Auflösung der diese ternären Formen betreffenden Hauptaufgaben ist in dem erwähnten Werke entwickelt, jedoch nur so weit, als zu dem angezeigten Zwecke nothwendig war. Nach einem Zwischenraum von dreissig Jahren hat nun der Verfasser des vorliegenden Werks zuerst diese Untersuchungen wieder aufgenommen, und in Beziehung auf die eine Hauptgattung der ternären Formen, nemlich die positiven, dasjenige was in den *Disquisitiones Arith-*

*meticae* unvollendet gelassen war, zur Vollständigkeit gebracht. Für diejenigen, welche aus der höheren Arithmetik ein tieferes Studium gemacht haben, würden wir dasjenige, was in dem vorliegenden Werke Neues geleistet ist, mit wenigen Worten bezeichnen können; allein, um auch andern verständlich zu sein, müssen wir uns etwas mehr Ausführlichkeit verstatten, und wir thun dies um so lieber, da diese Untersuchungen auch ausserhalb des Gebietes der höheren Arithmetik ein eigenthümliches Interesse haben.

Die Eigenschaften einer binären Form $axx+2bxy+cyy$ hängen vornehmlich von der Zahl $bb-ac$ ab, welche daher der Determinant jener Form heisst. Zwei äquivalente Formen haben allemal gleiche Determinanten. Allein nicht alle Formen, die einen gegebenen Determinanten haben, sind darum schon äquivalent; vielmehr zerfallen solche Formen in eine kleinere oder grössere, aber stets endliche Anzahl von Klassen, so dass die zu einerlei Klasse gehörigen unter sich äquivalent, die zu verschiedenen Klassen gehörenden hingegen nicht äquivalent sind. Durch Formen, deren Determinant positiv ist, lassen sich ohne Unterschied positive und negative Zahlen darstellen; hingegen durch Formen mit negativem Determinanten sind nur solche Zahlen darstellbar, welche mit $a$ und $c$ einerlei Zeichen haben, daher hier positive und negative Formen unterschieden werden. Die einfachsten Formen in jeder Klasse haben bestimmte Kriterien, heissen reducirte Formen, und können als Repräsentanten der ganzen Klasse betrachtet werden.

Aehnliche Verhältnisse in Beziehung auf die ternären Formen sind in den *Disquisitiones Arithmeticae* nachgewiesen. Determinant der ternären Form

$$axx+byy+czz+2a'yz+2b'xz+2c'xy$$

heisst die Zahl

$$aa'a'+bb'b'+cc'c'-abc-2a'b'c'$$

Auch hier ist zur Aequivalenz zweier Formen die Gleichheit der Determinanten erforderlich, aber nicht zureichend, sondern sämmtliche Formen mit einem bestimmten Determinanten zerfallen in eine endliche Anzahl von Klassen, in deren jeder die einfachsten Formen reducirte heissen können und alle übrigen gleichsam repräsentiren. Mit dem Unterschiede zwischen positiven und negativen Formen verhält es sich aber hier anders, als bei den binären Formen. Für jeden gegebenen Determinanten, er sei positiv oder negativ, gibt es theils Formen, durch welche

ohne Unterschied positive und negative Zahlen darstellbar sind (indifferente Formen), theils solche Formen, durch die entweder nur positive oder nur negative Zahlen sich darstellen lassen (positive oder negative Formen); allein positive Formen gibt es nur für negative Determinanten, und negative nur für positive. Uebrigens ist es von selbst klar, dass die Qualification einer Form, insofern sie indifferent, positiv oder negativ ist, zugleich der ganzen Klasse, zu welcher sie gehört, zukommt. Das vorliegende Werk beschränkt sich auf die positiven Formen, deren Determinanten also negativ sein müssen: offenbar findet aber alles, was von diesen gilt, von selbst seine Uebertragung auf die negativen Formen, während die in dem Werke ganz ausgeschlossenen indifferenten Formen eine ganz abweichende Behandlung erfordern.

In den *Disquisitiones Arithmeticae* war, wie schon erwähnt ist, die Theorie der ternären Formen nur so weit entwickelt, als für den dortigen Zweck nöthig war, und daher die Aufgabe, die Aequivalenz zweier gegebenen ternären Formen zu entscheiden, noch nicht in vollständiger Allgemeinheit aufgelöset. Zwar war daselbst gezeigt, wie man zu jeder vorgegebenen Form eine äquivalende der einfachsten Art finden, und dass es solcher reducirten Formen für jeden gegebenen Determinanten nur eine endliche Anzahl geben könne; allein da es in jeder Klasse mehrere solcher reducirten Formen gibt, die sich nicht in allen Fällen *sogleich* als äquivalent ergeben, so fehlte noch ein Kriterium, woran man die Aequivalenz oder Nicht-Aequivalenz solcher Formen mit Gewissheit erkennen kann. Dieses Bedürfniss hat nun der Verfasser des vorliegenden Werks in Beziehung auf die positiven Formen vollständig und mit musterhafter Gründlichkeit gehoben. Sein Verfahren ist übrigens etwas anders eingekleidet, als wir die Sache so eben ausgesprochen haben, und wie sie sich verhalten müsste, wenn man in den Begriff der reducirten positiven Formen nur die wesentlichsten Bedingungen der grössten Einfachheit aufnimmt, welche in dem Fall der positiven Formen die sind, dass die (ihrer Natur nach positiven) Zahlen $a$, $b$, $c$ nicht kleiner sein dürfen, als respective $b'$ oder $c'$, $a'$ oder $c'$, $a'$ oder $b'$ ohne Rücksicht auf die Zeichen. Herr Seeber hat nemlich dem Begriffe der reducirten Formen noch solche Modificationen hinzugesetzt, dass es in jeder Klasse immer nur Eine der Art geben kann, Eine aber geben muss. Wegen eines schönen von Herrn Seeber durch Induction gefundenen weiter unten noch zu erwähnenden Theorems führen wir hier die Hauptbedingungen, welche Hr. S. in den Begriff der reducirten Formen aufge-

nommen hat, an: diese sind 1) dass unter den Zahlen $a'$, $b'$, $c'$ nicht zwei von entgegengesetzten Zeichen sein dürfen; 2) dass ohne Rücksicht auf das Zeichen $2b'$ und $2c'$ nicht grösser als $a$ sein dürfen, ferner $a$ und $2a'$ nicht grösser als $b$, und $b$ nicht grösser als $c$; 3) dass in dem Fall, wo $a'$, $b'$, $c'$ zugleich negativ sind, die doppelte Summe dieser Zahlen nicht grösser als $a+b$ sein darf. Die übrigen noch für einige specielle Fälle hinzukommenden Modificationen können wir hier übergehen.

Den Hauptinhalt des Werkes macht nun zuerst die Auflösung der Aufgabe aus, zu jeder gegebenen positiven Form eine äquivalente zu finden, die nach der festgesetzten Definition den Character einer reducirten hat, und dann der strenge Beweis des Lehrsatzes, dass zwei nicht identische reducirte Formen nicht äquivalent sein können, oder was dasselbe ist, dass es in jeder Klasse nur eine reducirte Form gibt. Dem Geiste der Gründlichkeit, womit diese Gegenstände durchgeführt sind, müssen wir volle Gerechtigkeit widerfahren lassen, und wenn wir es dabei bedauern müssen, dass damit eine sehr grosse und vielleicht manchen abschreckende Weitläuftigkeit verbunden gewesen ist, da die Auflösung des Problems 41 Seiten, und der Beweis des Theorems 91 Seiten einnimmt, so wollen wir diess doch keinesweges als einen Tadel angesehen wissen. Wenn ein schwieriges Problem oder Theorem aufzulösen oder zu beweisen vorliegt, so ist allezeit der erste und mit gebührendem Danke zu erkennende Schritt, dass überhaupt eine Auflösung oder ein Beweis gefunden werde, und die Frage, ob diess nicht auf eine leichtere und einfachere Art hätte geschehen können, bleibt so lange eine müssige, als die Möglichkeit nicht zugleich durch die That entschieden wird. Wir halten es daher für unzeitig, hier bei dieser Frage zu verweilen. Der übrige Theil des Werkes enthält noch hauptsächlich die mit gleicher Gründlichkeit durchgeführten Auflösungen der Aufgaben: zu entscheiden, ob eine gegebene Form eine andere gegebene ihr nicht äquivalente unter sich begreife; alle möglichen Transformationen einer gegebenen Form in eine gegebene äquivalente oder nur unter ihr begriffene zu finden; endlich für einen gegebenen Determinanten alle möglichen Klassen positiver ternärer Formen anzugeben.

Wir müssen noch bemerken, dass Herr SEEBER die Gestalt der ternären Formen etwas anders gefasst hat, als in den *Disquisitiones Arithmeticae* geschehen war, wo, mit Vorbedacht, die Coefficienten der Producte $yz$, $xz$, $xy$ als gerade Zahlen vorausgesetzt waren, wogegen Hr. S. auch ungerade zulässt, und daher

mit $a', b', c'$ bezeichnet, was oben mit $2a', 2b', 2c'$ bezeichnet war. Offenbar ist die grössere Allgemeinheit, welche dadurch erreicht wird, nur scheinbar, oder doch überflüssig, da alles was von solchen Formen mit ungeraden Coefficienten gesagt werden kann, sich auch von selbst ergibt, wenn man anstatt derselben ihr Doppeltes in Betracht zieht: wir können daher diese Abänderung, wodurch überdiess einiger Verlust an Einfachheit entsteht, nicht billigen. Eine Folge davon ist gewesen, dass das, was Herr Seeber Determinant nennt, allemal das Vierfache von der Zahl ist, welche in den *Disquisitiones Arithmeticae* diesen Namen führt. In gegenwärtiger Anzeige haben wir die Terminologie der *Disquisitiones Arithmeticae* beibehalten.

Bei dem zuletzt erwähnten Problem (zu jedem gegebenen Determinanten alle möglichen reducirten Formen anzugeben) hat Herr Seeber, um Grenzen für die drei ersten Coefficienten zu haben, ein Theorem benutzt, vermöge dessen das Product derselben $abc$ nicht grösser sein kann, als der dreifache Determinant. Dieses Theorem ist von Hn. Seeber strenge bewiesen; allein in der Vorrede bemerkt er, dass er unter mehr als 600 von ihm untersuchten Fällen nicht einen einzigen gefunden habe, wo jenes Product das Doppelte des Determinanten überschritten hätte, und hält es daher für höchst wahrscheinlich, dass diese engere Begrenzung allgemeingültig sei; es sei ihm jedoch nicht gelungen, einen strengen Beweis dafür zu finden. Da dieses auf dem Wege der Induction von Herrn Seeber gefundene Theorem sowohl an sich merkwürdig, als für die Abkürzung der Auflösung der erwähnten Aufgabe wichtig ist, so wollen wir hier, um auch unsererseits in dieser Anzeige einen Beitrag zur Vervollkommnung dieser Theorie zu geben, einen sehr einfachen Beweis beifügen. Es müssen dabei zwei Fälle unterschieden werden.

I. Wenn von den Zahlen $a', b', c'$ keine negativ ist, so setze man

$$b-2a'=d,\ c-2b'=e,\ a-2c'=f$$
$$c-2a'=g,\ a-2b'=h,\ b-2c'=i$$

wo aus der Definition der reducirten positiven Formen sogleich folgt, dass wenn

$$axx+byy+czz+2a'yz+2b'xz+2c'xy$$

eine solche ist, keine jener sechs Zahlen negativ ist, so wie sich von selbst versteht, dass $a, b, c$ positiv sind. Bezeichnet man nun den (negativen) Determi-

nanten der Form durch $-D$, so hat man, wie man sich durch die Entwickelung leicht überzeugt, die identische Gleichung

$$2D-abc=aa'd+bb'e+cc'f+a'hi+b'gi+c'gh+ghi$$

in welcher keines der sieben Glieder zur Rechten negativ sein kann, und folglich $abc$ nicht grösser als $2D$. Dasselbe folgt auf gleiche Weise aus der identischen Gleichung

$$2D-abc=aa'g+bb'h+cc'i+a'ef+b'df+c'de+def$$

II. Wenn keine der Zahlen $a'$, $b'$, $c'$ positiv ist, setze man

$$b+2a'=d,\quad c+2b'=e,\quad a+2c'=f$$
$$c+2a'=g,\quad a+2b'=h,\quad b+2c'=i$$

$$b+c+2a'+2b'+2c'=k$$
$$a+c+2a'+2b'+2c'=l$$
$$a+b+2a'+2b'+2c'=m$$

und den Determinanten der Form wie vorhin $=-D$. Vermöge der Definition der reducirten positiven Formen wird keine der neun Zahlen $d, e, f, g, h, i, k, l, m$ negativ sein können, und so ergibt sich aus der identischen Gleichung

$$6D-3abc=-aa'(d+2k)-bb'(e+2l)-cc'(f+2m)-a'hi-b'gi-c'gh+def+2ghi$$

in welcher, weil $a'$, $b'$, $c'$ nicht positiv, sondern negativ oder Null sind, alle Glieder zur Rechten positiv oder Null werden, dass $3abc$ nicht grösser als $6D$, oder $abc$ nicht grösser als $2D$ sein kann. Dasselbe folgt eben so aus der identischen Gleichung

$$6D-3abc=-aa'(g+2k)-bb'(h+2l)-cc'(i+2m)-a'ef-b'df-c'de+2def+ghi$$

Beide Gleichungen sind symmetrisch. Verzichtet man auf völlige Symmetrie, so ist der Beweis mit einer noch geringern Anzahl von Gliedern zu führen, z. B. durch die identische Gleichung

$$8D-4abc=-2aa'(g+k)-2bb'(e+l)-4cc'm+(c+e)df+(c+g)hi$$

Wir wollen nun noch einiges über die Bedeutung der positiven binären und ternären quadratischen Formen ausser dem Gebiete der höheren Arithmetik hinzusetzen: von den negativen besonders zu handeln ist unnöthig, und die indifferenten entziehen sich dieser Behandlung ganz.

Die positive binäre Form $axx + 2bxy + cyy$ stellt allgemein das Quadrat der Entfernung zweier unbestimmter Punkte in einer Ebene vor, deren Coordinaten in Beziehung auf zwei unter einem Winkel, dessen Cosinus $= \frac{b}{\sqrt{ac}}$ ist, gegen einander geneigte Axen um $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{c}$ verschieden sind. Insofern $x$ und $y$ also nur *ganze* Zahlen bedeuten sollen, bezieht sich die Form auf ein System parallelogrammatisch geordneter Punkte, die in den Durchschnitten zweier Systeme von Parallellinien liegen. Die Linien jedes Systems sind in gleichen Entfernungen von einander, und zwar sind die des einen, wenn sie parallel mit den Linien des zweiten gemessen werden, $= \sqrt{a}$; die Entfernungen des andern, parallel mit den Linien des ersten gemessen, $= \sqrt{c}$: die Neigung beider Systeme gegen einander die oben angegebene. Auf diese Weise erscheint die Ebene in lauter gleiche Parallelogramme getheilt, deren Eckpunkte das Punktensystem ausmachen, ohne dass irgend einer der Punkte innerhalb eines Parallelogramms fallen kann. Der Determinant mit positivem Zeichen genommen, also $ac - bb$, bedeutet das Quadrat des Flächeninhalts eines Elementar-Parallelogramms. Ein und dasselbe System solcher Punkte kann auf unendlich viele verschiedene Arten parallelogrammatisch abgetheilt, und also auf ebenso viele verschiedene Formen zurückgeführt werden: alle diese verschiedenen Formen sind aber, was in der Kunstsprache äquivalent heisst, und der Inhalt eines Elementar-Parallelogramms bleibt allemal derselbe. Zwei Formen, die nicht äquivalent sind, von denen aber die eine die andere unter sich begreift, beziehen sich auf dasselbe System von Punkten, aber die erstere Form auf das ganze System, die zweite auf einen Theil. Zwei Formen, die, nach der Kunstsprache, uneigentlich äquivalent (improprie aequivalentes) heissen, beziehen sich auf zwei gleiche aber verkehrt liegende Systeme von Punkten, indem man sich die Ebene umgekehrt gelegt denkt u. s. w.

Auf gleiche Weise bedeutet allgemein die positive ternäre Form

$$axx + byy + czz + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$$

das Quadrat der Entfernung zweier unbestimmter Punkte im Raume, deren Coordinaten in Beziehung auf drei Axen (1), (2), (3) die Unterschiede $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{c}$

geben: die Cosinus der Winkel zwischen den Axen (2) und (3), (1) und (3), (1) und (2) sind hier resp. $\frac{a'}{\sqrt{bc}}, \frac{b'}{\sqrt{ac}}, \frac{c'}{\sqrt{ab}}$. Insofern hier $x, y, z$ bloss ganze Zahlen bedeuten sollen, bezieht sich die Form auf ein System parallelepipedisch geordneter, d. i. durch die Durchschnitte dreier Systeme paralleler äquidistanter Ebenen sich ergebender Punkte. Der ganze Raum erscheint so in lauter gleiche Parallelepipeden getheilt, deren Eckpunkte jenes System von Punkten ausmachen; und das Quadrat des Rauminhalts eines Elementar-Parallelepipedum ist dem mit positivem Zeichen genommenen Determinanten der ternären Form gleich. Aequivalente Formen repräsentiren ein und dasselbe System von Punkten, nur auf andere Axen oder Fundamentalebenen bezogen. Auf gleiche Weise finden alle andere Hauptmomente der Theorie der ternären Formen hier ihre geometrische Bedeutung, das Enthaltensein einer Form unter einer andern, die Darstellung einer bestimmten Zahl oder einer unbestimmten binären Form durch eine ternäre, die Lehre von den zugeordneten ternären Formen (formae adiunctae), das Wegfallen der Unterscheidung zwischen eigentlicher und uneigentlicher Aequivalenz, das Wesen der reducirten Formen u. s. w., wir müssen uns aber auf obige Andeutungen beschränken, zumal da das vorliegende Werk, welches die ternären Formen lediglich aus rein arithmetischem Gesichtspunkte betrachtet, nur mittelbarer Weise Veranlassung dazu gegeben hat. Man wird wenigstens daraus erkennen, welch ein reiches Feld hier den Untersuchungen geöffnet ist, die nicht bloss für sich ein hohes theoretisches Interesse haben, sondern auch zu einer eben so bequemen als allgemeinen Behandlung aller Relationen unter den Krystallformen benutzt werden können. In das Detail dieser Benutzung einzugehen, ist hier der Ort nicht: wir dürfen jedoch die Bemerkung nicht übergehen, dass wenn gleich ursprünglich angenommen ist, dass $a, b, c, a', b', c'$ ganze Zahlen vorstellen, doch der grösste Theil der Lehre von den ternären Formen, und namentlich dasjenige, was für jene Benutzung erforderlich ist, auch unabhängig von jener Voraussetzung gültig bleibt. In der That führen zwar Haüy's Angaben bei den meisten Krystallgattungen auf sehr einfache ganze Werthe der Coëfficienten in den ternären Formen, welche sich auf die jenen entsprechende Anordnung des Punktensystems beziehen; allein die genaueren späteren Messungen von Wollaston, Malus, Biot, Kupffer u. a. stehen damit im Widerspruch, und machen es zweifelhaft, ob rationale Verhältnisse jener Coëfficienten überall naturgemäss sind; jedenfalls aber lassen sich, wenn man nicht in der Theorie die Beschrän-

kung auf ganze Werthe der Coëfficienten weglassen will, da es dabei nicht auf absolute Werthe, sondern nur auf ihr Verhältniss unter einander ankommt, allezeit ganze Zahlen finden, die den Messungsresultaten so nahe kommen, wie man nur will.

Schliesslich wollen wir noch dem oben angeführten SEEBERschen Lehrsatze seine geometrische Bedeutung unterlegen. Wenn ein Parallelepipedum so beschaffen ist, dass keine seiner zwölf Kanten (unter denen je vier einander gleich sind) grösser ist, weder als eine der zwölf Diagonalen von Seitenflächen (die paarweise gleich sind), noch als eine der vier Diagonalen des Parallelepipedum: so ist der mit $\sqrt{2}$ multiplicirte Rauminhalt desselben nicht kleiner, als der Rauminhalt eines aus denselben Kanten gebildeten rechtwinklichten Parallelepipedum.

HANDSCHRIFTLICHER

# NACHLASS.

# SOLUTIO CONGRUENTIAE $X^m - 1 \equiv 0$.

## ANALYSIS RESIDUORUM. CAPUT SEXTUM. PARS PRIOR.

---

237.

In Cap. III docuimus, congruentiam $x^n \equiv 1$, si pro modulo accipiatur numerus primus $p$, habere $\mu$ radices, quando $\mu$ est maxima communis mensura numerorum $n$ et $p-1$, hasque radices cum radicibus congr. $x^\mu \equiv 1$ penitus convenire. Quamobrem eum casum considerare sufficit, ubi $n$ est pars aliquota numeri $p-1$. Quod autem non modo congruentiae $x^n - 1 \equiv 0$ sed cuiusvis alius solutio pro modulis quibuscunque ex solutione pro modulis, qui sunt numeri primi, possit derivari, iam passim est ostensum infraque (Cap. VIII) fusius docebitur.

238.

Sed ne hic quidem subsistere opus est; namque eodem Capite III exposuimus, congruentiae $x^n \equiv 1$ solutionem a resolutione similium congruentiarum pendere $x^a \equiv 1$, $x^b \equiv 1$ etc., ubi $a$, $b$ etc. sunt numeri primi aut numerorum primorum potestates et $n$ productum ex his numeris. Si scilicet $A$, $B$ etc. sunt respective radices quaecunque congruentiarum $x^a \equiv 1$, $x^b \equiv 1$ etc., productum ex his $AB\ldots$ erit aliqua e radicibus congruentiae $x^n \equiv 1$. Nostrae igitur investigationes ad solutionem congruentiae $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ restringentur, quando $p$ est numerus primus, $n$ numerus primus aut numeri primi potestas, simulque pars aliquota numeri $p-1$.

239.

Porro ex Cap. III constat, inter congruentiae $x^n \equiv 1$ radices semper aliquas dari, per quarum potestates omnes ceterae exhiberi possunt. Ita si $r$ designet huiusmodi radicem (*primitivam* supra diximus, quando $n = p - 1$, hancque expressionem hic quamquam significatione latiori retinebimus) omnes congr. propos. radices erunt

$$1, \ r, \ rr, \ r^3 \ . \ . \ . \ . \ . \ r^{n-1}$$

Huiusmodi ergo radices omni studio sunt investigandae, quoniam his inventis ceterae sponte patebunt. Brevitatis gratia quamcunque ipsius $r$ potestatem per exponentem uncis inclusum designamus, ita ut (0) denotet unitatem, (1) radicem quamcunque primitivam congruentiae $x^n \equiv 1$, (2) ipsius (1) quadratum etc.: ita ut haec series (0), (1), (2), (3), .... $(n-1)$ omnes radices amplectatur. Ceterum constat, $(k)$ semper fore talem radicem primitivam, quoties $k$ ad $n$ est primus; i. e. nostro casu (ubi $n$ est numeri primi $t$ potestas $= t^\nu$), quoties $t$ ipsum $k$ non dividit. Manifesto vero signa (1), (2) etc. per se sunt indeterminata; sed simulac ipsi (1) valor aliquis determinatus tribuitur, omnia cetera determinata fient.

240.

Quoniam radices primitivas prae ceteris investigare propositum est, has a ceteris primum separare oportet. Quod fiet, si e serie (0), (1), (2) ... $(n-1)$ omnes terminos $(k)$ eiiciamus, ubi $k$ per $t$ dividitur; quodsi autem $n$ est numerus primus seu $\nu = 1$, unicus (0) erit abrogandus. Priusquam vero ad disquisitionem radicum superstitum progrediamur, lectorem sedulo admonemus exempla aliquot sibi conficere. ut omnia, quae sine his forsan generalius dicta viderentur, in concreto intueri possit. Nos aliquod apponimus; sed non ideo superfluum erit alia proprio Marte elaborare.

Sit $p = 29$; $n = 7$ et septenae congruentiae $x^7 \equiv 1$ (mod. 29) radices erunt 1, 7, 16, 20, 23, 24, 25. Quoniam $n$ est numerus primus, omnes hae radices praeter 1 erunt primitivae; posito igitur $7 = (1)$ signa haec significabunt:

| (0) | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 20 | 24 | 23 | 16 | 25. |

Quivis ceterum memor erit, signa $(n)$ et $(0)$, $(n+1)$ et $(1)$ etc. et in genere $(a)$ et $(b)$ aequivalere, quoties $a \equiv b$ (mod. $n$).

241.

Sed ad nostrum propositum alio adhuc modo erit procedendum. Videlicet eos tantum terminos $(k)$ retinemus, ubi $k$ per $t$ non dividitur, quorum multitudo est $\frac{t-1}{t}.n = \lambda$; omnes autem hi numeri (aut ipsis secundum $n$ congrui) per potestates successivas alicuius numeri exhiberi possunt. Sit hic $= \rho$; quare omnes radices primitivae congruentiae $x^n \equiv 1$ ita denotabuntur

$$(1) \quad (\rho) \quad (\rho^2) \quad (\rho^3) \; . \; . \; . \; . \; (\rho^{\lambda-1})$$

Hoc autem artificio id obtinemus, ut omnes radices non primitivae penitus excludantur, cuius rei rationes et emolumenta infra clarius cognoscentur. In nostro igitur exemplo ponere possumus $\rho = 3$ et radices congruentiae $x^7 \equiv 1$ primitivae ita ordinantur

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (1) | (3) | ($3^2$) | ($3^3$) | ($3^4$) | ($3^5$) |
| seu | (1) | (3) | (2) | (6) | (4) | (5) |
| quae erunt | 7 | 24 | 20 | 25 | 23 | 16 |

242.

Ne lector ignarus sit, quorsum disquisitiones sequentes tendant, theorema, quod demonstrandum atque dilucidandum nobis proponimus, indicare iuvabit.

*Si numerus* $\lambda$ (*qui est* $= t^{\nu-1}.t-1$) *habeat factores simplices* $a, b, c, d$ *etc., et sit* $\lambda = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, *resolutio congruentiae* $x^n - 1 \equiv 0$ *pendet a resolutione* $\alpha + \beta + \ldots$ *congruentiarum inferiorum, quarum* $\alpha$ *sunt gradus* $a$, $\beta$ *gradus* $b$, $\gamma$ *gradus* $c$ *etc.*

Ita in nostro exemplo congruentiae $x^7 \equiv 1$ resolutio pendet a congruentia secundi gradus et ab alia tertii gradus; perspiciturque in genere numquam gradum harum congruentiarum a modulo $p$ pendere. Ut autem ad huius theorematis demonstrationem perveniamus, necesse est aliquas propositiones ad nexum inter congruentias earumque radices spectantes praemittere, quamquam proprie in Cap. octavo hae disquisitiones ulterius sint persequendae.

243.

Theorema. *Si congruentia*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + N \equiv 0 \ (\textit{mod. primus})$$

*ita sit comparata, ut confecto producto ex* $m$ *factoribus* $x-r$, $x-r'$, $x-r''$, $x-r'''\ldots$ *quod sit* $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + n$, *sit* $A \equiv a$, $B \equiv b$, $C \equiv c$ *etc. secundum mod.* $p$, *quantitates* $r, r', r'' \ldots$ *erunt radices congruentiae propositae nullasque alias habebit.*

*Demonstratio.* I. Erit semper

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots \equiv x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots \ (\text{mod.} p)$$

Sed posterior congruentiae pars fit $= 0$ ponendo $x = r$, $x = r'$, $x = r''$ etc., quare pro his ipsius $x$ valoribus prior pars fiet $\equiv 0$ (mod. $p$). Q. E. Primum.

II. Si autem alius adhuc valor $\rho$ nulli horum $r, r'$ etc. congruus congruentiae propositae satisfaceret, foret

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \rho^m + A\rho^{m-1} + B\rho^{m-2} + \ldots \equiv \rho^m + a\rho^{m-1} + b\rho^{m-2} + \ldots \\ &\equiv (\rho - r)(\rho - r')(\rho - r'')(\rho - r''') \ldots \end{aligned}$$

sed quoniam nullus factorum $\rho - r$, $\rho - r'$, $\rho - r''$, etc. est $\equiv 0$, productum ex omnibus fieri $\equiv 0$, ob $p$ primum est absurdum. Quare praeter radices $r, r'$ etc. nullae dantur aliae. Q. E. Secundum.

244.

Problema. *Sint* $r, r', r'' \ldots$ *quantitates incognitae, quarum multitudo sit* $= m$, *quarum summa sit* $= \alpha$, *summa quadratorum* $= \beta$, *summa cuborum* $= \gamma \ldots$, *summa potestatum, quarum exponens est* $m$, $= \mu$, *danturque non hi numeri (quorum multitudo etiam* $= m$*) ipsi, sed alii* $\alpha', \beta', \gamma'$ *etc. singulis congrui secundum modulum* $p$, *qui sit numerus primus et* $> m$, *invenire congruentiam* $m^{ti}$ *gradus, cuius radices sint* $r, r', r''$ *etc.*

*Solutio.* Considerentur $r, r', r''$ etc. quasi radices alicuius aequationis

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots = 0$$

determinenturque eius coëfficientes $A, B, C$ etc. (adhibendo tantummodo congruentiam loco aequalitatis) ad methodum cognitam, faciendo scilicet

$$\begin{aligned}
-A &\equiv \alpha' \\
-2B &\equiv \beta' + A\alpha' \\
-3C &\equiv \gamma' + A\beta' + B\alpha' \\
-4D &\equiv \delta' + A\gamma' + B\beta' + C\alpha' \\
&\text{etc.} \\
-mN &\equiv \mu' + A\lambda' + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Hi vero coëfficientes non possunt esse indeterminati, quia omnes numeri $1, 2, 3 \ldots m < p$. Dico congruentiam

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + N \equiv 0$$

esse quaesitam.

*Demonstr.* Ponatur aequationem, cuius radices sunt $r, r', r'', r'''$ etc., esse hanc

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots = 0$$

eritque

$$\begin{aligned}
-a &= \alpha \\
-2b &= \beta + a\alpha \\
-3c &= \gamma + a\beta + b\alpha \\
-4d &= \delta + a\gamma + b\beta + c\alpha \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Cuique autem manifestum hinc erit, fore

$$a \equiv A, \quad b \equiv B, \quad c \equiv C \text{ etc. (mod. } p)$$

quare per § praec. numeri $r, r', r''$ etc., qui sunt radices *aequationis*

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots = 0$$

erunt simul radices *congruentiae*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots \equiv 0. \quad \text{Q. E. D.}$$

Exempla componenda lectoribus linquimus.

245.

Ad propositum nostrum revertimur. Retentis characteribus §§. 242 et antec. adhibitis ostendere aggredimur, si $\lambda$ sit productum e factoribus quibuscunque

$efg$ etc., radices congruentiae $x^n \equiv 1$ primitivas, quarum multitudo est $\lambda$, ita in $e$ classes discerpi posse, ut aggregata radicum in eandem classem relatarum per congruentiam gradus $e^{ti}$ dentur; his vero tamquam cognitis suppositis quamvis classem ita in $f$ ordines subdividi posse, ut aggregata cuiusvis ordinis per congruentiam $f^{ti}$ gradus dentur, hique ordines rursus subdividi possunt etc., usque dum ad singulas radices perveniatur.

## 246.

*Definitio.* Complexum terminorum *omnium* in tali forma $(\rho^{ke+\alpha})$ (§. 241) contentorum *periodum completam* sive simpliciter *periodum* dicemus. Designat vero $e$ divisorem aliquem numeri $\lambda$; $\alpha$ numerum quemcunque datum, $k$ omnes numeros integros a 0 usque ad $\frac{\lambda}{e}-1$; brevitatis vero gratia talem periodum ita designamus $(e \cdot \alpha)$. Ita in exemplo nostro termini

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (1), (2), (4) | periodos | (2·0) constituent, |
| | (3), (6), (5) | | (2·1) |
| hi vero | (1), (6) | hasce | (3·0) |
| | (3), (4) | | (3·1) |
| | (2), (5) | | (3·2) |

*Iam si omnes termini in periodos quomodocunque distribuantur, singulaeque periodi iterum in periodos minores et sic porro, dicimus, id obtineri quod in §. praec. promisimus.*

Antequam vero hanc expositionem ipsam aggrediamur, ostendemus, formationi talis periodi, quamquam a duabus quantitatibus quodammodo arbitrariis $r$, $\rho$ dependeat, nihil tamen vagi inesse, seu quomodocunque hae quantitates eligantur, semper eosdem terminos in eandem periodum concurrere (siquidem quot terminos periodus continere debeat, fuerit praescriptum).

Criterium, duos terminos $A$, $B$ in eadem periodo esse, inde petitur, quod uterque in tali forma continetur: $(\rho^{ke+\alpha})$ sive esse $A \equiv r^{\rho^{ke+\alpha}}$, $B \equiv r^{\rho^{k'e+\alpha}}$ (mod. $p$). Hic autem $r$ est radix primitiva congruentiae $x^n \equiv 1$ (mod. $p$); $\rho$ vero radix primitiva congruentiae $x^\lambda \equiv 1$ (mod. $n$); vide supra.

Demonstrandum est, si loco numerorum $r$, $\rho$ alii eligantur, puta $s$, $\sigma$, tunc $A$ et $B$ in similibus formis $s^{\sigma^{ke+\theta}}$, $s^{\sigma^{k'e+\theta}}$ comprehendi.

Sit $s^m \equiv r \pmod{p}$; $\sigma^\mu \equiv \rho \pmod{n}$ et $m \equiv \sigma^\zeta \pmod{n}$, quod fieri potest, quia $r$, $\rho$ sunt radices primitivae: erit vero $m$ primus ad $n$, $\mu$ ad $\lambda$ (Cap. III). Per debitas substitutiones obtinebimus

$$A \equiv s^{\sigma^{\mu k e + \mu\alpha + \zeta}}, \quad B \equiv s^{\sigma^{\mu k' e + \mu\alpha + \zeta}} \qquad \text{Q. E. D.}$$

247.

Theorema. *Productum e binis periodis similibus independenter a numero p componi potest per additionem periodorum similium et numerorum datorum.*

(Periodos similes vocamus, quae aeque multos terminos comprehendunt sive ubi numerus $e$ est idem).

Exempl. Sit $n = 7$, productum e periodis $(1)+(6)$ et $(2)+(5)$ erit (propter $(a) \times (b) = (a+b)$) $(3)+(6)+(8)+(11)$ sive constat e periodis $(3)+(4)$ et $(1)+(6)$.

*Demonstr.* Sit $\frac{\lambda}{e} = f$, atque periodi datae $(e.\alpha)$ et $(e.\beta)$ seu aggregata

$$(\rho^\alpha) + (\rho^{\alpha+e}) + (\rho^{\alpha+2e}) + \ldots + (\rho^{\alpha+(f-1)e}) \;\ldots\ldots\; P$$
$$(\rho^\beta) + (\rho^{\beta+e}) + (\rho^{\beta+2e}) + \ldots + (\rho^{\beta+(f-1)e}) \;\ldots\ldots\; Q$$

Productum $PQ$ ex $f^2$ terminis constabit. Hi vero ita sunt ordinandi. Formentur $f$ series, quarum singulae ex $f$ terminis constent. Prima complectatur productum ipsius $P$ in $(\rho^\beta)$, secunda productum $P.(\rho^{\beta+e})$ etc. etc. In prima serie primum locum occupet productum ex parte $(\rho^\alpha)$ oriundum, secundum productum ex $(\rho^{\alpha+e})$ et sic cetera deinceps; in secunda vero primus locus producto e parte $(\rho^{\alpha+e})$ oriundo tribuatur, secundus producto e parte $(\rho^{\alpha+2e})$ etc., ultimus denique producto e parte $(\rho^\alpha)$; tertia inchoet a producto e parte $(\rho^{\alpha+2e})$ et sic porro, post productum e parte ultima sequatur productum e parte prima et secunda etc. etc.; sive partibus successivis periodi $P$ per 1, 2, 3 . . . z et periodi $Q$ per I, II, III, . . . . Z designatis ita producti $PQ$ partes constituantur:

$$\begin{array}{l} 1.\mathrm{I} + 2.\mathrm{I} + 3.\mathrm{I} + 4.\mathrm{I} + \ldots + z.\mathrm{I} \\ 2.\mathrm{II} + 3.\mathrm{II} + 4.\mathrm{II} + \ldots\ldots + 1.\mathrm{II} \\ 3.\mathrm{III} + 4.\mathrm{III} + \ldots\ldots + 1.\mathrm{III} + 2.\mathrm{III} \\ \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array}$$

Tunc omnes termini in singulis seriebus eundem locum occupantes in $f$ ordines colligantur; et dico

1° si aliquis terminus $\equiv 1$, tum omnes ceteros eiusdem ordinis etiam fore $\equiv 1$

2° quemvis ordinem, in quo nullus terminus $\equiv 1$, periodum formare. — Manifesto his demonstratis propositum consecuti erimus.

Forma generalis talis ordinis erit

$$(\rho^{\alpha+ke}+\rho^{\beta}),\ (\rho^{\alpha+(k+1)e}+\rho^{\beta+e}),\ (\rho^{\alpha+(k+2)e}+\rho^{\beta+2e}),\ \ldots\ (\rho^{\alpha+(k+f-1)e}+\rho^{\beta+(f-1)e})$$

potest enim pro $\rho^{\alpha+(k-1)e}$ etiam scribi $\rho^{\alpha+(k+f-1)e}$ propter $ef=\lambda$ et $\rho^{\lambda}\equiv 1$ (mod. $n$), et sic de antecedentibus. Ponatur $\rho^{\alpha+ke}+\rho^{\beta}\equiv\rho^{x}$ (mod. $n$), quod est permissum, nisi forte $\rho^{\alpha+ke}+\rho^{\beta}$ per $n$ divisibilis*), poteritque ordo ita exhiberi $(\rho^{x})$, $(\rho^{x+e})$, $(\rho^{x+2e})\ldots(\rho^{x+(f-1)e})$, qui manifesto est periodus $(e\cdot x)$; si vero $\rho^{\alpha+ke}+\rho^{\beta}$ per $n$ dividitur, omnes ordinis termini erunt $\equiv(0)$ i.e. $\equiv 1$. Q.E.D.

*Annot.* Demonstratio haec simul methodum facillimam ostendit productum evolvendi. Aliam infra dabimus, quae hac quidem praerogativa caret, sed ob simplicitatem non contemnenda videtur.

248.

Periodos omnes minores, quae periodum maiorem constituunt, periodorum systema nominamus. Ita periodi

$$(ef\cdot\alpha),\ (ef\cdot f+\alpha),\ (ef\cdot 2f+\alpha)\ldots\ (ef\cdot(e-1)f+\alpha)$$

e quibus componitur periodus $(f\cdot\alpha)$, hoc nomine designabuntur. *Rite ordinatum* erit, si numeri post signum $\cdot$ positi, ut hic $\alpha$, $f+\alpha$, $2f+\alpha$ secundum seriem arithmeticam (cuius differentia est $f$) progrediantur; *similia* denique erunt systemata, si tam minores quam maiores periodi sint similes.

Theorema. *Si periodi systematum duorum similium rite ordinatorum invicem multiplicentur, prima scilicet in primam, secunda in secundam, tertia in tertiam etc., summa omnium productorum e periodis maiori similibus et numeris datis componi potest.*

*Demonstr.* Sint systemata

$$(ef\cdot\alpha),\ (ef\cdot\alpha+f),\ (ef\cdot\alpha+2f)\ \ldots$$
$$(ef\cdot\beta),\ (ef\cdot\beta+f),\ (ef\cdot\beta+2f)\ \ldots$$

*) Propositio paullo aliter exprimi debebit, si $n$ generaliter numeri primi potestatem denotat; quando vero est numerus primus, nihil immutandum.

Producta e singulis periodis systematis prioris in periodos respondentes posterioris constabunt (§. praec.) e numeris integris et periodis similibus. Sed parvula attentio ad genesin harum periodorum docebit, si

$(ef\cdot\alpha)\times(ef\cdot\beta)$ constet ex numero integro $N$ et periodis $(ef\cdot A)$, $(ef\cdot B)$, $(ef\cdot C)$ etc.

tum constare producta

$(ef\cdot\alpha+f)\times(ef\cdot\beta+f)$ ex $N$ et perr. $(ef\cdot A+f)$, $(ef\cdot B+f)$, $(ef\cdot C+f)$ etc.
$(ef\cdot\alpha+2f)\times(ef\cdot\beta+2f)$ ex $N$ et perr. $(ef\cdot A+2f)$, $(ef\cdot B+2f)$, $(ef\cdot C+2f)$ etc.

et generaliter

$(ef\cdot\alpha+\mu f)\times(ef\cdot\beta+\mu f)$ ex $N$ et perr. $(ef\cdot A+\mu f)$, $(ef\cdot B+\mu f)$, $(ef\cdot C+\mu f)$ etc.

Unde sponte patet, omnium periodorum summam fore

$$eN+(f\cdot A)+(f\cdot B)+(f\cdot C)\text{ etc.}\quad\text{Q. E. D.}$$

Etiam haec demonstratio methodum suppeditat summam illam inveniendi.

249.

Facile est hoc theorema generalius adhuc reddere. Scilicet si habeantur quotcunque systemata rite ordinata similia fiantque producta ex omnibus periodis primis, secundis etc., omnium horum productorum summam constare e numeris et periodis majoribus. Si omnia haec systemata aequalia assumantur, summa potestatum quarumcunque omnium periodorum constabit e numeris et periodis maiori similibus. Iam hinc patescit, quorsum haec tendant. Sit $\lambda = efgh\ldots$; discerpantur omnes radices primae in $e$ periodos $A$, $A'$, $A''$ etc., quaevis harum iterum in $f$: $B$, $B'$, $B''$ etc., harum singulae in $g$: $C$, $C'$, $C''$ etc. Iam omnium periodorum summa datur, est scilicet $\equiv -1$. Sed secundum ea, quae modo diximus, dabitur etiam

$$(A)^2+(A')^2+(A'')^2+(A''')^2+\text{ etc.}$$
$$(A)^3+(A')^3+(A'')^3+(A''')^3+\text{ etc.}$$
$$\text{etc. etc.}$$

Hinc e §. 244 congruentia gradus $e^{ti}$ inveniri poterit, cuius radices sint $A$, $A'$, $A''$ etc.. Iam his tamquam cognitis suppositis, quaevis periodus discerpatur in minores

$$\begin{array}{llll} A & \text{in} & B, \; B', & B'' \ldots \\ A' & \text{in} & B^{(n)}, \; B^{(n+1)}, & B^{(n+2)} \ldots \\ & \text{etc.} & & \end{array}$$

Datur ergo $B+B'+B''+\ldots \equiv A$. Sed constat

$$\begin{array}{c} (B)^2+(B')^2+(B'')^2+\ldots \\ (B)^3+(B')^3+(B'')^3+\ldots \\ \text{etc.} \end{array}$$

ex unitatibus et periodis $A$, $A'$, $A''$ etc. Quare $B$, $B'$, $B''$ etc. dabuntur per congruentiam gradus $f^{ti}$, ex qua inveniri possunt; similique modo periodi, ex quibus constant $A'$, $A''$ etc., poterunt determinari. Quisquis autem hinc videbit, prorsus simili methodo quamvis periodum in minores subdividi posse, donec ad radices ipsas perveniatur.

250.

Sed in harum regularum applicatione difficultas occurrit, quam dimovere debemus. Quoniam scilicet quaevis congruentia plures radices habeat, quod cuique signum tribuendum sit, ut ab invicem rite dignosci possint, est videndum. Quoniam periodorum designatio a numeris $r$, $\rho$ pendet, qui ad libitum assumi possunt, necessario etiam designationi aliquid arbitrarii inhaerere debet. Numerus quidem $\rho$ iam ab initio est stabiliendus. Methodi nostrae indoles, in eo potissimum consistit, ut ex periodis maioribus periodos minores deducamus. Sed hoc sine debito periodorum ordine, quem per *signa* assecuti sumus, fieri nequit. Quare eo nitendum est, ut omnes periodi, quamprimum sunt inventae, signis suis distinguantur.

Sit periodus $A$ designata per $(e\cdot\alpha)$ atque in $f$ periodos $B$, $C$, $D$ etc. discerpta, quas designare oportet. Patet quamvis in tali forma fore contentam $(ef\cdot ke+\alpha)$; sed dico, pro aliqua earum $B$ numerum $k$ ad libitum assumi et inde ceterarum collocationem derivari posse.

Sit $R$ radix aliqua primitiva congr. $x^n \equiv 1$ constetque $B$ e terminis $R^\mu + R^\nu +$ etc., sit $\frac{1}{\mu}\rho^{ke+\alpha} \equiv \frac{1}{\nu}$ (mod. $n$) et quoniam valor ipsius $r$ est arbitrarius (si modo $A$ nanciscatur signum $(e\cdot\alpha)$, quod sponte fieri manifestum est), ponatur $r \equiv R^\nu$ (mod. $p$); quare terminus primus ipsius $B$ erit $r^{\rho^{ke+\alpha}}$ et $B$ per

$(ef.ke+\alpha)$ designare licet. Si loco ipsius $R^\mu$ terminum $R^\nu$ consideravissemus, alium ipsius $r$ valorem nacti essemus; sed sine negotio perspicitur, pro quacunque radice $\rho$, radicem $r$, $\frac{\lambda}{ef}$ valores diversos habere posse.

251.

Iam quomodo ex designatione unius periodi ceterae signis suis distinguantur, videamus. Ad hunc vero finem aliam methodum quaerere oportet reliquas periodos inveniendi; namque quatenus reliquae ut ipsa $A$ radices alicuius congruentiae sunt, nullus in illis ordo cernitur. Ponamus ipsum $A$ ita esse designatum $(ef.0)$, ex praecc. sequitur, fore

$$A^2 \text{ formae } M+N(ef.0)+O(ef.1)+P(ef.2)+\ldots$$
$$A^3 \text{ formae } M'+N'(ef.0)+O'(ef.1)+\ldots$$
$$\text{etc.}$$
$$A^{ef-1} \text{ formae } M^\circ+N^\circ(ef.0)+O^\circ(ef.1)+\ldots$$

His accedit congruentia

$$(ef.0)+(ef.1)+\ldots+(ef.ef-1)\equiv -1$$

Habentur itaque $ef-1$ congruentiae lineares totidemque quantitates incognitae, quae igitur per eliminationem determinari possunt.

*Annot.* Casus occurrere potest, quo quantitates incognitae per huiusmodi expressiones dantur $\frac{V}{Wp}$; quomodo vero huic difficultati remedium afferri possit, infra docebimus. Hic, quoniam hic casus perraro occurrere potest, ei immorari nolumus.

252.

Haec in genere de solutione congruentiarum purarum sufficiant. Passim infra multa adhuc de ipsis dicentur; praesertim multa ex solutione aequationum purarum huc trahi possunt, quae loco suo annotare non negligemus. Exemplum adhuc apponimus, quo cum praeceptis collato, omnia minus peritis clariora fient.

Sit $n=31$, $p=311$, sive investigandae sunt radices congruentiae $x^{31}-1\equiv 0 \pmod{311}$. Statim radix primitiva congruentiae $y^{30}-1\equiv 0 \pmod{31}$ est quaerenda, qualis est $y\equiv 3$. Ponamus itaque $\rho\equiv 3$ et omnes congruentiae propositae radices primitivas primum in 5 periodos discerpamus, scilicet

$$\begin{array}{ll}
(5\cdot0)\ldots\ldots & (1)+(26)+(25)+(30)+(5)+(6)\\
(5\cdot1)\ldots\ldots & (3)+(16)+(13)+(28)+(15)+(18)\\
(5\cdot2)\ldots\ldots & (9)+(17)+(8)+(22)+(14)+(23)\\
(5\cdot3)\ldots\ldots & (27)+(20)+(24)+(4)+(11)+(7)\\
(5\cdot4)\ldots\ldots & (19)+(29)+(10)+(12)+(2)+(21)
\end{array}$$

Per calculos requisitos invenietur summa periodd. $\equiv -1$, quadrat. $\equiv 25$, cub. $\equiv 26$, biquad. $\equiv 249$, pott. quintt. $\equiv 564$.

Quare periodi erunt radices congruentiae

$$x^5+x^4-12x^3-21x^2+x+5\equiv 0$$

Porro autem invenitur

$$\begin{aligned}
(5\cdot0)^2 &\equiv 6+2(5\cdot0)+2(5\cdot3)+(5\cdot4)\\
(5\cdot0)^3 &\equiv 12+15(5\cdot0)+4(5\cdot1)+3(5\cdot2)+6(5\cdot3)+6(5\cdot4)\\
(5\cdot0)^4 &\equiv 90+60(5\cdot0)+28(5\cdot1)+26(5\cdot2)+49(5\cdot3)+38(5\cdot4)
\end{aligned}$$

et hinc per eliminationem

$$\begin{aligned}
5(5\cdot1) &\equiv 3(5\cdot0)^4-(5\cdot0)^3-33(5\cdot0)^2-24(5\cdot0)+15\\
5(5\cdot2) &\equiv -2(5\cdot0)^4-(5\cdot0)^3+22(5\cdot0)^2+31(5\cdot0)\\
5(5\cdot3) &\equiv (5\cdot0)^4-2(5\cdot0)^3\\
5(5\cdot4) &\equiv -2(5\cdot0)^4+4(5\cdot0)^3
\end{aligned}$$

Congruentiae vero inventae una radix est $\equiv 17$; quare si ponatur $(5\cdot0)\equiv 17$, erit $(5\cdot1)\equiv 183$, $(5\cdot2)\equiv 263$, $(5\cdot3)\equiv 91$, $(5\cdot4)\equiv 67$.

Iam periodi inventae iterum discerpantur singulae in ternas; scilicet

$(5\cdot0)$ in $(15\cdot0)$, $(15\cdot5)$, $(15\cdot10)$ sive in $(1)+(30)$, $(26)+(5)$, $(25)+(6)$
$(5\cdot1)$ in $(15\cdot1)$, $(15\cdot6)$, $(15\cdot11)$ sive in $(3)+(28)$, $(16)+(15)$, $(13)+(18)$
etc. etc.

Ponatur periodos, in quas discerpta est

$$\begin{array}{ll}
(5\cdot0)\ \text{esse radices congr.} & x^3+Ax^2+Bx+C\equiv 0\\
(5\cdot1) & x^3+A'x^2+B'x+C'\equiv 0.\\
(5\cdot2) & x^3+A''x^2+B''x+C''\equiv 0\\
 & \text{etc.}
\end{array}$$

eritque

$$A \equiv -(5 \cdot 0), \quad B \equiv (5 \cdot 0) + (5 \cdot 3), \quad C \equiv -2 - (5 \cdot 4)$$
$$A' \equiv -(5 \cdot 1), \quad B' \equiv (5 \cdot 1) + (5 \cdot 4), \quad C' \equiv -2 - (5 \cdot 0)$$

etc. etc. etc.

Quare

$(15 \cdot 0)$, $(15 \cdot 5)$, $(15 \cdot 10)$ erunt radices congr. $x^3 - 17x^2 + 108x - 69 \equiv 0$
$(15 \cdot 1)$, $(15 \cdot 6)$, $(15 \cdot 11)$
$(15 \cdot 2)$, $(15 \cdot 7)$, $(15 \cdot 12)$
$(15 \cdot 3)$, $(15 \cdot 8)$, $(15 \cdot 13)$
$(15 \cdot 4)$, $(15 \cdot 9)$, $(15 \cdot 14)$

Hic autem habetur

$$(15 \cdot 0)^2 - 3(15 \cdot 0) \equiv (15 \cdot 1)$$
$$(15 \cdot 1)^2 - 3(15 \cdot 1) \equiv (15 \cdot 2)$$

etc.

Unde si una radicum primae congruentiae, 10, ponatur $(15 \cdot 0)$, habetur

| | | |
|---|---|---|
| $(15 \cdot 0) \equiv 10$ | $(15 \cdot 5) \equiv$ | $(15 \cdot 10) \equiv$ |
| $(15 \cdot 1) \equiv 37$ | $(15 \cdot 6) \equiv$ | $(15 \cdot 11) \equiv$ |
| $(15 \cdot 2) \equiv -151$ | $(15 \cdot 7) \equiv$ | $(15 \cdot 12) \equiv$ |
| $(15 \cdot 3) \equiv -39$ | $(15 \cdot 8) \equiv$ | $(15 \cdot 13) \equiv$ |
| $(15 \cdot 4) \equiv -112$ | $(15 \cdot 9) \equiv$ | $(15 \cdot 14) \equiv$ |

Tandem harum singularum periodorum capiantur termini constituentes eruntque

(1), (30) radices congr. $x^2 - (15 \cdot 0)x + 1 \equiv 0$
(3), (28) $x^2 - (15 \cdot 1)x + 1 \equiv 0$

etc.

Primae congruentiae radices sunt 126 et 195, quae igitur erunt radices primitivae congruentiae $x^{31} \equiv 1$ et ex his reliquae sine negotio deduci possunt.

---

## DISQUISITIONES GENERALES DE CONGRUENTIIS.

### ANALYSIS RESIDUORUM CAPUT OCTAVUM.

---

330.

Quae in Sectionibus praecedentibus de congruentiis sunt tradita, simplicissimos tantum casus attinent methodisque particularibus plerumque sunt eruta. In hac Sectione periculum faciemus congruentiarum theoriam, quantum quidem adhuc licet, ad altiora principia reducere, simili fere modo ut *aequationum* theoria considerari solet, quacum insignis intercedit analogia, uti iam saepius observavimus. Quoniam igitur omnes congruentiae algebraicae unicam incognitam involventes ad hanc formam reduci possunt

$$X \equiv 0$$

ubi $X$ est functio algebraica incognitae $x$, nullas fractiones involvens, huiusmodi functiones imprimis erunt considerandae.

331.

Si $P$, $Q$ sint functiones indeterminatae $x$ huius formae

$$A + Bx + Cxx + Dx^3 + \dots$$
$$H + Ix + Kxx + Lx^3 + \dots$$

(quales abhinc semper per *functiones* simpliciter designamus) et in utraque coëfficientes similium ipsius $x$ potestatum secundum quemcunque modulum sint con-

grui, *functiones secundum hunc modulum congruae* dicentur. Perspicuum autem est, functiones congruas, si pro indeterminata valores aequales aut congrui accipiantur, valores congruos nancisci. Quae in Capp. I. et II. de *numeris* demonstravimus, plerumque etiam de functionibus sunt tenenda; ita si $P \equiv P'$, $Q \equiv Q'$, $R \equiv R'$ etc., patet, fore $P+Q+R+$ etc. $\equiv P'+Q'+R'+$ etc.; $P-Q \equiv P'-Q'$; $PQ \equiv P'Q'$; $PQR$ etc. $\equiv P'Q'R'$ etc. Demonstrationes facillimae, possuntque simili modo adornari ut Cap. 1[mo].

Si $PQ \equiv R$, functionem $Q$ per $\frac{R}{P}$ designabimus apposito modulo, dicemusque, $Q$ esse quotientem, si $R$ per $P$ secundum hunc modulum dividatur. Manifestum autem est, loco ipsius $Q$ omnes functiones ipsi congruas accipi posse, quas omnes tamquam *unicum* valorem spectabimus. Infra vero ostendemus, quibus casibus talis quotiens plures valores (i. e. incongruos) nancisci possit.

### 332.

Si modulus sit numerus primus et divisor $Q$ unicum tantum terminum involvat $Hx^\lambda$, cuius coëfficiens $H$ per modulum non dividitur, i. e. si modo $H$ non sit $\equiv 0$, quotiens plures valores habere nequit. Si enim esset $QA \equiv P$ et $QB \equiv P$, foret $Q(A-B) \equiv 0$. Iam sit

$$Q \equiv \ldots + Hx^\lambda + Ix^{\lambda+1} + \text{etc.}$$

ita ut $H$ per $p$ non dividatur, et

$$A - B \equiv Lx^l + Mx^{l+1} + \text{etc.}$$

ita ut $L$ per $p$ non dividatur (hanc autem formam $A-B$ habebit, quia supponimus $A$ non $\equiv B$). Foretque $Q(A-B) \equiv HLx^{\lambda+l} + \text{etc.} \equiv 0$. Q. E. A., quia $HL$ non $\equiv 0$.

Facile iam regulae dantur functionem $P$ per $Q$, siquidem fieri potest, dividendi; sit

$$P \equiv ax^\alpha + bx^{\alpha+1} + cx^{\alpha+2} + \text{etc.} + kx^\varkappa$$
$$Q \equiv mx^\mu + nx^{\mu+1} + qx^{\mu+2} + \text{etc.} + tx^\tau$$

ita ut $a, k, m, t$ per modulum non dividantur, debetque esse $\alpha$ non $< \mu$, $\varkappa$ non $< \tau$. Divisio autem simili modo institui potest, ut in calculo logistico communi, modo semper pro quotiente numerus integer accipiatur; scilicet quotiens semper

hanc formam habebit $\frac{r}{m}$, quod secundum modulum determinari debet. Iam si postquam $\varkappa+\mu-\alpha-\tau+1$ termini sunt inventi, residuum remaneat, quod erit formae

$$Ax^{\varkappa+\mu-\tau+1}+Bx^{\varkappa+\mu-\tau+2}+\ldots+Cx^{\varkappa}$$

neque omnes coëfficientes $A, B, C$ . . sint $\equiv 0$, $P$ per $Q$ dividi nequit.

Ceterum patet, divisionem etiam a terminis, qui maximas dimensiones habent, $kx^{\lambda}$, $tx^{\tau}$ incipi potuisse; operatio facilitabitur, si $Q$ ad formam redigatur

$$mx^{\mu}(1+qx+rxx+\text{etc.})$$

unde fiet posito $mv\equiv 1$

$$\frac{P}{Q}\equiv\frac{vP:x^{\mu}}{1+qx+\text{etc.}}$$

tunc vero divisio per methodos communes perfici potest.

333.

Theorema. *Si $x\equiv a$ fuerit radix congruentiae $\xi\equiv 0$, $\xi$ per $x-a$ dividi poterit secundum congruentiae modulum.*

*Demonstratio.* Si enim dividi non posset, foret $\xi\equiv(x-a)\xi'+b$, ita ut $b$ per modulum dividi non posset. Iam si $x$ ponatur $\equiv a$, $\xi$ fiet $\equiv 0$ (hyp.), quare $(x-a)\xi'+b\equiv 0$; sed tunc etiam $(x-a)\xi'\equiv 0$, quare $b$ necessario erit $\equiv 0$.

334.

Problema. *Datis binis functionibus, earum communem divisorem (maximae dimensionis) invenire secundum modulum datum.*

*Solutio.* Sint functiones $A$, $B$. Habeat $A$ totidem aut plures dimensiones quam $B$; dividatur $A$ per $B$, si fieri potest sine residuo, $B$ erit divisor communis quaesitus. Si residuum maneat $C$, hoc inferiorem dimensionem habebit quam $B$. Sit itaque

$$A\equiv aB+C,\quad B\equiv bC+D,\quad C\equiv cD+E,\ \text{etc.}$$

ita ut $A, B, C, D, a, b, c$ etc. sint functiones, et dimensiones functionum $A, B, C, D$ etc. constituant seriem decrescentem. Iam si tandem aliqua divisio succedat, ex. gr. $D\equiv dE$, ultimus divisor erit divisor communis quaesitus; si vero nulla succedat, tandem ad residuum pervenietur, quod nullam dimensionem

habeat i. e. ad *numerum*; hoc autem casu functiones $A$, $B$ communem divisorem non habent.

*Demonstr.* Si divisor $E$ functionem praecedentem sine residuo dividat, omnes antecendentes dividere facile perspicitur; quare $E$ erit divisor communis functionum $A$, $B$. Q. E. Pr. Si autem daretur divisor maioris dimensionis, puta $E'$, hic propter $C \equiv A - aB$ etiam $C$ similique argumento etiam $D$ etc. adeoque $E$ divideret, functio maioris dimensionis functionem minoris. Q. E. A. Q. E. Scd. Hinc etiam patet, si divisor communis nullius dimensionis datur, ad residuum nullius dimensionis perveniri non posse; alias enim functio nullius dimensionis per functionem alicuius dimensionis divideretur. Q. E. A.

335.

Theorema. *Si $A$, $B$ sint functiones inter se primae secundum modulum $p$; $A$ autem dimensionis $\alpha$, $B$ dimensionis $\beta$; inveniri poterunt functiones $P$, $Q$, dimensionum quae sunt respective $< \beta$, $< \alpha$, ita ut*

$$PA + QB \equiv 1 \ (mod.\ p)$$

*Demonstr.* Hoc enim casu erit

$$A \equiv aB + C, \quad B \equiv bC + D, \text{ etc. } \quad K \equiv kL + M$$

ita ut dimensiones functionum $A$, $B$, $C$, $D$, ... $K$, $L$, $M$ continuo decrescant et $M$ nullam dimensionem habeat. Iam formentur series

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ \ldots\ a^{(\varkappa)}$$
$$1,\ b,\ b',\ b'',\ \ldots\ b^{(\varkappa-1)}$$

ita ut

$$a' \equiv ba + 1 \quad a'' \equiv ca' + a \quad a''' \equiv da'' + a' \text{ etc.}$$
$$b' \equiv cb + 1 \quad b'' \equiv db' + b \quad b''' \equiv eb'' + b' \text{ etc.}$$

eritque

$$A - aB \equiv +C, \quad bA - a'B \equiv -D, \quad b'A - a''B \equiv +E, \text{ etc.}$$

uti sine negotio perspicitur; hinc tandem

$$b^{(\varkappa-1)}A - a^{(\varkappa)}B \equiv \pm M.$$

Iam sit $\frac{1}{\pm M} \equiv \mu$, eritque ponendo $P \equiv \mu b^{(\varkappa-1)}$, $Q \equiv -\mu a^{(\varkappa)}$

$$PA + QB \equiv 1.$$

Porro vero manifestum est,

$$\text{Dimens. ipsius } B + \text{Dim. ipsius } a \text{ esse } = \text{Dim. } A$$

$$\text{Dim. } C + \text{Dim. } b = \text{Dim. } B$$

etc.

$$\text{Dim. } L + \text{Dim. } k = \text{Dim. } K.$$

Quare

$$\text{Dim. } L + \text{Sum. Dim. } a, b, \ldots k = \text{Dim. } A$$

Patet vero dimensionem ipsius $a^{(x)}$ adeoque etiam

$$\text{Dim. ipsius } Q \text{ esse } = \text{Sum. Dim. } a, b, c, \ldots \text{ i. e. } = \alpha - \text{Dim. } L$$

itemque

$$\text{Dim. ipsius } P = \beta - \text{Dim. } L. \quad \text{Q. E. D.}$$

336.

Hinc autem sequitur, si $M$ est divisor communis maximae dimensionis functionum $A$, $B$, semper poni posse

$$AP + BQ \equiv M$$

Exempla praecedentis theorematis brevitatis gratia omitto, sed lectores non negligent, per ea facilitatem huius generis problemata tractandi sibi comparare. Ceterum operae pretium erit admonere, theorema praecedens etiam de functionibus absolute sumtis valere, quarum quidem coëfficientes sint numeri rationales. Hoc ex demonstrationis modo per se elucebit. Nobis autem ei rei immorari non licet. Similia lector etiam non admonitus in sequentibus observabit.

Si $A$ nec cum $B$ nec cum $C$ divisorem ullius dimensionis communem habeat, etiam cum producto $BC$ nullum habebit divisorem communem. Sit enim

$$PA + QB \equiv 1, \quad \text{erit} \quad PAC + QBC \equiv C$$

Iam si $A$ cum $BC$ divisorem $M$ communem haberet, hic etiam ipsam $C$ divideret contra hyp. Hinc generaliter si functio $A$ ad $B$, $C$, $D$ etc. prima, etiam ad omnium productum erit prima.

Si $A, B, C, D$ etc. nullum divisorem habeant omnibus communem, fieri potest

$$PA + QB + RC + SD + \text{etc.} \equiv 1$$

Sit divisor maximae dimensionis inter $A$ et $B$, $M$; inter $M$ et $C$, $M'$; inter $M'$ et $D$, $M''$ etc.: patet, ultimum huius seriei terminum fore nullius dimensionis (hyp.). Quare poni poterit

$$aA + bB \equiv M,\quad mM + cC \equiv M',\quad m'M' + dD \equiv M'',\ \text{etc.}$$

unde substitutionibus factis theorematis veritas apparet.

337.

Theorema. *Si $A$, $B$, $C$ etc. sint functiones inter se primae (quarum binae quaeque nullum habeant divisorem communem) secundum modulum $p$, et functio $M$ secundum eundem modulum per singulas sit divisibilis; etiam per omnium productum erit divisibilis.*

*Demonstr.* Poni enim potest $PA + QB \equiv 1$, quare erit

$$\frac{M}{A}Q + \frac{M}{B}P \equiv \frac{M}{AB}.$$

Iam quum $C$ ad $AB$ prima, erit etiam $M$ per $ABC$ divisibilis similique ratiocinio per $ABCD$ etc.

338.

Si congruentia $\xi \equiv 0$ habeat radices $x \equiv a$, $x \equiv b$, $x \equiv c$ etc., $\xi$ per productum ex $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ etc. dividi poterit; cum enim $a$, $b$, $c$, etc. supponantur incongrui, functiones $x-a$, $x-b$, $x-c$ etc. erunt primae inter se, et quum $\xi$ per singulas dividatur, etiam per productum ex omnibus dividetur. Hinc patet, radicum multitudinem congruentiae dimensionem superare non posse: quae est demonstratio huius theorematis, quam polliciti sumus.

Sed simul hinc perspicitur, quomodo congruentiarum solutio partem tantummodo constituat multo altioris disquisitionis, scilicet de resolutione functionum in factores. Manifestum est, congruentiam $\xi \equiv 0$ nullas habere radices reales, si $\xi$ nullos factores unius dimensionis habeat; at hinc nihil obstat, quominus $\xi$ in factores duarum, trium pluriumve dimensionum resolvi possit, unde radices quasi *imaginariae* illi attribui possint. Revera, si simili licentia, quam recentiores mathematici usurparunt, uti talesque quantitates imaginarias introducere vo-

luissemus, omnes nostras disquisitiones sequentes incomparabiliter contrahere licuisset; sed nihilominus maluimus omnia ex primis principiis deducere *).

339.

*Functiones* secundum modulum determinatum *primae* vocantur, quae per nullas functiones inferiorum dimensionum secundum hunc modulum dividi possunt.

Ita omnes functiones unius dimensionis erunt primae, functiones autem duarum dimensionum aut erunt primae aut ex binis unius dimensionis compositae: quare $\xi$ erit functio prima duarum dimensionum, si congruentia $\xi \equiv 0$ nullas radices reales admittit. Ex. gr. $xx+x+1$ pro modulo 5 est prima, quia

$$xx+x+1 \equiv (x-2)^2-3 \pmod{5}$$

et 3 non-residuum quadraticum numeri 5.

Hae vero functiones primae prae omnibus attentionem nostram desiderant. Quamvis enim aliae quam primi gradus ad inveniendas radices reales inservire non possint, amplior earum consideratio tum ob insignes ipsarum proprietates tum ob alias egregias veritates ex his deducendas sese commendat.

340.

Theorema. *Functio quaecunque aut est prima aut ex functionibus primis composita; posteriorique casu unico tantum modo e functionibus primis componi potest.*

*Demonstr.* Nisi enim functio proposita $A$ sit prima, per aliam inferioris dimensionis $B$ dividetur. Si $B$ non est functio prima, per aliam $C$ inferioris gradus dividetur, itaque pergendo patet, tandem ad functionem primam deveniri, quoniam alias haec series foret infinita, quod, quoniam dimensiones perpetuo decrescunt; absurdum est. Jam si ultima functio prima sit $L$, haec omnes antecedentes metietur. Quare $A \equiv LA'$ eritque $A'$ inferioris dimensionis quam $A$. Quod iterum fiet $A' \equiv L'A''$ etc., patet, tandem ad functionem primam perveniri, adeoque $A$ erit $\equiv$ producto e functionibus primis $L, L', L''$ etc. Q. E. Pr.

Iam si etiam esset $A \equiv MM'M''$ etc. neque omnes $L, L', L''$ etc. eaedem cum omnibus $M, M', M''$ etc., eiiciantur eae, quae utrique seriei communes

*) Alia forsan occasione de hac re opinionem nostram fusius explicabimus.

sunt. Remaneantque $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots; \mu, \mu', \mu'', \ldots$ eritque $\mu$ ad $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. prima, quare etiam ad productum $\lambda\lambda'\lambda''$ etc.; tamen esse debet

$$\lambda\lambda'\lambda'' \ldots \equiv \mu\mu'\mu \ldots \text{ i. e. } \frac{\lambda\lambda'\lambda'' \ldots}{\mu} \equiv \mu'\mu'' \ldots \text{ Q. E. A.}$$

341.

Primum caput harum investigationum in eo consistet, ut functionum primarum cuiusvis dimensionis multitudinem determinemus. Quoniam enim pro modulo determinato numerus omnium functionum diversarum (incongruarum) cuiuslibet gradus est definitus, ex his vero aliae sunt ex primis inferiorum graduum compositae, aliae primae, etiam harum numerus finitus erit. Rigorosa huius rei evolutio satis est lubrica; a casibus simplicioribus incipiemus.

Posito modulo $= p$, numerus omnium functionum diversarum $n^{ti}$ gradus huius formae

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{etc.}$$

erit $p^n$; coëfficientium enim $A, B, C$ etc. numerus est $n$; et quum quivis independenter a reliquis possit esse $\equiv 0, 1, 2, 3 \ldots (p-1) (\text{mod.} p)$, ex combinationum theoria sequitur, $p^n$ combinationes diversas haberi; quae igitur omnium functionum diversarum huius gradus complexum definiunt.

Ita functiones unius dimensionis erunt $p$, scilicet $x, x+1, x+2$ usque ad $x+p-1$; functiones duarum dimensionum $pp$ etc.

342.

Iam supra monuimus, omnes functiones primi gradus pro primis habendas esse; si igitur, quod ad propositum nostrum sufficit, ad eas functiones nos restringamus, quarum terminus summus habet coëfficientem 1, erunt $p$ functiones primi gradus seu unius dimensionis.

Functiones secundi gradus omnes aut e binis primi gradus erunt compositae aut primae. Iam ex combinationum theoria constat, $p$ res diversas admissis repetitionibus $\frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2}$ modis diversis combinari posse, quare totidem functiones erunt e binis primis unius dimensionis compositae, adeoque $pp - \frac{p \cdot p+1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}(pp-p)$ functiones primae duarum dimensionum.

Simili modo e functionibus omnibus tertii gradus, quarum numerus est $p^3$, excludendae sunt eae, quae e ternis primis unius dimensionis componuntur, quarum numerus est $\frac{p.p+1.p+2}{1\,.\,2\,.\,3}$; insuperque eae, quae e functione prima unius aliaque duarum dimensionum componuntur, quarum numerus est $p.\frac{1}{2}(pp-p)$; quibus deletis restabunt $\frac{1}{3}(p^3-p)$; tot igitur sunt primae trium dimensionum. Elucet hoc modo semper continuari posse.

343.

Ut autem hae operationes facilius absolvantur simulque ad evolutionem legis generalis via sternatur, rem generaliter considerabimus. Brevitatis gratia designamus per (1) multitudinem functionum primarum unius dimensionis, per (2) numerum functionum primarum duarum dimensionum, sic porro per $(1^2)$ multitudinem functionum e binis primis unius dimensionis compositarum etc. etc., generaliter per $(1^\alpha 2^\beta 3^\gamma \ldots)$ multitudinem functionum omnium, quae e functionibus primis compositae sunt, scilicet ex $\alpha$ unius, $\beta$ duarum, $\gamma$ trium etc. dimensionum, quarum itaque dimensio erit $\alpha+2\beta+3\gamma+$ etc. Tum per praecedentia theoriamque combinationum elucet, fore

$$(1^\alpha 2^\beta 3^\gamma 4^\delta \ldots) = (1^\alpha)(2^\beta)(3^\gamma)(4^\delta)\ldots$$

$$(1^\alpha) = \frac{(1).(1)+1.(1)+2.(1)+3\ldots(1)+\alpha-1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,\alpha}$$

seu generaliter

$$(a^\alpha) = \frac{(a).(a)+1.(a)+2.(a)+3\ldots(a)+\alpha-1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,\alpha}$$

Denique manifestum est, si omnes modi diversi numerum $n$ e numeris $1, 2, 3, \ldots$ per additionem componendi colligantur, qui designentur per $\alpha.1+\beta.2+\gamma.3+$ etc., summam omnium harum expressionum $(1^\alpha 2^\beta 3^\gamma \ldots)$ aequalem fore multitudini omnium functionum $n$ dimensionum, i. e. $=p^n$. Ita

$$\begin{aligned} p &= (1) \\ pp &= (1^2)+(2) \\ p^3 &= (1^3)+(1.2)+(3) \\ p^4 &= (1^4)+(1^2.2)+(1.3)+(2^2)+(4) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Perspicuum est, in expressione $p^n$ praeter quantitates (1), (2), (3) etc. etiam hanc

ingredi $(n)$, unde patet, quomodo omnes quantitates per praecedentes sint determinandae. Ita invenitur

$$(1) = p \qquad (4) = \tfrac{1}{4}(p^4 - pp) \qquad (7) = \tfrac{1}{7}(p^7 - p)$$
$$(2) = \tfrac{1}{2}(pp - p) \qquad (5) = \tfrac{1}{5}(p^5 - p) \qquad (8) = \tfrac{1}{8}(p^8 - p^4)$$
$$(3) = \tfrac{1}{3}(p^3 - p) \qquad (6) = \tfrac{1}{6}(p^6 - p^3 - pp + p) \qquad \text{etc.}$$

344—346.

Observatur ex hoc seriei initio, summum terminum expressionis $(n)$ esse $\frac{1}{n}p^n$, ad quem, si $n$ est primus; accedit $-\frac{1}{n}p$; at si $n$ est compositus, lex minus elucet. Si vero attentius rem consideramus, videmus esse

$$p = (1) \qquad p^5 = 5(5) + (1)$$
$$pp = 2(2) + (1) \qquad p^6 = 6(6) + 3(3) + 2(2) + (1)$$
$$p^3 = 3(3) + (1) \qquad p^7 = 7(7) + (1)$$
$$p^4 = 4(4) + 2(2) + (1) \qquad p^8 = 8(8) + 4(4) + 2(2) + (1) \quad \text{etc.}$$

ubi lex progressionis est manifesta; scilicet si omnes numeri $n$ divisores sint $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc., erit

$$p^n = \alpha(\alpha) + \beta(\beta) + \gamma(\gamma) + \delta(\delta) + \text{ etc.}$$

Huius observationis generalitatem iam demonstrare accingimur.

Ostendimus summam omnium talium expressionum $(1^\alpha)(2^\beta)(3^\gamma)\ldots$ si semper $\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots = n$, exhaurire omnes functiones $n$ dimensionum adeoque esse $= p^n$. Hinc patet, — — —. Si

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(1)}\left(\frac{1}{1-xx}\right)^{(2)}\left(\frac{1}{1-x^3}\right)^{(3)}\ldots \text{ evolvatur in seriem } 1 + Ax + Bx^2 \ldots = P,$$

erit

$$A = p, \quad B = p^2, \quad C = p^3 \text{ etc.}$$
$$\frac{x\,dP}{P\,dx} = \frac{(1)x}{1-x} + \frac{2(2)x^2}{1-x^2} + \frac{3(3)x^3}{1-x^3}\ldots$$

— — — —

[hinc substituendo $\frac{px}{1-px}$ pro $\frac{x\,dP}{P\,dx}$ et evolvendo singulas fractiones in series infinitas theorematis veritas sponte elucet.]

347.

Theorema hoc etiam alio modo exprimi potest. Scilicet si numeri $n$ divisores omnes sint $n$, 1, $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$ etc., theorema in eo consistit, ut sit

$$p^n = n(n) + (1) + \delta(\delta) + \delta'(\delta') + \text{ etc.}$$

Iam patet, productum ex $(n)$ functionibus primis, quae sunt $n$ dimensionum, habere $n(n)$ dimensiones et sic de reliquis, quare

*Productum ex omnibus functionibus primis dimensionis unius, dimensionum $n$, $\delta$, $\delta'$ etc. habebit $p^n$ dimensiones.*

Facile nunc est ex hoc theoremate valorem expressionis $(n)$ ipsum deducere; sed brevitatis gratia analysin, quae non est difficilis, supprimimus. Sit itaque $n = a^\alpha b^6 c^\gamma$ etc., ita ut $a$, $b$, $c$ etc. sint numeri primi diversi, eritque

$$n(n) = p^n - \Sigma p^{\frac{n}{a}} + \Sigma p^{\frac{n}{ab}} - \Sigma p^{\frac{n}{abc}} \text{ etc.}$$

ubi $\Sigma p^{\frac{n}{abc..}}$ significat complexum omnium expressionum huic $p^{\frac{n}{abc..}}$ similium, si quantitates $a$, $b$, $c$.. quomodocunque inter se permutentur. Ita pro $n = 36$ erit $36(36) = p^{36} - p^{18} - p^{12} + p^6$.

Unam adhuc observationem adiicere liceat. Si $n$ est formae $a^\alpha$ et $a$ primus, erit $n(n) = p^n - p^{\frac{n}{a}}$, quare, quum $(n)$ necessario sit integer, erit quicquid sit $p$,

$$p^n \equiv p^{\frac{n}{a}} \pmod{n}$$

quare, si $p$ ad $a$ primus erit,

$$p^{n-\frac{n}{a}} \equiv 1 \pmod{n}$$

et pro $\alpha = 1$

$$p^{a-1} \equiv 1 \pmod{a}$$

Memorabile est, haec theoremata tam diversis modis erui posse.

348.

Problema. *Data aequatione*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{etc.} + M = 0$$

*cuius radices sunt $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc., invenire aequationem, cuius radices sint $x = a^\tau$, $x = b^\tau$, $x = c^\tau$ etc.*

*Solutio prima.* Quaerantur per theorema notum summae radicum aequationis propositae, earum quadratorum, cuborum etc. usque ad potestatem $m\tau^{\text{tam}}$. Hinc igitur habentur etiam summae radicum aequationis quaesitae nec non quadratorum etc. scilicet $\Sigma a^\tau$, $\Sigma a^{2\tau}$ etc., unde per idem theorema coëfficientes determinari possunt.

Ad praxin quidem haec solutio est facilior; sed ad institutum nostrum nec non ad ostendendum, coëfficientes aequationis quaesitae fore integros, si aequationis propositae coëfficientes fuerint integri, quae sequitur magis est accomodata.

*Solutio secunda.* Sit $\theta$ radix prima aequationis $x^\tau = 1$, fiatque productum ex

$$\begin{array}{l} x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} \\ x^m + A\theta x^{m-1} + B\theta\theta x^{m-2} + \text{etc.} \\ x^m + A\theta\theta x^{m-1} + B\theta^4 x^{m-2} + \text{etc.} \\ \text{etc.} \\ x^m + A\theta^{\tau-1} x^{m-1} + B\theta^{2\tau-2} x^{m-2} + \text{etc.} \end{array}$$

Huius itaque producti radices erunt

$$\begin{array}{llll} a, & \theta a, & \theta\theta a & \text{etc.} \\ b, & \theta b, & \theta\theta b & \text{etc.} \\ c, & \theta c, & \theta\theta c & \text{etc.} \end{array}$$

i. e. productum aequale erit huic

$$(x^\tau - a^\tau)(x^\tau - b^\tau)(x^\tau - c^\tau) \ldots$$

adeoque huius formae

$$x^{\tau m} + A'x^{\tau(m-1)} + B'x^{\tau(m-2)} + \text{etc.}$$

Iam si pro $x^\tau$ scribatur $x$, erit

$$x^m + A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \text{etc.} = (x - a^\tau)(x - b^\tau)(x - c^\tau) \ldots$$

adeoque

$$x^m + A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \text{etc.} = 0$$

aequatio quaesita. Quod vero hic $A'$, $B'$ etc. sint non solum rationales sed etiam integri, facile ex theoria aequationis $x^\tau = 1$ deducitur.

Quoniam hac operatione in sequentibus saepe utemur, per $(P, \rho^\tau)$ indica-

bimus functionem, qua cifrae aequali posita aequatio proveniens habeat radices, quae sunt potestates $\tau^{\text{tae}}$ radicum aequationis $P=0$.

Si $P\equiv Q$ secundum modulum quemcunque, erit etiam $(P,\rho^\tau)\equiv(Q,\rho^\tau)$ secundum eundem modulum.

349.

Theorema. *Coëfficiens termini $x^n$ in $(P,\rho^\tau)$ congruus est secundum modulum $\tau$ coëfficienti termini $x^{\tau n}$ in $P^\tau$, siquidem $\tau$ est numerus primus* (quod pro hoc casu est tertia solutio problematis praecedentis).

*Demonstr.* Ex capite sexto sequitur, producti

$$(x^m+Ax^{m-1}+\text{etc.})(x^m+A\theta x^{m-1}+\text{etc.})\ldots$$

coëfficientem quemcunque habere hanc formam, postquam pro $\theta^\tau$ substituta est unitas,

$$E+(1+\theta+\theta\theta+\text{etc.}+\theta^{\tau-1})F$$

Quodsi iam $\theta$ consideretur tamquam radix prima aequationis $x^\tau=1$, totum productum abibit in $E$; si vero ponatur $\theta=1$, totum productum abibit in $P^\tau=E+\tau F$, quare erit coëfficiens termini $x^{n\tau}$ in $P^\tau$ congruus secundum modulum $\tau$ coëfficienti termini $x^{n\tau}$ in $E$, i. e. coëfficienti termini $x^n$ in $(P,\rho^\tau)$.

350.

Theorema. *Si $\tau$ est numerus primus, erit*

$$(P,\rho^\tau)\equiv P\ (mod.\,\tau)$$

*Demonstr.* Sit coëfficiens termini $x^n$ in $(P,\rho^\tau)=N'$, in $P$ vero eiusdem termini coëfficiens $=N$. Tunc posito

$$P=x^m+Ax^{m-1}+\text{etc.}+Nx^n+\text{etc.}$$

erit

$$P^\tau\equiv x^{m\tau}+A^\tau x^{(m-1)\tau}+\text{etc.}+N^\tau x^{n\tau}+\text{etc.}\ (\text{mod.}\,\tau)$$

adeoque (§. praec.) $N'\equiv N^\tau$ (mod. $\tau$); quare, quum $N^\tau\equiv N$, erit $N'\equiv N$. Q.E.D.

Hinc etiam patet, esse $(P,\rho^\alpha)\equiv(P,\rho^{\alpha\tau})$ et $(P,\rho^\tau)\equiv(P,\rho^{\tau\tau})$, unde generaliter

$$(P,\rho^\alpha)\equiv(P,\rho^{\alpha\tau^k})\ (\text{mod.}\,\tau)$$

351.

**Theorema.** *Datur valor numeri $\nu$ minor quam $p^m$, ita ut functio $x^\nu - 1$ per functionem propositam $P$ $m$ dimensionum, cuius pars infima indeterminatam $x$ non involvit, secundum modulum $p$ dividi possit.*

*Dem.* Dividatur per $P$ series functionum $1, x, xx \ldots$ usque ad $x^{p^m-1}$, simulac dimensionem $m$ superant, et quoniam nulla per $P$ sine residuo dividi poterit, omnia residua ad hanc formam redigi poterunt

$$Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + N$$

ita ut omnes coëfficientes sint positivi et $< p$. Sed patet, quum nunquam omnes possint esse $= 0$, $p^m - 1$ tantummodo functiones dari, quarum alicui singulae aequales esse debent, quare quum usque ad potestatem ipsius $x$, cuius exponens est $p^m - 1$, $p^m$ residua habeantur, necessario duo ad minimum eadem esse debent. Prodeat igitur idem residuum, si $x^a$ et $x^{a+\nu}$ per $P$ dividantur, ita ut $a + \nu < p^m$. Quare $x^{a+\nu} - x^a$ per $P$ dividi poterit. Hinc quoniam (hyp.) $x$ adeoque etiam $x^a$ functio est ad $P$ prima, etiam $x^\nu - 1$ per $P$ dividi poterit. Q. E. D.

*Coroll.* Si $x^\nu - 1$ per $P$ dividatur, etiam $x^{k\nu} - 1$ per $P$ dividi poterit, denotante $k$ numerum quemcunque integrum.

352.

**Theorema.** *Manentibus denominationibus ut in §. praec., si $P$ fuerit functio prima et $x^\nu$ infima potestas, quae unitate mulctata per $P$ dividi possit, erit $\nu$ aut $= p^m - 1$ aut pars aliquota huius numeri, excepto unico casu, ubi $P \equiv x$.*

*Dem.* Quoniam $P$ est functio prima $m$ dimensionum, dabuntur $p^m - 1$ functiones diversae pauciorum quam $m$ dimensionum (exclusa scilicet ab omnium numero functione 0), quae omnes ad $P$ erunt primae. Iam quum $x^\nu$ supponatur esse infima potestas, quae per $P$ divisa unitatem relinquit, palam est, si omnes inferiores potestates ab $1, x, \ldots$ usque ad $x^{\nu-1}$ per $P$ dividantur, $\nu$ residua diversa prodire, quae per $A$ generaliter designentur. Iam si haec exhauriant omnia quae sunt possibilia, theorema erit demonstratum; sin vero quaedam nondum sint in eorum numero, sit quodcunque eorum $B$; iam perspicuum est, functionem $Bx^\nu$ per $P$ divisam residuum $B$ dare et generaliter esse $Bx^{\nu+k} \equiv Bx^k$ (mod. $P$); sed omnes functiones ab $B$ usque ad $Bx^{\nu-1}$ diversa inter se et ab residuis $A$

dabunt residua; si scilicet esset $Bx^\lambda \equiv Bx^{\lambda+\delta}$ (mod. $P$), foret etiam $1 \equiv x^\delta$ (mod $P$), et $\delta < \nu$ contra hyp.; si vero esset $Bx^\lambda \equiv x^\mu$ (mod. $P$), foret $B \equiv x^{\mu+\nu-\lambda}$ (mod. $P$) adeoque $B$ unum ex residuis $A$ contra hyp.. Quare patet haberi adhuc $\nu$ nova residua. Simili modo ulterius progredi licebit (omnino ut supra §. .) apparebitque numerum omnium residuorum possibilium $p^m - 1$ esse aut $= \nu$, aut $= 2\nu$, aut $= 3\nu$, aut generaliter multiplum numeri $\nu$. Q. E. D.

353.

Ex theoremate praec. et Coroll. §. 351 sequitur, quamvis functionem primam $n$ dimensionum metiri functionem $x^{p^n-1} - 1$ secundum modulum $p$. Omnes itaque functiones unius dimensionis excepta unica, quae est $\equiv x$, metientur $x^{p-1} - 1$, quod est theorema Fermatianum; omnes autem functiones primae secundi gradus i. e. formae $xx + Ax + B$ metientur functionem $x^{pp-1} - 1$ etc. Iam sint numeri $n$ divisores omnes $n, \delta, \delta', \delta''$ etc.. 1, patetque, $p^n - 1$ etiam per $p^\delta - 1$ $p^{\delta'} - 1$, $p^{\delta''} - 1$ etc. $p - 1$ dividi posse, quare functio $x^{p^n-1} - 1$ per *omnes functiones primas dimensionum* $n, \delta, \delta', \delta''$ *etc. usque ad functiones primas unius dimensionis (exclusa functione $x$)* dividi poterit, quare etiam (quum omnes hae functiones sint absolute adeoque etiam inter se primae) per *productum ex omnibus*. Sed idem hoc productum habet $p^n - 1$ dimensiones (§. 347.) (ob deficientiam unius functionis $x$); quare patet, *hoc productum ipsum ipsi* $x^{p^n-1} - 1$ (*mod.* $p$) *congruum esse debere.*

354.

Theorema. *Si functio* $x^\nu - 1$ *per functionem* $P$ *dividitur, erit*

$$(P, \rho^{k\nu+t}) \equiv (P, \rho^t)$$

*denotantibus* $k, t$ *numeros quoscunque integros.*

*Dem.* Sit

$$P = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.}$$

notum est, si

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \text{etc.}}{x^m + Ax^{m-1} + \text{etc.}}$$

in seriem infinitam formae

$$m\frac{1}{x} + \alpha\frac{1}{xx} + \beta\frac{1}{x^3} + \gamma\frac{1}{x^4} + \text{etc.}$$

evolvatur, fore $\alpha$ summam radicum aequationis $P=0$, $\beta$ summam quadratorum etc. Unde sine labore deducitur, potestatum $\nu+1$, $\nu+2$ etc.$^{\text{tarum}}$ summam congruam esse summae radicum, quadratorum etc. Hinc vero nisi modulus est aequalis aut inferior numero dimensionum functionis $P$, sequitur esse

$$(P,\ \rho^{\nu+1})\equiv P,\quad (P,\rho^{\nu+2})\equiv (P,\ \rho^2),\quad (P,\ \rho^{\nu+3})\equiv (P,\ \rho^3) \text{ etc.}$$

Istum autem casum infra considerabimus.

355.

Theorema. *Si in serie*

$$(P,\ \rho^0),\ (P,\ \rho)\ (P,\ \rho^2),\ (P,\ \rho^3)\ \text{etc.}$$

*post terminum* $\nu^{tum}$ *sequentes primis deinceps sunt congrui,* $x^\nu-1$ *per* $P$ *dividi poterit, siquidem* $P$ *nullum factorem pluries contineat.*

*Dem.* Posito $\frac{dP}{dx}=Q$, erit $Q$ functio ad $P$ prima. Sit

$$\frac{Q}{P}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{xx}+\frac{C}{x^3}+\text{etc.}$$

tum post terminum $\frac{N}{x^\nu}$ sequetur (hyp.)

$$\frac{A}{x^{\nu+1}}+\frac{B}{x^{\nu+2}}+\frac{C}{x^{\nu+3}}+\text{etc.}$$

Quare erit

$$\frac{Q}{P}\equiv\frac{Ax^{\nu-1}+Bx^{\nu-2}+\text{etc.}}{x^\nu-1}$$

unde patet, functionem $x^\nu-1$ per $P$ dividi posse. Q. E. D.

356.

Theorema. *Si* $P$ *sit functio ipsius* $x$ *prima* $m$ *dimensionum et* $X$ *functio ipsorum* $x,\ x^p,\ x^{pp},\ x^{p^3}\ldots x^{p^{m-1}}$, *in quam omnes hae quantitates aequaliter ingrediantur, i.e. quae eadem maneat, quomodocunque eae inter se permutentur, functio* $X$ *per* $P$ *divisa dabit residuum, quod erit numerus.*

*Dem.* Sit residuum

$$\equiv Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+N\equiv\xi$$

omnes coëfficientes $A, B, C\ldots$ usque ad $N$ exclusive erunt $\equiv 0$. Hoc ita demonstratur. Quum $X-\xi$ per $P$ dividatur, etiam $X^p-\xi^p$ per $P$ dividi pote-

rit. Sed facile perspicitur, $X^p$ esse id, quod fit $X$, si pro $x$ ponatur $x^p$, pro $x^p$, $x^{pp}$ etc. . . et pro $x^{p^{m-1}}$, $x^{p^m}$ seu quod idem est $x$. Hinc patet, esse $X^p \equiv X$ (mod. $P$); quare, quum $X^p \equiv \xi^p$ et $X \equiv \xi$ (mod. $P$), erit etiam $\xi^p \equiv \xi$ (mod. $P$) seu

$$\xi^p - \xi \equiv 0 \text{ (mod. } P)$$

At $\xi^p - \xi$ secundum modulum $p$ congruum est producto ex $\xi$, $\xi+1$, $\xi+2$, . . usque ad $\xi+p-1$, qui factores omnes ad $P$ primi erunt, nisi $\xi$ sit simpliciter numerus. Quare etiam $\xi^p - \xi$ alio modo per $P$ divisibilis non erit. Q. E. D.

Huiusmodi functiones sunt summa omnium, summa quadratorum, cuborum etc., summa productorum e binis, ternis etc. Quis vero sit ille numerus, per § sq. determinabimus.

357.

Theorema. *Sit functio prima § praec.*

$$P \equiv x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + etc.$$

*erit residuum, si summa quantitatum* $x$, $x^p$ *etc.* $x^{p^{m-1}}$ *per* $P$ *dividatur,* $\equiv A$, *si summa productorum e binis,* $\equiv B$, *si summa productorum e ternis,* $\equiv C$ *etc.*

*Dem.* Sint functiones illae $X$, $Y$, $Z$ etc. earumque residua ordine suo numeri $A'$, $B'$, $C'$ etc. Iam facile intelligitur, esse $x$, $x^p$, $x^{pp}$ etc. radices aequationis

$$z^m - Xz^{m-1} + Yz^{m-2} - Zz^{m-3} + \text{etc.} = 0$$

Quare erit ponendo $z = x$

$$x^m - Xx^{m-1} + Yx^{m-2} - Zx^{m-3} + \text{etc.} = 0$$

Sed functiones $X - A'$, $Y - B'$, $Z - C'$ etc. per $P$ dividi possunt, quare etiam functio

$$x^m - A'x^{m-1} + B'x^{m-2} - C'x^{m-3} + \text{etc.}$$

Hoc autem aliter fieri nequit, nisi sit $A' \equiv A$, $B' \equiv B$, $C' \equiv C$ etc. Q. E. D.

Ceterum notum est, quaecunque alia functio sit $X$ ipsorum $x$, $x^p$ etc. [in quam omnes hae quantitates aequaliter ingrediantur,] eam semper ex his deduci posse. Ita erit .

$$x^2 + x^{2p} + x^{2pp} + \text{etc.} \equiv AA - 2B \,(\text{mod. } P) \text{ etc. etc.}$$

Exempl. Sit $p = 5$ et $P \equiv x^2 + 2x + 3$; erit functio $x + x^5$ per $P$ divisa $\equiv -2$, $x^6 \equiv 3$ etc. etc.

## 358. 359.

Theorema. *Sit $P$ functio prima et $x^\nu$ infima potestas ipsius $x$, quae per $P$ divisa dat residuum* 1; *porro sit $P \equiv (P, \rho^n)$, erit $n$ alicui numeri $p$ potestati secundum $\nu$ congruus.*

*Dem.* Supra ostendimus, si $P$ sit

$$= x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.}$$

fore

$$z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \text{etc.} - (z - x)(z - x^p) \,..\, (z - x^{p^{m-1}})$$

per $P$ divisibilem. Simili modo sequeretur esse

$$z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \text{etc.} - (z - x^n)(z - x^{np}) \,..\, (z - x^{np^{m-1}})$$

per $P$ divisibilem. Quoniam autem hi factores inter se sunt primi, necessario singuli singulis secundum $P$, $p$ congrui esse debent. Quare $z - x^n$ debet esse $\equiv z - x^{p^x}$ i. e. $p^x \equiv n \,(\text{mod. } \nu)$. Q. E. D.*)

*De inventione divisorum primorum functionis $x^\nu - 1$ secundum modulum primum.*

## 360.

Si $\nu$ per modulum $p$ seu per aliquam eius potestatem est divisibilis, sit $\nu = p^k\lambda$, eritque

$$x^\nu - 1 \equiv (x^\lambda - 1)^{p^k} \,(\text{mod. } p).$$

Unde manifestum est, eum tantummodo casum considerari oportere, ubi $\nu$ per $p$ non dividitur.

*) Si $(P, \rho^a) \equiv (P, \rho^b) \,(\text{mod. } p)$ erit $a \equiv p^x b \,(\text{mod. } \nu)$.

*Demonstratio.* Sit $z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \,..\, = \Pi$ erit $(\Pi, \rho^a) \equiv (\Pi, \rho^b) \,(\text{mod. } P)$; est autem $(\Pi, \rho^a) \equiv (z - x^a)(z - x^{ap})(z - x^{app}) \,..\, (z - x^{ap^{m-1}})$, $(\Pi, \rho^b) \equiv (z - x^b)(z - x^{bp})(z - x^{bpp}) \,..\, (z - x^{bp^{m-1}})$ unde patet propositio.

Productum ex $\Pi$, $(\Pi, \rho^2)$, $(\Pi, \rho^3)$ etc. $(\Pi, \rho^\nu)$ est $\equiv (z^\nu - 1)^m \,(\text{mod. } P)$; est enim

$$(z - x)(z - x^2)(z - x^3) \ldots (z - x^\nu) \equiv (z - x^p)(z - x^{2p})(z - x^{3p}) \,..\, (z - x^{\nu p}) \equiv \text{etc.} \equiv z^\nu - 1$$

In serie $P$, $(P, \rho^2)$, $(P, \rho^3)$ etc. ... $(P, \rho^\nu)$ omnes divisores primi functionis $x^\nu - 1$ occurrunt, et quidem quisque $m$ vicibus. Inde patet, productum ex omnibus esse $\equiv (x^\nu - 1)^m$.

Si $p^m \equiv 1$ (mod. $\nu$) et quidem $m$ quam minimus, tum patet $x^{p^m-1}-1$ per $x^\nu-1$ dividi posse. Quamobrem $x^\nu-1$ alios divisores habere nequit quam $x^{p^m-1}-1$. At haecce expressio habet divisores primos $m$ dimensionum aliosque, quorum dimensionum numerus est divisor numeri $m$. Tales igitur etiam $x^\nu-1$ habebit. Quot autem cuiusvis generis habeat, per exemplum declaramus, unde facile lex generalis deduci poterit.

Sit $\nu = 63$ et $p = 13$, erit $m = 6$. Quare $x^{63}-1$ secundum modulum 13 factores primos habebit sex, trium, duarum dimensionum uniusque. Iam palam est, productum ex factoribus unius dimensionis fore divisorem communem (maximae dimensionis) functionum $x^{63}-1$ et $x^{12}-1$ i. e. $x^3-1$; quare tres erunt factores primi unius dimensionis. Productum ex omnibus factoribus primis duarum dimensionum uniusque erit divisor communis functionum $x^{63}-1$ et $x^{168}-1$ i. e. $x^{21}-1$; quare erunt $\frac{21-3}{2}$ sive 9 factores duarum dimensionum. Productum ex factoribus primis trium dimensionum uniusque erit divisor communis functionum $x^{63}-1$ et $x^{2196}-1$ i. e. $x^9-1$; quare erunt $\frac{9-3}{3}$ i. e. 2 divisores trium dimensionum. Tandem reliqui erunt sex dimensionum, quorum igitur numerus $= \frac{63-6-18-3}{6}$ i. e. 6.

Facile per attentam huius rei ponderationem sequens regula generalis deducitur:

*Sit $\delta$ divisor ipsius $m$, sint omnes numeri $\delta$ divisores ipso $\delta$ minores $\delta', \delta'', \delta'''$ etc. Sint divisores communes maximi ipsius $\nu$ cum $p^{\delta'}-1$, $p^{\delta''}-1$, $p^{\delta'''}-1$ etc. respective $\mu, \mu', \mu''$ etc., sit $\frac{\mu}{\mu'}, \frac{\mu}{\mu''}, \frac{\mu}{\mu'''}$ etc. $= \lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. habebitque $x^\nu-1$ $\frac{1}{\delta}$ ties tot divisores primos $\delta$ dimensionum, quot infra numerum $\mu$ sunt numeri per nullum numerorum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. divisibiles.*

361.

Theorema. *Si functio $X$ indeterminatae $x$ per aliam $\xi$ dividi possit et $X$ si pro $x$ scribatur $x^k$, transeat in $X'$, $X'$ per $(\xi, \rho^{\frac{1}{k}})$ dividi poterit.*

*Dem.* Sit $X \equiv \xi\upsilon$ transeantque $\xi, \upsilon$ in $\xi', \upsilon'$, si pro $x$ scribatur $x^k$. Patet, fore $X' \equiv \xi'\upsilon'$. At $\xi'$ per $(\xi, \rho^{\frac{1}{k}})$ dividi potest. Quare etiam $X'$. Q. E. D.

362.

His principiis positis facili negotio divisores primos functionis $x^\nu-1$ determinare possumus. Supponimus, omnes eos divisores, qui etiam functionem ali-

quam $x^{\nu'}-1$ dividunt, existente $\nu'<\nu$, iam inventos esse, reliquosque investigare proponi. Hi autem omnes in hac expressione comprehendi possunt $(P, \rho^k)$, si $P$ sit unus ex ipsis et pro $k$ omnes numeri minores quam $\nu$ ad ipsumque primi substituantur.

In Cap. VI ostendimus, quomodo radices primae aequationis $x^\nu = 1$ ita in classes discerpi possint, ut, omnibus per alicuius potestates expressis, eadem in classes distributio habeatur, quaecunque radix prima pro hac basi accipiatur; *periodos* huiusmodi radicum complexus vocavimus. Iam patet, functiones $x$, $x^\alpha$, $x^\beta$, $x^\gamma$ etc., designantibus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. omnes numeros ad $\nu$ primos, simili modo in periodos resolvi posse, quamque periodum maiorem rursus in minores donec tandem ad periodos formae $x^k$, $x^{kp}$, $x^{kpp}$ . . . $x^{kp^{m-1}}$ perveniatur. Hoc ita facto patet

1° Quoniam periodus quaeque ex huiusmodi periodis minimis $x^k + x^{kp} +$ etc. composita est, si per quamcunque functionem primam $m$ dimensionum dividatur, residuum fore numerum.

2°. Quum omnes periodi termini semper ad hanc formam reduci queant $x^{\varkappa . a^\alpha b^\beta c^\gamma} \cdot \cdot$, ubi $\varkappa$, $a$, $b$, $c$ . . sunt numeri determinati, pro $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ . . autem omnes valores substitui possunt; patet, periodum in se ipsam mutari, si pro $x$ substituatur $x^k$ et $k$ sit formae $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ . . (mod. $\nu$), unde facile perspicitur omnes functiones $P$, $(P, \rho^k)$ etc., designante $k$ huiusmodi numerum, si periodus per eas dividatur, idem residuum dare.

3°. Quare periodus subducto tali residuo per productum ex omnibus functionibus $(P, \rho^k)$ dividi poterit.

363.

Summa rei in hoc vertitur, ut haec residua determinentur. Primo quaeratur residuum, quod periodus maxima per productum ex omnibus functionibus primis idoneis dabit. Si hoc productum sit

$$\equiv x^\lambda - Ax^{\lambda-1} + \text{ etc.}$$

erit residuum hoc $\equiv A$. Huius autem producti forma facile invenitur et ex Cap. VI sequitur esse $A = 0$, si $\nu$ per quadratum dividi possit, contra esse $A$ aut $= +1$ aut $= -1$, prout multitudo factorum primorum numeri $\nu$ sit par aut impar.

Iam resolvatur haec periodus maxima in periodos inferiores repraesententurque periodi cuiusvis termini per $x^{kp^\alpha u}$, ita ut $k$ in quavis periodo sit numerus

determinatus, pro diversis vero variabilis, $\pi$ et $u$ autem in quavis periodo variabiles, eos autem valores, quos in aliqua periodo habent, etiam in reliquis adipisci possint. Supponatur aliquantisper aliqua functio prima $P$ pro basi sitque residuum, quod periodi $\Sigma x^{p^\pi u}$, $\Sigma x^{k'p^\pi u}$ etc. per eam divisae praebent respective $A$, $A'$ etc., erit $\Sigma x^{p^\pi u} - A$ per productum ex omnibus functionibus $(P, \rho^u)$ divisibilis, $\Sigma x^{k'p^\pi u} - A'$ per productum ex omnibus functionibus $(P, \rho^{k'u})$ etc. etc. At facile liquet, quantitates $A$, $A'$ etc. esse radices congruentiae datae. Scilicet sint periodi radicum aequationis $x^\nu = 1$ periodis praecedentibus correspondentes radices aequationis $Q = 0$, erunt $A$, $A'$ etc. radices congruentiae $Q \equiv 0$. Namque erit

$$A + A' + \text{etc.} \equiv \text{summae periodorum},$$
$$AA + A'A' + \text{etc.} \equiv \text{summae quadratorum periodorum}$$

etc. etc. Calculus enim prorsus similis erit ei, quem Cap. VI exposuimus, si pro $\rho$ substituatur $x$, quoniam etiam hic poni potest pro $x^\nu$ unitas, uti illic pro $\rho^\nu$.

Inventis radicibus $A$, $A'$ etc. aliqua pro residuo periodi $\Sigma x^{p^\pi u}$ eligatur et inde reliquarum residua simili modo uti Cap. VI ordinentur. Namque illud etiam hic arbitrio relinquitur, quum functio $P$ sit prorsus hactenus indeterminata. Calculus sequens omnino analogus est ei, quem Cap. VI pertractavimus, singula exponere nimis prolixum nobis foret. Tandem postquam ad $\Sigma x^{p^\pi}$ perventum est, rei summa perfecta est. Namque posito

$$P \equiv x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \text{etc.}$$

erit $-a \equiv \Sigma x^{p^\pi}$, eodem modo coëfficiens secundus reliquarum functionum $(P, \rho^k)$ habebitur, unde reliqui ipsius $P$ determinari possunt. Saepius evenire potest, ut ad congruentias identicas perveniatur, ex quibus nihil derivari posse videtur. Quomodo huic difficultati obveniri possit, infra monstrabitur.

364.

Omnia haec per exemplum multo clariora fient. Resolvenda proponitur functio $x^{15} - 1$ secundum modulum 17 in factores. Erit $m = 4$ et quoniam productum ex omnibus functionibus elementaribus

$$\equiv \frac{x^{15}-1 \cdot x-1}{x^5-1 \cdot x^3-1} \equiv x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$$

Quare duo tantummodo erunt factores primi quatuor dimensionum $P$ et $P'$. Iam $x$, $xx$, $x^4$, $x^7$, $x^8$, $x^{11}$, $x^{13}$, $x^{14}$ in has duas periodos distribuantur

$$\Sigma x^{17^a} \equiv x + xx + x^4 + x^8, \quad \Sigma x^{7 \cdot 17^a} \equiv x^7 + x^{11} + x^{13} + x^{14}$$

Sit secundum alteram functionem $P$, $P'$

$$\Sigma x^{17^a} \equiv A, \quad \Sigma x^{7 \cdot 17^a} \equiv A'$$

eritque

$$A + A' \equiv 1$$
$$AA \equiv \Sigma x^{2 \cdot 17^a} + \Sigma x^{3 \cdot 17^a} + \Sigma x^{5 \cdot 17^a} + \Sigma x^{9 \cdot 17^a}$$
$$A'A' \equiv \Sigma x^{14 \cdot 17^a} + \Sigma x^{6 \cdot 17^a} + \Sigma x^{5 \cdot 17^a} + \Sigma x^{3 \cdot 17^a}$$

quare

$$AA + A'A' \equiv \Sigma x^{17^a} + \Sigma x^{7 \cdot 17^a} + 4 \Sigma x^{3 \cdot 17^a} + 2 \Sigma x^{5 \cdot 17^a} \equiv 1 - 4 - 4 \equiv -7$$

Hinc $A$ et $A'$ erunt radices congruentiae

$$xx - x + 4 \equiv 0 \text{ (mod. 17)}$$

quae sunt 6, 12. Hinc $P$ dividet

$$x^8 + x^4 + xx + x - 6$$

eritque

$$\equiv x^4 - 6x^3 - 2xx - 12x + 1$$

$P'$ autem erit $\equiv (P, \rho^7)$ eritque

$$\equiv x^4 - 12x^3 - 2xx - 6x + 1$$

365.

Sufficit nobis hic possibilitatem solutionum harum monstravisse. Multa artificia, quibus hae operationes sublevari possunt, praeterimus brevitatis gratia. At consequentias quasdam pergraves praetermittere non possumus.

Per praecedentia demonstratum est, omnes aequationes auxiliares pro solutione aequationis $x^\nu = 1$, si in congruentias convertantur, habere radices possibiles, quando periodus

$$x + x^p + x^{pp} + \ldots + x^{p^{m-e}}$$

nondum est disiuncta. Subsistamus in casu, ubi $\nu$ est numerus primus; erit $m$ divisor ipsius $\nu - 1$. Hic itaque congruentiae auxiliares, si numerus periodorum, quae per illas inveniuntur, est pars aliquota numeri $\frac{\nu-1}{m}$, habebunt radices reales. Si itaque $\frac{\nu-1}{m}$ est par i. e. si $m$ est divisor numeri $\frac{\nu-1}{2}$ seu si $p^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1$ (mod. $\nu$) seu si $p$ est residuum quadraticum numeri primi $\nu$, aequatio quadratica, per quam radices in duas periodos dividuntur, habebit radices reales secundum modulum $p$. At in Cap. VI monstravimus hanc aequationem posito $\nu = 4n \pm 1$ semper esse $xx + x \mp n = 0$. Quare habetur insigne

THEOREMA. *Si numerus primus $p$ est residuum quadraticum numeri primi $4n \pm 1$, congruentia*

$$xx + x \mp n \equiv 0 \ (mod. p)$$

*habebit radices reales, adeoque etiam congruentia*

$$4xx + 4x \mp 4n \equiv 0 \quad seu \quad (2x+1)^2 \mp \nu \equiv 0$$

*i. e.* $\pm \nu$ *erit residuum quadraticum numeri* $p$.

366.

Haec igitur est tertia theorematis fundamentalis Capitis IV completa demonstratio, eo magis attentione digna, quod principia, e quibus est petita, ab iis quibus ad priores usi sumus, prorsus sunt diversa. At ex eodem hoc fonte, sed via opposita quartam deducamus. Scilicet sit $\nu$ numerus primus formae $4n \pm 1$, $p$ alius primus quicunque, sitque $\pm \nu$ residuum quadraticum numeri primi $p$, demonstrabimus, $p$ fore residuum quadraticum numeri $\nu$.

Sit $p^m$ minima potestas numeri $p$, quae sit $\equiv 1$ (mod. $\nu$). Divisores elementares functionis $\frac{x^\nu - 1}{x-1}$ secundum $p$ habebunt $m$ dimensiones, quare omnium numerus erit $= \frac{\nu-1}{m}$. Iam quoniam $\pm \nu R p$, congruentia

$$xx + x \mp n \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$$

erit resolubilis; sint radices $A$, $A'$. Distribuantur functiones $x, xx, \ldots x^{\nu-1}$ in binas classes per $\xi$, $\xi'$ designandas, erit

$$\xi+\xi' \equiv A+A'+(1+x+xx+\ldots+x^{\nu-1})$$
$$\xi\xi' \equiv AA'+\lambda(1+x+xx+\ldots+x^{\nu-1})$$

quare

$$(z-\xi)(z-\xi')-(z-A)(z-A')$$

per quemvis divisorem elementarem functionis $\frac{x^\nu-1}{x-1}$ erit divisibilis. Hinc autem quivis horum divisorum elementarium aut $\xi-A$ et $\xi'-A'$, aut $\xi-A'$ et $\xi'-A$ dividet. Hinc patet (quoniam $A$ non $\equiv A'$), si pro $x$ ponatur $x^p$, $\xi$ et $\xi'$ non immutari. Si enim $\xi$ in $\xi'$ et vice versa transiret, $\xi-A$ et $\xi-A'$ per eandem functionem primam dividerentur. Q. E. A. Hinc denique sequitur, $\frac{\nu-1}{2}$ per $m$ dividi seu $p^{\frac{\nu-1}{2}}-1$ per $\nu$. Quare $p$ erit residuum quadraticum ipsius $\nu$. Q. E. D.

Facile autem est omnes theorematis fundamentalis casus ex utroque theoremate derivare.

367.

Quamvis ad casum, ubi $\nu$ est numerus primus, hic nos restrinxerimus, tamen etiam, si $\nu$ sit compositus, theoremata analoga haud magno negotio determinari possunt, quod fusius exponere brevitatis gratia nunc non licet.

Manifestum est, similes observationes etiam de maiori periodorum multitudine formari posse. Ita si $\frac{\nu-1}{m}$ per 3 dividitur i. e. si $p$ est residuum cubicum numeri primi $\nu$, aequatio, per quam radices aequationis $x^\nu=1$ in tres periodos distribuuntur quamque in Cap. VI a priori determinandam docuimus, solubilis erit secundum modulum $p$ et vice versa. Ita ex. gr. congruentia $x^3+xx-2x-1\equiv 0$ secundum modulum primum quemcunque, qui est formae $7n\pm1$, resolvi potest, si vero aliam formam habeat, non poterit.

Non difficile nobis foret hoc Caput multis aliis observationibus locupletare, nisi limites, intra quos restringi oportet, vetarent. Iis qui ulterius progredi amant, haec principia viam saltem addigitare poterunt.

368.

Congruentiam aliquam $X\equiv 0$ radices seu generalius divisores *aequales* habere dicimus, si per functionis alicuius potestatem dividi possit.

Num congruentia proposita divisores aequales habeat, eodem modo diiudicatur, uti in aequationum theoria. Ponamus

$$X \equiv \xi^m P$$

patet fore

$$\frac{dX}{dx} \equiv \xi^{m-1}\left(mP\frac{d\xi}{dx} + \xi\frac{dP}{dx}\right)$$

quare $\frac{dX}{dx}$ per $\xi^{m-1}$ dividetur. Generaliter sit

$$X \equiv A^a B^b C^c \text{ etc.}$$

ubi $A$, $B$, $C$ etc. denotant functiones primas diversas, erit

$$\frac{dX}{dx} \equiv X\left(\frac{a\,dA}{A\,dx} + \frac{b\,dB}{B\,dx} + \frac{c\,dC}{C\,dx} + \text{etc.}\right)$$

unde patet, nisi aliquis numerorum $a$, $b$, $c$ etc. per modulum dividatur, $\frac{dX}{dx}$ per $A^{a-1}\,B^{b-1}\,C^{c-1}$ etc. dividi posse, non autem per $A^a$, $B^b$, $C^c$ etc. Hinc sequitur

Theorema. *Si functionum $X$ et $\frac{dX}{dx}$ divisor communis maximae dimensionis sit $\xi$, omnes factores primos, quos $\xi$ habet, etiam $X$ habebit et quidem quemvis toties $+1$ vice quoties $\xi$, si igitur $X$ et $\frac{dX}{dx}$ sint functiones inter se primae, $X$ nullos factores aequales habebit.*

369.

Exemplum I. Quaeritur an functio

$$x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 3x - 4 \ldots (X)$$

secundum modulum 17 divisores aequales habeat. Erit

$$\frac{dX}{dx} \equiv 5x^4 - 5x^3 - xx + 3$$

Hinc invenitur, functiones $X$ et $\frac{dX}{dx}$ inter se esse primas, quare $X$ divisores aequales non habet.

Exemplum II. Sit

$$X \equiv x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 4xx + 2x - 3 \pmod{13}$$

erit

$$\frac{dX}{dx} \equiv 5x^4 - 2x^3 + 4xx + 5x + 2$$

maxima vero functionum $X$, $\frac{dX}{dx}$ communis mensura $\equiv 5xx + 7x + 7$ seu mul-

tiplicata per 8: $xx+4x+4$; at qnum hic divisor sit $\equiv (x+2)^2$, functio $X$ per $(x+2)^3$ dividi poterit quotiensque (qui est $xx+11$) nullum amplius divisorem duplicem involvit.

370. 371.

Si ex §.§. praecc. functio $X$ ita est exhibita $A^a B^b C^c$ etc., ita ut $A, B, C$ etc. inter se sint primae et numeri $a, b, c$ etc. inaequales, resolutio etiam ulterius extendi potest. Sit itaque $X$ functio, quae nullos amplius divisores aequales involvit. Supra vidimus, $x^p - x$ esse productum ex omnibus functionibus primis unius dimensionis. Sit $\xi$ divisor communis maximae dimensionis functionum $X$ et $x^p - x$, erit $\xi$ productum ex omnibus divisoribus ipsius $X$ unius dimensionis, et $\frac{X}{\xi}$ huiusmodi divisores non amplius habebit. Quodsi autem inveniatur, functiones $X$ et $x^p - x$ esse inter se primas, $X$ nullum divisorem unius dimensionis habebit adeoque congruentia $X \equiv 0$ radices reales non habebit. Porro quoniam $x^{pp} - x$ est productum ex omnibus functionibus primis duarum dimensionum uniusque, divisor communis maximae dimensionis functionum $x^{pp} - x$ et $\frac{X}{\xi}$, $\xi'$ involvet omnes divisores ipsius $X$, qui sunt duarum dimensionum. Hinc ulterius progrediendo perspicitur, $X$ hoc modo in factores $\xi, \xi', \xi''$ etc. resolvi, qui continent respective omnes divisores unius, duarum, trium etc. dimensionum.

372.

Si autem productum ex pluribus functionibus primis eiusdem dimensionis datum est, singulae functiones tentando erui debebunt. Magnam analogiam habet hoc problema cum eo, quod numerorum compositorum factores quaerere iubet. Hic vero iam a priori determinatur, an functio proposita in factores adhuc discerpi possit. Quum et hic factorum omnium possibilium multitudo sit finita, simili subsidio ut supra uti possumus. Sed huic rei inhaerere nolumus, nam calculator exercitatus principia probe assecutus, quando opus est, facile artificia particularia reperiet.

Progredimur ad aliud caput, scilicet ad considerationem congruentiarum, si modulus non est numerus primus, uti hactenus semper supposuimus. Praesertim vero hic ille casus attentione dignus est, ubi modulus est numeri primi potestas, tum per se tum quod ad aliqua dubia removenda (§.§. . .) necessarius sit.

373.

Problema. *Si functio $X$ secundum modulum $p$ in factores inter se primos $\xi$, $\xi'$, $\xi''$ etc. sit resoluta, $X$ secundum modulum $pp$ in similes factores $\Xi$, $\Xi'$, $\Xi''$ etc. resolvere ita, ut sit*

$$\xi \equiv \Xi,\quad \xi' \equiv \Xi',\quad \xi'' \equiv \Xi'', \text{ etc. } (\text{mod. } p)$$

*Sol.* Sit $X \equiv \xi\psi\,(\text{mod. } p)$ seu $X = \xi\psi + p\Sigma$. Ponatur

$$\Xi = \xi + p\varphi,\quad \Psi = \psi + p\omega$$

erit

$$\Xi\Psi = X - p\Sigma + (\varphi\psi + \xi\omega)p + pp\varphi\omega$$

Si igitur $\Xi\Psi$ esse debet $\equiv X(\text{mod. } pp)$, necessario debet esse $\varphi\psi + \xi\omega - \Sigma$ per $p$ divisibilis. At cum $\psi$ et $\xi$ secundum modulum $p$ sint functiones inter se primae, $\varphi$ et $\omega$ ita determinari poterunt, ut haec conditio adimpleatur (§. 336), et quidem insuper ita, ut dimensiones ipsarum $\varphi$ et $\omega$ sint respective unitate minores dimensionibus functionum $\xi$, $\psi$. Hinc erit $X \equiv \Xi\Psi\,(\text{mod. } pp)$. Patet, simili modo $\Psi$ rursus in factores $\Xi'\Omega$ discerpi posse, ita ut alter $\Xi'$ sit $\equiv \xi'$ (mod. $p$) et ita porro, unde tandem

$$X \equiv \Xi\,\Xi'\,\Xi'' \text{ etc. } (\text{mod. } pp). \quad \text{Q. E. Fac.}$$

374.

Facile hinc probari potest, functionem $X$ etiam secundum modulos $p^3$. $p^4$ etc. in factores resolvi posse. Generaliter sit

$$X \equiv PQ\,(\text{mod. } p^m) \text{ seu } X = PQ + p^m R$$

et functio $P$ ad ipsam $Q$ prima secundum modulum $p$; posito

$$P' = P + Ap^m,\quad Q' = Q + Bp^m$$

erit

$$P'Q' = X - p^m R + (AQ + BP)p^m + ABp^{2m}$$

Hinc pro quovis modulo $p^\nu$ ($\nu$ existente $> m$ et $< 2m+1$) erit

$$P'Q' \equiv X,\quad \text{si}\quad R \equiv AQ + BP\,(\text{mod. } p^{\nu-m})$$

Ex his perspicitur, si functio $X$ aequales non habeat divisores secundum modulum $p$, eam secundum modulum $p^k$ similiter in factores discerpi posse, uti secundum modulum $p$. At si $X$ divisores aequales habeat, res fit multo magis complicata neque adeo ex principiis praecedentibus prorsus exhauriri potest. Quare quum quae huc pertineant cuncta communicare non possimus, unicum casum tantummodo considerabimus, qui plurimum occurrit cuiusque enodatio ad quaedam in praecedentibus dubia solvenda requiritur. Hic est, si factores aequales unius dimensionis tantum respiciantur. Hic proprie etiam ad congruentiarum radices inveniendas adhiberi potest. Generaliter alia occasione hanc rem pertractabimus.

375.

Sit igitur $X \equiv X'(x-a)^m \pmod{p}$ et functio $X'$ ad $x-a$ prima; desiderantur omnes divisores unius dimensionis huic $x-a$ secundum modulum $p$ congrui ipsius $X$ secundum modulos $pp, p^3$ etc. (Supponimus, functionem $X$ absolute per $x-a$ dividi non posse; alias enim $x-a$ secundum modulum quemcunque functionem $X$ divideret). Si substituatur $z+a$ pro $x$, habebitur

$$Z \equiv Z'z^m \pmod{p} \quad \text{seu} \quad Z = Z'z^m + pA$$

Iam si $Z$ secundum modulum $pp$ per aliquem divisorem formae $z+\alpha p$ dividi potest, necessario $A$ debet esse formae $zZ''+pB$. Nisi hoc sit, disquisitio iam est finita. Ponamus igitur

$$Z \equiv Z'z^m + pZ''z \pmod{pp} \quad \text{seu} \quad Z = Z'z^m + pZ''z + ppB$$

patetque, $Z$ per $z$ ac quemcunque alium divisorem huic secundum modulum $p$ congruum dividi posse;

Ut attentio fixetur, ponemus $m=4$, facile perspicietur, quemvis alium casum simili modo tractari posse. Iam si $Z$ secundum modulum $p^3$ per aliquem divisorem formae $z+\alpha p$ dividi potest, erit

$$0 \equiv -\alpha pp Z'' + ppB \pmod{z+\alpha p,\ p^3} \quad \text{seu} \quad \alpha Z'' \equiv B \pmod{z,\ p}$$

Iam tres casus esse possunt

1) si $Z'' \equiv 0 \pmod{z, p}$ et $B$ non $\equiv 0$, tunc patet, nullum ipsius $\alpha$ valorem congruentiae satisfacere adeoque $Z$ secundum modulum $p^3$ nullum divisorem formae $z+\alpha p$ habere. Quare disquisitio erit finita

2) si nec $Z''$ nec $B \equiv 0$ (modd. $z, p$); tunc $\alpha$ unicum valorem habebit, scilicet

$$\alpha \equiv \frac{B}{Z''} \text{ (modd. } z, p).$$

Quare erit unicus divisor $\equiv z + \alpha p$ (mod. $pp$) ipsius $Z$ secundum modulum $p^2$; eritque

$$Z \equiv V(z + \alpha p) + p^3 W$$

Iam ponatur divisor ipsius $Z$ (mod. $p^4$) $z + \alpha p + \mathfrak{6} pp$ eritque

$0 \equiv$

---

## BEMERKUNGEN ZUR ANALYSIS RESIDUORUM.

Die beiden vorstehenden Abhandlungen sind einem umfangreichen Manuscripte entnommen, welches den Titel Analysis Residuorum führt und vermuthlich aus dem Jahre 1797 oder 1798 stammt; durch eine gänzliche Umarbeitung sind aus demselben später die Disquisitiones Arithmeticae entstanden. Der vollständige Titel des Caput sextum lautet:

Solutio congruentiae $x^m - 1 \equiv 0$ et aequationis $x^m - 1 = 0$; cum dilucidationibus super theoria polygonorum regularium.

Der zweite Theil desselben (§§. 253—278) ist seinem wesentlichen Inhalte nach in die siebente Section der Disqq. Arithm. übergegangen.

Ausserdem ist noch zum Theil erhalten das Caput septimum. Variae quarundam investigationum praecedentium applicationes (§§. 279—302). Es zerfällt in folgende Unterabtheilungen:

De fractionum communium transmutationibus (§§. 279—281).

De fractionum communium in decimales conversione (§§. 282—292).

De resolutione aequationis indeterminatae $xx = a + by$ (§§. 292—297).

De resolutione aequationis indeterminatae $axx + byy = c$ (§§. 298—301).

De investigatione divisorum numerorum (§. 302; die folgenden Bogen fehlen).

Dies alles ist fast wörtlich in die sechste Section der Disqq. Arithm. aufgenommen.

Die beiden hier mitgetheilten Abschnitte behandeln die Gegenstände, welche, wie aus der Vorrede und den Artikeln 11, 44, 61, 62, 65, 84 der Disqq. Arithm. hervorgeht, den Inhalt der achten Section dieses Werkes bilden sollten. Es verdient indessen bemerkt zu werden, dass dieser Plan später wieder abgeändert ist; es findet sich nemlich unter den Manuscripten ein Fragment mit der Ueberschrift Sectio octava: Quarundam disquisitionum ad circuli sectionem pertinentium uberior consideratio. Dasselbe be-

ginnt mit Art. 367 und sollte also die Fortsetzung der Disqq. Arithm. bilden; die wenigen noch vorhandenen Artikel sind aber später ihrem Inhalte nach in die Abhandlung Summatio quarumdam serierum singularium übergegangen, und deshalb wird dieses Fragment von der gegenwärtigen Ausgabe ausgeschlossen.

In dem vorstehenden Abdruck der beiden Theile der Analysis Residuorum ist der Text des Originals im Wesentlichen treu beibehalten, obgleich dasselbe in formeller Beziehung nicht druckfertig zu nennen ist; in den folgenden Bemerkungen sind die wichtigsten Abänderungen bezeichnet, und zugleich einige Erläuterungen hinzugefügt.

§. 227. Vergl. Disqq. Arithm. artt. 61, 62.

§. 230. Vergl. Disqq. Arithm. artt. 53, 54, 65.

§. 231. Wenn $n = 2^\nu$ und $\nu \geqq 3$ ist, so existirt zwar keine Zahl $\rho$ von der angegebenen Art, aber die ganze Untersuchung wird hierdurch nicht wesentlich geändert.

§. 251. Vermuthlich sollte die hier bemerkte Schwierigkeit durch die Einführung höherer Potenzen von $p$ als Moduln beseitigt werden. Vergl. §§. 263, 372, 373.

§. 332. Die Voraussetzung, dass der Modulus eine Primzahl ist, wird bis §. 372 incl. beibehalten.

§. 338. Das unvollständige Citat kann auf Disqq. Arithm. art. 44 bezogen werden.

§§. 344—346. Von den beiden im Manuscript vorhandenen Beweisen ist hier der erste, welcher mit den Worten Iam demonstrare accingimur eingeleitet wird und sich auf eine nähere Untersuchung der Ausdrücke $(1^m 2^\theta 3^\varepsilon \ldots)$ gründet, nach der eigenen Vorschrift des Verfassers ganz unterdrückt ('Tota praecedens demonstratio una cum altera theorematis praec., quam adiicere mens erat, supprimenda erit, quoniam aliam infinities simpliciorem deteximus. Nititur ea huic fundamento'.); in dem obigen Abdruck ist ferner der zweite Beweis dadurch abgekürzt, dass die Entwicklung von $\frac{x\,\mathrm{d}P}{P\,\mathrm{d}x}$ statt derjenigen von $\frac{x\,\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ betrachtet wird, wodurch zugleich eine im Original enthaltene Beziehung auf den unterdrückten ersten Beweis umgangen wird.

§. 348. Der Ausdruck radix prima ist hier in derselben Bedeutung zu nehmen, wie der Ausdruck radix propria in der Abhandlung Summatio quarumdam serierum singularium art. 11. — Bei der Behauptung, dass die Coëfficienten $A', B' \ldots$ des entwickelten Productes ganze rationale Zahlen sind, wird auf das sechste Capitel verwiesen, in welchem aber die Theorie der Gleichung $x^\tau - 1 = 0$ nur für den Fall behandelt wird, dass $\tau$ eine Primzahl ist; die Form des Beweises in §. 349 führt zunächst auf folgende Ergänzung. Wird das entwickelte Product in die (für alle Wurzeln der Gleichung $\theta^\tau = 1$ geltende) Form

$$S = E + F\theta + \ldots + N\theta^{\tau-1}$$

gebracht, so sind die Coëfficienten $E, F \ldots N$ ganze rationale Functionen von $x$ mit ganzen rationalen Coëfficienten; da ferner das Product ungeändert bleibt, wann $\theta$ durch $\theta^k$ ersetzt wird, wo $k$ irgend eine relative Primzahl zu $\tau$ bedeutet, so gilt dasselbe von dem Ausdruck $S$, und hieraus ergibt sich ohne Schwierigkeit, dass alle diejenigen in $S$ enthaltenen Potenzen von $\theta$, deren Exponenten $s$ einen und denselben grössten gemeinschaftlichen Divisor mit $\tau$ haben, auch identische Coëfficienten haben müssen; da endlich eine jede Summe solcher Potenzen $\theta^s$ immer eine ganze Zahl ist, so leuchtet ein, dass der Ausdruck $S$, und folglich auch das in Rede stehende Product eine ganze Function von $x$ mit ganzen Coëfficienten ist, was zu zeigen war. Ebenso geht aus dieser Betrachtung zugleich die Richtigkeit der Bemerkung am Schlusse des Paragraphen hervor. Andere Gründe lassen indessen vermuthen, dass dem Verfasser schon damals das allgemeine Theorem über die Transformation der symmetrischen Functionen (Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem etc. art. 4) bekannt war, aus welchem sich die obigen Sätze als unmittelbare Folgerungen ergeben.

§. 352. Das Zeichen $R \equiv S\,(\text{mod. } P)$ oder auch $R \equiv S\,(\text{mod. } P, p)$ bedeutet hier und im Folgen-

den, dass die Differenz $R-S$ nach dem Modul $p$ den Divisor $P$ hat. — Das unvollständige Citat kann auf Disqq. Arithm. art. 49 bezogen werden.

§. 354. Durch Multiplication mit $x^\nu-1$ ergibt sich, dass die Summen gleich hoher Potenzen der Wurzeln der beiden Gleichungen $(P, \rho^{k\nu+t}) = 0, (P, \rho^t) = 0$ einander congruent sind (mod. $p$), und hieraus folgt die Congruenz $(P, \rho^{k\nu+t}) \equiv (P, \rho^t) (\text{mod.}\, p)$, sobald $m < p$ ist (vergl. §. 244); ist aber $m \geq p$, so lässt sich der Coëfficient der Potenz $x^{m-p}$ in einer Gleichung nicht mehr aus den gegebenen Potenzsummen ihrer Wurzeln nach dem Modul $p$ bestimmen, weil er in den hierzu dienenden Newton'schen Formeln mit dem Factor $p$ behaftet ist. In der That darf man aus der Congruenz je zweier gleich hoher Potenzsummen der Wurzeln der Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ allgemein nur folgern, dass $A \equiv \mathfrak{A}^p\mathfrak{C}$, $B \equiv \mathfrak{B}^p\mathfrak{C} (\text{mod.}\, p)$ ist, wo $\mathfrak{C}$ den grössten gemeinschaftlichen Divisor der beiden Functionen $A, B$ nach dem Primzahl-Modulus $p$ bezeichnet, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aber ganz unbestimmte Functionen sind. Es ist zu vermuthen, dass der Verfasser die Allgemeingültigkeit des Satzes aus der Theorie der Transformation der symmetrischen Functionen und speciell aus dem folgenden Satze abgeleitet hat: Ist in Bezug auf einen beliebigen Modulus $p$ die Differenz $R(x)-S(x)$ theilbar durch die Function $P(x)$, und sind $a, b, c, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $P(x) = 0$, so sind die Functionen

$$(x-R(a))(x-R(b))(x-R(c)) \ldots \quad \text{und} \quad (x-S(a))(x-S(b))(x-S(c)) \ldots$$

einander nach dem Modul $p$ congruent.

§. 355. Es wird in §. 363 gezeigt, dass $P$ und $\frac{dP}{dx}$ keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, wenn $P$ keinen Factor mehr als einmal enthält.

§§. 358, 359. Die unter den Text gesetzte Note ist einem einzelnen Blatt entnommen, welches wahrscheinlich den schon in der Handschrift gestrichenen §. 359 ersetzen sollte.

§. 360. In dem Ausdruck des Theorems ist eine Ungenauigkeit der Handschrift berichtigt.

§. 361. Hier bedeutet der Exponent $\frac{1}{k}$ in dem Zeichen $(\xi, \rho^{\frac{1}{k}})$ jede positive ganze Zahl $k'$ von der Beschaffenheit, dass $kk' \equiv 1 (\text{mod.}\, \nu)$ wird, wo $\nu$ die kleinste positive ganze Zahl ist, für welche $x^\nu-1$ durch $\xi$ nach dem Modul $p$ theilbar wird; hierbei ist vorauszusetzen, dass $\xi$ nicht durch $x$ theilbar nach dem Modul $p$, und ausserdem, dass $k$ relative Primzahl zu $\nu$ ist. Die Richtigkeit der Behauptung, dass $\xi'$ durch $(\xi, \rho^{\frac{1}{k}})$ theilbar ist (mod. $p$), ergibt sich aus §. 354.

§. 363. Die Schlussbemerkung bezieht sich vermuthlich auf die Einführung von Moduln, welche Potenzen der Primzahl $p$ sind; vergl. §§. 251, 372, 373.

§. 367. Die Wurzeln der Gleichung $x^3+xx-2x-1 = 0$ sind die zweigliedrigen Perioden, in welche die Wurzeln der Gleichung $\frac{x^7-1}{x-1} = 0$ zerfallen. Dasselbe Beispiel findet sich auch auf einem einzelnen Blatt, wo das Hauptresultat der §§. 362, 363 unter dem Titel 'der goldene Lehrsatz' ausgesprochen ist.

§. 371. Dieser Paragraph sollte ein Beispiel enthalten; doch ist dasselbe nicht ausgeführt.

R. Dedekind.

# DISQUISITIONUM CIRCA AEQUATIONES PURAS

## ULTERIOR EVOLUTIO.

1.

Quum methodus ea, per quam in *Disquiss. Arithm.* art. 360 aequationem $x^n - 1 = 0$ solvere docuimus, theoriam foecundissimam et gravissimam constituat, cuius prima tantum momenta in opere illo attingere licuit, gratum geometris fore speramus, si hoc argumentum denuo hic resumimus, quae breviter tantum partimque demonstrationibus suppressis adumbrata fuerant, uberius tractamus, et quae ex illo tempore accesserunt incrementa profundius persequimur.

Exponens $n$ supponitur esse numerus primus, numerusque $n-1$ in factores $\alpha \times \beta \times \gamma$ resolutus; porro designamus per $g$ aliquam radicem primitivam pro modulo $n$. Exhibeat $r$ indefinite radicem aequationis $x^n - 1 = 0$, atque $R$ indefinite radicem aequationis $x^\beta - 1 = 0$. Designando itaque peripheriam circuli, cuius radius $= 1$, per $P$, quantitatemque imaginariam $\sqrt{-1}$ per $i$, omnes radices aequationis $x^\beta - 1 = 0$, sive omnes valores ipsius $R$ exhibebuntur per formulam

$$\cos\frac{kP}{\beta} + i \sin\frac{kP}{\beta}$$

exprimente $k$ indefinite numeros integros $0, 1, 2, 3 \ldots \beta - 1$. Porro patet, omnes potestates cuiusvis radicis $R$ ipsas quoque esse radices, nec non, si $R$ fuerit radix valori ipsius $k$ ad $\beta$ primo respondens, omnes potestates $R^0, R, R^2, R^3 \ldots R^{\beta-1}$ inter se diversas esse, adeoque totum radicum complexum exhaurire; in hoc casu ipsam $R$ radicem *propriam* aequationis $x^\beta - 1 = 0$ dicemus; contra radix $R$ va-

lori ipsius $k$ ad $\sigma$ non primo respondens *impropria* vocabitur, nulloque negotio perspicitur, si $\delta$ fuerit divisor communis maximus numerorum $k$ et $\sigma$, fore $R^{\frac{\sigma}{\delta}} = 1$, omnes vero potestates $R^0, R, R^2, R^3 \ldots R^{\frac{\sigma}{\delta}-1}$ inter se diversas, adeoque $R$ radicem propriam aequationis $x^{\frac{\sigma}{\delta}} - 1 = 0$. Eadem de aequatione $x^n - 1 = 0$ valebunt, sed huius radices omnes necessario sunt propriae radice 1 excepta.

2.

His praemissis disquisitio nostra imprimis versabitur circa functiones huius formae, e $\sigma\gamma$ terminis conflatas

$$r + Rr^{g^\alpha} + R^2 r^{g^{2\alpha}} + R^3 r^{g^{3\alpha}} \ldots + R^{\sigma\gamma-1} r^{g^{\alpha\sigma\gamma-\alpha}}$$

quas compendii caussa per hunc characterem $[r, R]$ designabimus. Singuli termini talis expressionis sunt producta e potestatibus ipsius $r$ in potestates ipsius $R$; illarum exponentes progressionem geometricam constituunt, exponentes harum arithmeticam. Exponentes

$$1,\; g^\alpha,\; g^{2\alpha},\; g^{3\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\; g^{\alpha\sigma\gamma-\alpha}$$

omnes inter se incongrui sunt secundum modulum $n$, adeoque illae potestates ipsius $r$ inter se diversae; ulterius vero continuatae eandem seriem denuo inciperent, quum sit $g^{\alpha\sigma\gamma} \equiv 1 \pmod{n}$, adeoque $r^{g^{\alpha\sigma\gamma}} = r$. Factores alteri autem

$$1,\; R,\; R^2,\; R^3 \;.\;.\;.\;.\; R^{\sigma\gamma-1}$$

constituunt $\gamma$ periodos aequales, quum sit $R^\sigma = 1$, $R^{\sigma+1} = R$ etc. Hinc patet, functionem $[r, R]$ ita quoque exhiberi posse

$$\begin{aligned}
& r + r^{g^{\alpha\sigma}} + r^{g^{2\alpha\sigma}} \ldots\ldots + r^{g^{\alpha\sigma\gamma-\alpha\sigma}} \\
+ R\; & (r^{g^\alpha} + r^{g^{\alpha\sigma+\alpha}} + r^{g^{2\alpha\sigma+\alpha}} \ldots\ldots + r^{g^{\alpha\sigma\gamma-\alpha\sigma+\alpha}}) \\
+ R^2\; & (r^{g^{2\alpha}} + r^{g^{\alpha\sigma+2\alpha}} + r^{g^{2\alpha\sigma+2\alpha}} \ldots\ldots + r^{g^{\alpha\sigma\gamma-\alpha\sigma+2\alpha}}) \\
+ \text{etc.} & \\
+ R^{\sigma-1} & (r^{g^{\alpha\sigma-\alpha}} + r^{g^{2\alpha\sigma-\alpha}} + r^{g^{3\alpha\sigma-\alpha}} \ldots\ldots + r^{g^{\alpha\sigma\gamma-\alpha}})
\end{aligned}$$

sive introducendo signum art. 343 Disq. Ar.

$$[r, R] = (\gamma, 1) + R(\gamma, g^\alpha) + R^2(\gamma, g^{2\alpha}) \ldots + R^{\sigma-1}(\gamma, g^{\alpha\sigma-\alpha})$$

3.

Si pro radice $r$ unitatem accipimus, habemus

$$[1, R] = 1 + R + R^2 + R^3 \ldots + R^{\beta\gamma-1} = \gamma(1 + R + R^2 + R^3 \ldots + R^{\beta-1})$$

huius valor erit $= \beta\gamma$, si etiam pro $R$ accipitur radix 1, sed $= 0$ pro quovis alio valore ipsius $R$. Contra manente $r$ indeterminata, positaque $R = 1$, erit $[r, 1] = r + r^{g^{\alpha}} + r^{g^{2\alpha}} + r^{g^{3\alpha}} \ldots + r^{g^{\alpha\beta\gamma-\alpha}}$, sive adhibito signo in Disq. Ar. introducto, $[r, 1] = (\beta\gamma, 1)$, i. e. constabit e periodo $\beta\gamma$ radicum, e quibus una est ipsa $r$. Quoties est $\alpha = 1$, haec periodus omnes radices $r, r^2, r^3 \ldots r^{n-1}$ complectetur ordine tantum mutato.

Notentur adhuc relationes sequentes, quarum ratio sponte elucet:

$$[r, R] = R[r^{g^{\alpha}}, R] = R^2[r^{g^{2\alpha}}, R] \text{ sive generaliter } = R^k[r^{g^{\alpha k}}, R]$$

denotante $k$ integrum positivum quemcunque. Hinc patet, functionem $[r^m, R]$ vel esse $= [1, R]$, scilicet si fuerit $m$ divisibilis per $n$, vel reduci posse ad formam $R^{\mu}[r^{g^{\nu}}, R]$ in casibus reliquis et quidem ita, ut sit $\nu < \alpha$. Si enim $m$ non est divisibilis per $n$, congruus erit secundum modulum $n$ alicui potestati ipsius $g$, cuius exponens ad instar Disq. Ar. per ind. $m$ commode exprimitur; statuendo itaque ind. $m = \lambda\alpha + \nu$, quod manifesto fieri potest, ita ut sit $\nu < \alpha$, erit $[r^m, R] = [r^{g^{\lambda\alpha+\nu}}, R] = R^{-\lambda}[r^{g^{\nu}}, R]$: faciendus est itaque $\mu = -\lambda$, aut si exponentem positivum desideras, $\mu \equiv -\lambda$ (mod. $\beta$).

4.

Theorema. *Designante $r'$ perinde ut $r$ indefinite radicem aequationis $x^n - 1 = 0$, nec non $R'$ perinde ut $R$ indefinite radicem aequationis $x^{\beta} - 1 = 0$, erit productum*

$$\begin{aligned}[r, R] \times [r', R'] = \; & [rr', RR'] + R[r^{g^{\alpha}}r', RR'] + R^2[r^{g^{2\alpha}}r', RR'] \\ & + R^3[r^{g^{3\alpha}}r', RR'] \ldots + R^{\beta\gamma-1}[r^{g^{\alpha\beta\gamma-\alpha}}r', RR']\end{aligned}$$

*Demonstr.* Absolvendo multiplicationem ipsius $[r, R]$ per singulas partes ipsius $[r', R']$, productum in hac forma exhiberi potest

$$\begin{aligned}& [r, R]\, r' + RR'[r^{g^{\alpha}}, R]\, r'^{g^{\alpha}} + R^2R'^2[r^{g^{2\alpha}}, R]\, r'^{g^{2\alpha}} \\ & + R^3R'^3[r^{g^{3\alpha}}, R]\, r'^{g^{3\alpha}} \ldots + R^{\beta\gamma-1}R'^{\beta\gamma-1}[r^{g^{\alpha\beta\gamma-\alpha}}, R]\, r'^{g^{\alpha\beta\gamma-\alpha}}\end{aligned}$$

Collectis dein singularum partium rite evolutarum terminis primis, prodit $[rr', RR']$; perinde collectis terminis secundis, emergit $R[r^{g^{\alpha}} r', RR']$ et sic porro, unde tandem producti forma tradita conflatur. Q. E. D.

Ceterum per solam permutationem ipsarum $r, R$ cum $r', R'$ patet, idem productum etiam sub hanc formam poni posse:

$$\begin{aligned}&[rr', RR'] + R'[rr'^{g^{\alpha}}, RR'] + R'^2[rr'^{g^{2\alpha}}, RR'] \\ &+ R'^3[rr'^{g^{3\alpha}}, RR'] \ldots + R'^{\delta\gamma-1}[rr'^{g^{\alpha\delta\gamma-\alpha}}, RR']\end{aligned}$$

Hinc porro concluditur, si etiam $r'', r'''$ etc. indefinite exprimant radices aequationis $x^n - 1 = 0$, nec non $R'', R'''$ etc. indefinite radices aequationis $x^\delta - 1 = 0$, productum e functionibus $[r, R], [r', R'], [r'', R''], [r''', R''']$ etc., quantacunque fuerit ipsarum multitudo, aequale fore aggregato

$$\Sigma R'^{k'} R''^{k''} R'''^{k'''} \text{ etc. } [rr'^{g^{\alpha k'}} r''^{g^{\alpha k''}} r'''^{g^{\alpha k'''}} \text{ etc.}, RR'R''R''' \text{ etc.}]$$

substitutis pro $k', k'', k'''$ etc. omnibus numeris $0, 1, 2, 3 \ldots \delta\gamma - 1$, omnibus modis diversis possibilibus inter se combinatis, quo pacto omnino $\delta^{\mu-1}\gamma^{\mu-1}$ termini emergent, si per $\mu$ multitudo illarum functionum inter se multiplicatarum denotatur.

5.

Formula, per quam in art. praec. productum e functionibus quotcunque expressimus, generalis est, neque ullum nexum inter radices $r, r', r'', r'''$ etc., vel inter $R, R', R'', R'''$ etc. supponit. Nullo inde negotio deducitur, si radices $r', r'', r'''$ etc. tamquam potestates ipsius $r$, radicesque $R', R'', R'''$ etc. tamquam potestates ipsius $R$ considerare liceat, singulas partes producti sub forma $R^M[r^m, R^\lambda]$ comprehensas fore, ubi exponens $\lambda$ pro singulis idem erit, scilicet $R^\lambda = RR'R''R'''$ etc. Quamobrem per ea, quae in art. 3 monuimus; huiusmodi productum reducetur ad formam sequentem

$$\begin{aligned}&A[1, R^\lambda] + B[r, R^\lambda] + B'[r^g, R^\lambda] + B''[r^{g^2}, R^\lambda] + B'''[r^{g^3}, R^\lambda] + \text{etc.} \\ &+ B^{(\alpha-1)}[r^{g^{\alpha-1}}, R^\lambda]\end{aligned}$$

ubi singuli coëfficientes $A, B, B', B'', B'''$ etc. erunt formae

$$h + h'R + h''R^2 + h'''R^3 + \text{etc.} + h^{(\delta-1)}R^{\delta-1}$$

designantibus $h, h', h'', h'''$ etc. numeros determinatos integros.

Casus simplicissimus is erit, ubi ponitur $r = r' = r'' = r'''$ etc., nec non $R = R' = R'' = R'''$ etc.; tunc productum nostrum transit in potestatem $[r, R]^{\lambda}$, quae itaque ad formam supra traditam semper reveniet.

6.

Statuendo itaque $\lambda = \beta$, potestas $[r, R]^{\beta}$ hanc formam nanciscetur:

$$A[1,1] + B[r,1] + B'[r^{g},1] + \text{etc.} + B^{(\alpha-1)}[r^{g^{\alpha-1}},1]$$
$$= \beta\gamma A + B(\beta\gamma, 1) + B'(\beta\gamma, g) + B''(\beta\gamma, g^2) + \text{etc.} + B^{(\alpha-1)}(\beta\gamma, g^{\alpha-1}) = \theta'$$

Quodsi itaque non modo valor radicis $R$ (adeoque et valores coëfficientium $A$, $B$, $B'$ etc.), sed etiam valores singulorum aggregatorum $\beta\gamma$ terminorum $(\beta\gamma, 1)$, $(\beta\gamma . g)$ etc. cogniti supponuntur, valor ipsius $\theta'$ sponte innotescet, unde erui poterit $[r, R]$ per formulam $\sqrt[\beta]{\theta'}$. Haec expressio $\beta$ valores diversos admittit; unde dubium videri posset, quemnam adoptare oporteat: facile autem ostenditur, hoc prorsus arbitrarium esse, quoties $R$ sit radix *propria* aequationis $x^{\beta} - 1 = 0$. In hoc enim casu patet, illos $\beta$ valores expressionis radicalis $\sqrt[\beta]{\theta'}$ fore

$$[r, R],\ [r^{g^{\alpha}}, R],\ [r^{g^{2\alpha}}, R] \ldots\ldots [r^{g^{\alpha\beta-\alpha}}, R]$$

quippe quarum functionum potestates $\beta^{\text{tae}}$ per art. 3 inter se aequales erunt, ipsae vero inter se ipsis $\beta$ radicibus diversis aequationis $x^{\beta} - 1 = 0$ proportionales: sed quamdiu aggregata $\beta\gamma$ terminorum $(\beta\gamma, 1)$, $(\beta\gamma, g)$ etc. tantum cognita sunt, ipsa radix $r$ eatenus tantum determinata est, quod in complexu $(\beta\gamma, 1)$ contenta esse debet, arbitrariumque manet, quamnam ex hoc complexu pro $r$ adoptemus. Hae radices vero sunt $r$, $r^{g^{\alpha}}$, $r^{g^{2\alpha}}$ etc., et proin etiam e functionibus $[r, R]$, $[r^{g^{\alpha}}, R]$, $[r^{g^{2\alpha}}, R]$ etc. quamlibet pro $[r, R]$ adoptare possumus.

Hae conclusiones non valerent, si $R$ non esset radix propria aequationis $x^{\beta} - 1 = 0$; supponendo enim, $R$ esse radicem propriam aequationis $x^{\beta'} - 1 = 0$, ita ut $\beta'$ sit divisor ipsius $\beta$, facile patet, fieri

$$[r, R] = [r^{g^{\alpha\beta'}}, R],\quad [r^{g^{\alpha}}, R] = [r^{g^{\alpha\beta'+\alpha}}, R] \text{ etc.}$$

adeoque in complexu $\beta$ functionum $[r, R]$, $[r^{g^{\alpha}}, R] \ldots [r^{g^{\alpha\beta-\alpha}}, R]$ tantummodo $\beta'$ diversas reperiri, et proin etiam e valoribus expressionis $\sqrt[\beta]{\theta'}$ haud plures quam $\beta'$ admissibiles esse, reliquos $\beta - \beta'$ autem spurios. At nullo negotio perspicitur, in hoc casu haud opus esse usque ad potestatum $\beta^{\text{tam}}$ functionis $[r, R]$ ascen-

dere, sed iam potestatem $[r, R]^{\beta'}$ ad formam nostram

$$\beta\gamma A + B(\beta\gamma, 1) + B'(\beta\gamma, g) + B''(\beta\gamma, g^2) \text{ etc.}$$

reduci. Habebimus itaque $[r, R]$ per expressionem talem $\sqrt[\beta']{\theta}$, nihilque intererit, quemnam valorem huius expressionis adoptemus.

7.

Perinde ut $[r, R]$ etiam functiones $[r, R^2]$, $[r, R^3]$ etc. sive generaliter $[r, R^k]$ determinare licebit: patet enim, si substituendo in $\theta'$ loco ipsius $R$ potestates $R^2$, $R^3$ etc. $R^k$ emergere supponantur functiones $\theta''$, $\theta'''$ etc. $\theta^{(k)}$, fore $[r, R^2]^\beta = \theta''$, $[r, R^3]^\beta = \theta'''$ etc. et generaliter $[r, R^k]^\beta = \theta^{(k)}$; quamobrem hae quoque functiones per expressiones radicales exprimi poterunt, $[r, R^2] = \sqrt[\beta]{\theta''}$ etc. Sed haud convenit, hisce expressionibus radicalibus uti, quoties quantitas aliqua per functionem ipsarum $[r, R]$, $[r, R^2]$ etc. exprimenda est. Scilicet quum singularum valores haud penitus determinati sint, dubium maneret, quosnam inter se combinare liceret: manifesto autem hoc neutiquam arbitrarium est; facile enim perspicitur, simulac pro $[r, R]$ valor determinatus accipiatur, etiam omnes $[r, R^2]$, $[r, R^3]$ etc. valores penitus determinatos nancisci debere, qui autem per expressiones radicales non indicantur. His itaque reiectis, expressiones alias indagare oportet, quarum adiumento $[r, R^2]$, $[r, R^3]$ etc. *rationaliter* per $[r, R]$ atque quantitates cognitas exhibeantur, quod facile sequenti modo efficimus.

Per theorema art. 4, eaque quae in art. 5 docuimus, etiam productum $[r, R^k] \times [r, R]^{\beta-k}$ ad formam talem

$$\beta\gamma A + B(\beta\gamma, 1) + B'(\beta\gamma, g) + B''(\beta\gamma, g^2) + \text{ etc. } + B^{(\lambda-1)}(\beta\gamma, g^{\lambda-1})$$

reducetur, ubi $A$, $B$, $B'$, $B''$ etc. erunt functiones rationales ipsius $R$. Positis itaque productis

$$\begin{aligned} &[r, R^2] \times [r, R]^{\beta-3} = \vartheta'' \\ &[r, R^3] \times [r, R]^{\beta-3} = \vartheta''' \\ &[r, R^4] \times [r, R]^{\beta-4} = \vartheta'''' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

erunt etiam $\vartheta''$, $\vartheta'''$, $\vartheta''''$ etc. quantitates rationaliter assignabiles, atque

$$[r, R^2] = \frac{\theta''}{\theta'}[r, R]^2$$
$$[r, R^3] = \frac{\theta'''}{\theta'}[r, R]^3$$
$$[r, R^4] = \frac{\theta''''}{\theta'}[r, R]^4$$
etc.

Hae expressiones itaque valores functionum $[r, R^2]$, $[r, R^3]$ etc. rationaliter exhibent, siquidem non fuerit $[r, R] = 0$, in quo casu indeterminatae fierent: at rigorose demonstrare possumus, numquam fieri posse $[r, R] = 0$, quoties quidem $r$ denotet radicem ab $1$ diversam, etiamsi expositionem huius demonstrationis, ne hic nimis prolixi fiamus, ad aliam occasionem nobis reservare oporteat.

8.

Quae in artt. praecc. exposuimus, usum praestant, si a periodis $\epsilon\gamma$ terminorum ad periodos $\gamma$ terminorum descendere propositum est. Nullo scilicet negotio perspicitur, denotante $R$ radicem propriam, haberi

$$\epsilon(\gamma, 1) = (\epsilon\gamma, 1) + [r, R] + [r, R^2] + [r, R^3] + \text{etc.} + [r, R^{\epsilon-1}]$$
$$\epsilon(\gamma, g^{\lambda}) = (\epsilon\gamma, 1) + R^{\epsilon-1}[r, R] + R^{\epsilon-2}[r, R^2] + R^{\epsilon-3}[r, R^3] + \text{etc.} + R[r, R^{\epsilon-1}]$$
$$\epsilon(\gamma, g^{2\lambda}) = (\epsilon\gamma, 1) + R^{2\epsilon-2}[r, R] + R^{2\epsilon-4}[r, R^2] + R^{2\epsilon-6}[r, R^3] + \text{etc.} + R^2[r, R^{\epsilon-1}]$$
etc.

Si hic pro singulis $[r, R]$, $[r, R^2]$ etc. expressiones radicales $\sqrt[\epsilon]{\theta'}$, $\sqrt[\epsilon]{\theta''}$ etc. acciperentur, valor cuiusvis seriei inter valores $\epsilon^{\epsilon-1}$ dubius esset, qui contra adoptatis expressionibus rationalibus pro $[r, R^2]$ etc. ambiguitati alii non erit obnoxius, nisi quae per rei naturam est inevitabilis. Haec observatio attentionem ill. LAGRANGE subterfugisse videtur, qui methodum nostram in Disquis. arithm. art. 360 traditam, ubi haud inconsulto neglectis expressionibus radicalibus solas rationales proposueramus, *simplificavisse* sibi visus est, dum illas pro his substituit (Traité de la résolution numérique des équations; édition 2[me] pag. 311).

Ceterum vix opus est hic monere, simulac valores periodorum $(\gamma, 1)$, $(\gamma, g^{\lambda})$ etc., aut tantummodo unius ex ipsis eruti sint, valores omnium reliquarum periodorum $\gamma$ terminorum rationaliter inde deduci posse. Descensus itaque a periodis $\epsilon\gamma$ terminorum ad periodos $\gamma$ terminorum requirit solutionem aequationum $x^{\epsilon} = 1$, $x^{\epsilon} = \theta'$, operationesque reliquae rationaliter perficientur.

9.

Haec omnia eodem fere modo iam in Disquis. Ar. pertractata fuerant; quaedam autem illic adiecta fuerant suppressa demonstratione, quam hic explere consultum iudicamus. Annuntiavimus illic, evolutionem valoris quantitatis radicalis $\sqrt[\beta]{\theta'}$, quae quandoquidem $\theta'$ est quantitas imaginaria, sectionem tum rationis tum anguli in $\beta$ partes requirere videtur, a sola posteriori pendere, prioremque semper ad solam extractionem unius radicis quadratae reduci posse: hoc ita demonstramus.

Designando ut supra quantitatem imaginariam $\sqrt{-1}$ per $i$, statuendoque $\theta' = P + iQ$, atque aliquem valorem expressionis $\sqrt[\beta]{\theta'} = p + iq$, ita ut $P, Q, p, q$ sint reales, constat, si quantitates positivae $E, e$ angulique $F, f$ ita determinentur, ut sit $P = E\cos F$, $Q = E\sin F$, $p = e\cos f$, $q = e\sin f$, fore $e = \sqrt[\beta]{E}$, atque $f$ aequalem alicui ex angulis

$$\tfrac{1}{\beta}F,\ \tfrac{1}{\beta}(F+360^0),\ \tfrac{1}{\beta}(F+720^0)\ \ldots\ \tfrac{1}{\beta}(F+(\beta-1)\,360^0)$$

Determinabitur itaque $f$ per sectionem anguli $F$ in $\beta$ partes, at extractione radicis $\sqrt[\beta]{E}$ sequenti modo supersedere possumus. Quodvis productum $r^k R^K$ partem suam realem habet communem cum $r^{-k}R^{-K}$, partes imaginariae autem factorem $i$ implicantes in his productis aequales sed oppositae erunt. Hinc sponte sequitur $[r^{-1}, R^{-1}] = p - iq = e(\cos f - i\sin f)$, adeoque

$$[r, R] \times [r^{-1}, R^{-1}] = e^2$$

Sed productum illud per theorema art. 4 fit

$$\begin{aligned} &= [1, 1] + R[r^{g^\alpha - 1}, 1] + R^2[r^{g^{2\alpha} - 1}, 1] + \text{etc.} + R^{\beta\gamma-1}[r^{g^{\alpha\beta\gamma-\alpha}-1}, 1] \\ &= \beta\gamma + R(\beta\gamma, g^\alpha - 1) + R^2(\beta\gamma, g^{2\alpha} - 1) + \text{etc.} + R^{\beta\gamma-1}(\beta\gamma, g^{\alpha\beta\gamma-\alpha} - 1) \end{aligned}$$

quae quantitas determinabilis est, si $R$ omnesque periodi $\beta\gamma$ terminorum cognitae supponuntur. Determinatio ipsius $e$ itaque solam extractionem radicis quadratae postulat.

In casu speciali, ubi $\alpha = 1$, singulae periodi $(\beta\gamma, g^\alpha - 1)$, $(\beta\gamma, g^{2\alpha} - 1)$ etc. manifesto sunt $= r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc.} + r^{n-1}$, adeoque

$$\begin{aligned} ee &= \beta\gamma + (R + R^2 + R^3 + \text{etc.} + R^{\beta\gamma-1})(r + r^2 + r^3 + \text{etc.} + r^{n-1}) \\ &= \beta\gamma + 1 = n \end{aligned}$$

siquidem $r$ et $R$ radices ab 1 diversas exhibere supponuntur, et proin semper $e = \sqrt{n}$ (Disq. arithm. art. 360 fin.).

10.

Hactenus disquisitionem nostram summa generalitate instituimus, ut valores quoscunque numerorum $\alpha$, $\mathfrak{b}$, $\gamma$ complectatur: abhinc vero ad casum magis limitatum, ubi $\alpha = 1$, transibimus, qui ad disquisitiones foecundissimas et elegantissimas viam nobis sternet. Exprimet itaque signum $[r, R]$ functionem

$$r + Rr^g + R^2 r^{g^2} + R^3 r^{g^3} + \text{etc.} + R^{n-2} r^{g^{n-2}}$$

ubi $n$ est numerus primus, $r$ indefinite radix aequationis $x^n - 1 = 0$ (radice 1 non excepta), $R$ indefinite radix aequationis $x^{\mathfrak{b}} - 1 = 0$, denotante $\mathfrak{b}$ divisorem datum ipsius $n-1$, denique $g$ integer, qui est radix primitiva determinata pro modulo $n$. Porro brevitatis caussa scribemus

$$1 + r + r^2 + r^3 + \text{etc.} + r^{n-1} = s$$
$$1 + R + R^2 + R^3 + \text{etc.} + R^{n-2} = S$$

unde patet $s$ fieri $= n$ pro $r = 1$, sed $s = 0$ pro quovis alio valore ipsius $r$, et perinde $S = n-1$ pro $R = 1$, sed $S = 0$ pro quovis alio valore ipsius $R$.

Per art. 3 itaque habemus $[1, R] = S$, $[r, 1] = s - 1$; porro pro quovis valore integri $m$ per $n$ non divisibili $[r^m, R] = R^{-\text{ind} m}[r, R]$, aut generalius $[r^m, R^M] = R^{-M \text{ind} m}[r, R^M]$, ubi ind $m$ est exponens potestatis numeri $g$ secundum modulum $n$ ipsi $m$ congruae. Applicando hanc transformationem ad ea, quae in art. 5 docuimus, sequitur, productum e duabus pluribusve functionibus talibus $[r^\lambda, R^H]$ reduci ad formam hanc

$$A[1, R^\lambda] + B[r, R^\lambda]$$

ubi $A$ et $B$ erunt functiones rationales ipsius $R$ cum coëfficientibus integris, atque $\lambda$ aggregatum omnium valorum ipsius $H$. Magni momenti erit, huiusmodi transformationes ad algorithmum expeditum reducere, ad quem finem imprimis indoles producti e duabus functionibus propius nobis consideranda erit.

11.

Productum $[r, R^\mu] \times [r, R^\nu]$ per theorema art. 4 fit =

$$[r^2, R^{\mu+\nu}] + R^\mu [r^{g+1}, R^{\mu+\nu}] + R^{2\mu}[r^{g^2+1}, R^{\mu+\nu}] + R^{3\mu}[r^{g^3+1}, R^{\mu+\nu}] + \text{etc.}$$
$$+ R^{(n-2)\mu}[r^{g^{n-2}+1}, R^{\mu+\nu}]$$

Inter $n-1$ exponentes $2, g+1, g^2+1, g^3+1$ etc. $g^{n-2}+1$ unus tantum reperietur per $n$ divisibilis, puta $g^{\frac{1}{2}(n-1)}+1$, aggregati itaque nostri terminus respondens erit $R^{\frac{1}{2}(n-1)\mu}[1, R^{\mu+\nu}]$: hic terminus erit $=0$, quoties non est $R^{\mu+\nu}=1$, et $=(n-1)R^{\frac{1}{2}(n-1)\mu} = \pm(n-1)$, pro $R^{\mu+\nu}=1$. Partes reliquae aggregati nostri, quarum summam statuemus $=\Omega$, sequenti modo transformantur:

$$\begin{aligned}
[r^2, R^{\mu+\nu}] &= R^{-(\mu+\nu)\mathrm{ind}\,2} [r, R^{\mu+\nu}] \\
R^\mu [r^{g+1}, R^{\mu+\nu}] &= R^{\mu-(\mu+\nu)\mathrm{ind}(g+1)} [r, R^{\mu+\nu}] \\
R^{2\mu}[r^{g^2+1}, R^{\mu+\nu}] &= R^{2\mu-(\mu+\nu)\mathrm{ind}(g^2+1)} [r, R^{\mu+\nu}] \\
R^{3\mu}[r^{g^3+1}, R^{\mu+\nu}] &= R^{3\mu-(\mu+\nu)\mathrm{ind}(g^3+1)} [r, R^{\mu+\nu}] \\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

Hinc colligimus

I. $$\Omega = [r, R^{\mu+\nu}] \times \Sigma R^{\mu\,\mathrm{ind}\,x-(\mu+\nu)\mathrm{ind}(x+1)}$$

si pro $x$ successive substituuntur valores $1, g, g^2, g^3 \ldots . g^{n-2}$ excepto hoc $g^{\frac{1}{2}(n-1)}$, seu quod manifesto eodem redit, si pro $x$ substituuntur valores $1, 2, 3, 4 \ldots . n-2$, quoniam valores hi illis (etsi ordine mutato) congrui sunt secundum modulum $n$:

Statuendo integro $y$ ipsi $x$ reciprocum secundum modulum $n$, i. e. ita determinatum, ut fiat $xy \equiv 1$ (mod. $n$), erit $\mathrm{ind}\,x \equiv -\mathrm{ind}\,y$ (mod. $n-1$), atque $\mathrm{ind}(x+1) + \mathrm{ind}\,y \equiv \mathrm{ind}(xy+y) \equiv \mathrm{ind}(1+y)$ (mod. $n-1$); hinc fit

$$\begin{aligned}
\mu\,\mathrm{ind}\,x - (\mu+\nu)\mathrm{ind}(x+1) &\equiv -\mu\,\mathrm{ind}\,y - (\mu+\nu)\{\mathrm{ind}(y+1) - \mathrm{ind}\,y\} \\
&\equiv \nu\,\mathrm{ind}\,y - (\mu+\nu)\,\mathrm{ind}(y+1)
\end{aligned}$$

Quamobrem quum numeri ipsis $1, 2, 3 \ldots n-2$ reciproci cum his ipsis ordine tantum mutato conveniant, etiam erit

II. $$\Omega = [r, R^{\mu+\nu}] \times \Sigma R^{\nu\,\mathrm{ind}\,y-(\mu+\nu)\mathrm{ind}(y+1)}$$

substituendo pro $y$ successive numeros $1, 2, 3 \ldots n-2$. Eadem formula immediate ex I derivatur, quum manifesto numeros $\mu, \nu$ inter se permutare liceat.

Denique statuendo integrum $z$ ipsi $x+1$ reciprocum secundum modu-

lum $n$, sive $xz+z\equiv 1 \pmod{n}$, erit $\operatorname{ind}(1-z)\equiv \operatorname{ind}x+\operatorname{ind}z \pmod{n-1}$, $\operatorname{ind}(x+1)\equiv -\operatorname{ind}z \pmod{n-1}$ adeoque

$$\begin{aligned}\mu\operatorname{ind}x-(\mu+\nu)\operatorname{ind}(x+1) &\equiv \mu(\operatorname{ind}(1-z)-\operatorname{ind}z)+(\mu+\nu)\operatorname{ind}z\\ &\equiv \mu\operatorname{ind}(1-z)+\nu\operatorname{ind}z\end{aligned}$$

Quare quum percurrente $x$ valores $1, 2, 3 \ldots n-2$, numerus $z$ percurrere debeat valores $2, 3, 4 \ldots n-1$ (etsi alio ordine), nanciscimur expressionem tertiam

III. $$\Omega = [r, R^{\mu+\nu}]\times\Sigma R^{\mu\operatorname{ind}(1-z)+\nu\operatorname{ind}z}$$

substituendo pro $z$ successive valores $2, 3, 4 \ldots n-1$, aut si mavis

IV. $$\begin{aligned}\Omega &= [r, R^{\mu+\nu}]\times\Sigma R^{\mu\operatorname{ind}(n+1-z)+\nu\operatorname{ind}z}\\ &= [r, R^{\mu+\nu}]\times\Sigma R^{\mu\operatorname{ind}z+\nu\operatorname{ind}(n+1-z)}\end{aligned}$$

Quum habeatur $\operatorname{ind}(1-z)=\frac{1}{2}(n-1)+\operatorname{ind}(z-1)$, productum nostrum ita quoque exhiberi poterit:

$$\begin{aligned}[r, R^{\mu}]\times[r, R^{\nu}] &= R^{\frac{1}{2}(n-1)\mu}\{[1, R^{\mu+\nu}]+[r, R^{\mu+\nu}]\times\Sigma R^{\mu\operatorname{ind}(z-1)+\nu\operatorname{ind}z}\}\\ &= R^{\frac{1}{2}(n-1)\nu}\{[1, R^{\mu+\nu}]+[r, R^{\mu+\nu}]\times\Sigma R^{\mu\operatorname{ind}z+\nu\operatorname{ind}(z-1)}\}\end{aligned}$$

ubi semper pro $z$ substituendi concipiuntur valores $2, 3, 4 \ldots n-1$.

Ceterum in omnibus his formulis pro numeris

$$\mu\operatorname{ind}x-(\mu+\nu)\operatorname{ind}(x+1),\quad \nu\operatorname{ind}y-(\mu+\nu)\operatorname{ind}(y+1),\quad \mu\operatorname{ind}(1-z)+\nu\operatorname{ind}z$$

etc. manifesto ipsorum residua minima secundum modulum $\mathfrak{G}$ substitui poterunt.

Si $\mu+\nu\equiv 0 \pmod{\mathfrak{G}}$ erit

$$\begin{aligned}[r, R^{\mu}][r, R^{\nu}] &= (n-1)R^{\frac{1}{2}(n-1)\mu}\\ &+(r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-1})\times(1+R^{\mu}+R^{2\mu}+R^{3\mu}+\ldots+R^{(n-2)\mu}-R^{\frac{1}{2}(n-1)\mu})\end{aligned}$$

## 12.

Productum $[1, R^{\mu}]\times[r, R^{\nu}]$ per theorema art. 4 fit

$$\begin{aligned}&= [r, R^{\mu+\nu}]+R^{\mu}[r, R^{\mu+\nu}]+R^{2\mu}[r, R^{\mu+\nu}]+\text{ etc. }+R^{(n-2)\mu}[r, R^{\mu+\nu}]\\ &= [r, R^{\mu+\nu}]\times(1+R^{\mu}+R^{2\mu}+R^{3\mu}+\text{ etc. }+R^{(n-2)\mu})\\ &= [r, R^{\mu+\nu}]\times\tfrac{n-1}{\mathfrak{G}}(1+R^{\mu}+R^{2\mu}+R^{3\mu}+\text{ etc. }+R^{(\mathfrak{G}-1)\mu})\end{aligned}$$

Hinc productum $[1, R^{\mu}] \times [1, R^{\nu}]$ evolvitur in

$$\frac{n-1}{\sigma}[1, R^{\mu+\nu}] \times (1 + R^{\mu} + R^{2\mu} + R^{3\mu} + \text{etc.} + R^{(\sigma-1)\mu})$$

Nullo iam negotio generaliter productum $[r^m, R^{\mu}].[r^{m'}, R^{\mu'}]$ erui poterit, quum enim fiat $[r^m, R^{\mu}] = R^{-\mu \operatorname{ind} m}[r, R^{\mu}]$ pro valore ipsius $m$ per $n$ non divisibili, et $= [1, R^{\mu}]$ pro valore divisibili, et quum similis transformatio de factore altero $[r^{m'}, R^{\mu'}]$ valeat, multiplicatio vel ad problema art. praec. reducetur, vel ad casus eos, quos in hoc art. consideravimus.

13.

Postquam productum e duobus factoribus evolvere docuimus, evolutio producti e factoribus pluribus nulli difficultati obnoxia erit. Producto $[r, R^{\mu}] \times [r, R^{\nu}]$ ad formam $A[1, R^{\mu+\nu}] + B[r, R^{\mu+\nu}]$ reducto, patet, si accedat factor tertius $[r, R^{\pi}]$, productum fieri $= C[1, R^{\mu+\nu+\pi}] + D[r, R^{\mu+\nu+\pi}]$ statuendo

$$[r, R^{\mu+\nu}][r, R^{\pi}] = c[1, R^{\mu+\nu+\pi}] + d[r, R^{\mu+\nu+\pi}]$$

atque

$$C = Bc,$$
$$D = Bd + A\{1 + R^{\mu+\nu} + R^{2\mu+2\nu} + \text{etc.} + R^{(n-2)(\mu+\nu)}\}$$

Hinc potestas $[r, R]^{\lambda}$ facile ad formam $A[1, R^{\lambda}] + B[r, R^{\lambda}]$ reduci poterit.

Exempli caussa evolvemus potestates functionis $[r, R]$ pro $n = 11$, $\sigma = 5$, ubi statuemus $g = 2$. Hinc respondebunt

| | |
|---|---|
| numeris | 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 |
| indices | 0 . 1 . 8 . 2 . 4 . 9 . 7 . 3 . 6 . 5 |

Habemus itaque ad evolutionem quadrati $[r, R]^2$ secundum formulam I art. 11:

$$\mu = 1, \quad \nu = 1$$

| | |
|---|---|
| valores ipsius $x$ | 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 |
| ind $x$ | 0. 1. 8. 2. 4. 9. 7. 3. 6 |
| 2 ind $(x+1)$ | 2. 16. 4. 8. 18. 14. 6. 12. 10 |
| Res. min. ipsius ind $x$ − 2 ind $(x+1)$ secundum modulum 5 | 3. 0. 4. 4. 1. 0. 1. 1. 1 |

unde deducimus

$$\Omega = [r, R^2] \times \{2 + 4R + R^3 + 2R^4\}$$

atque

1°. $$[r, R]^2 = [1, R^2] + [r, R^3] \times \{2 + 4R + R^3 + 2R^4\}$$

Eadem expressio resultat ex formula III art. 11 scilicet

| | |
|---|---|
| valores ipsius $z$ ................ | 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 |
| ind $z$ ........................ | 1 . 8 . 2 . 4 . 9 . 7 . 3 . 6 . 5 |
| ind $(n+1-z)$ .................. | 5 . 6 . 3 . 7 . 9 . 4 . 2 . 8 . 1 |
| resid. min. ipsius ind $z$ + ind $(n+1-z)$ secundum modulum 5 ......... | 1 . 4 . 0 . 1 . 3 . 1 . 0 . 4 . 1 |

Prorsus simili modo invenitur

2°. $$[r, R^2].[r, R] = [1, R^3] + [r, R^3] \times \{2 + R + 4R^2 + 2R^3\}$$

3°. $$[r, R^3].[r, R] = [1, R^4] + [r, R^4] \times \{2 + 4R + R^3 + 2R^4\}$$

Denique fit

4°. $$[r, R^4].[r, R] = [1, 1] + [r, 1] \times \{1 + 2R + 2R^2 + 2R^3 + 2R^4\}$$

Hinc multiplicando aequationem 1° per $[r, R]$ et substituendo pro $[r, R^2].[r, R]$ valorem suum ex 2°, nec non

$$[1, R^2].[r, R] = [r, R^3].\{2 + 2R + 2R^2 + 2R^3 + 2R^4\}$$

deducimus

$$[r, R]^3 = [1, R^3] \times \{2 + 4R + R^3 + 2R^4\}$$
$$+ [r, R^3] \times \{12 + 22R + 18R^2 + 24R^3 + 15R^4\}$$

et simili modo

$$[r, R]^4 = [1, R^4] \times \{12 + 22R + 18R^2 + 24R^3 + 15R^4\}$$
$$+ [r, R^4] \times \{164 + 170R + 205R^2 + 180R^3 + 190R^4\}$$
$$[r, R]^5 = [1, 1] \times \{164 + 170R + 205R^2 + 180R^3 + 190R^4\}$$
$$+ [r, 1] \times \{1836 + 1830R + 1795R^2 + 1820R^3 + 1810R^4\}$$
$$= 1640 + 1700R + 2050R^2 + 1800R^3 + 1900R^4$$
$$+ (1836 + 1830R + 1795R^2 + 1820R^3 + 1810R^4)(s - 1)$$
$$= 918Ss - 98S - (6R + 41R^2 + 16R^3 + 26R^4)s$$
$$+ 66R + 451R^2 + 176R^3 + 286R^4$$

14.

Calculus in praecc. ita absolutus, ut ad omnes valores ipsius $r$ ipsiusque $R$ extendi possit, notabiliter contrahitur, si ipsam $R$ statim ab initio tamquam radicem propriam aequationis $x^6 - 1 = 0$ consideramus. Haece suppositione productum $[r, R^\mu] \times [r, R^\nu]$ reducetur ad formam $B[r, R^{\mu+\nu}]$, quoties $\mu + \nu$ per $6$ non est divisibilis; quando vero $\mu + \nu$ per $6$ divisibilis est, illud productum fit $= (n-1) R^{\frac{1}{2}(n-1)\mu} + [r, 1] \Sigma R^{\mu \operatorname{ind} x}$, substituendo pro ind $x$ omnes numeros $0, 1, 2, 3 \ldots n-2$ excepto hoc $\frac{1}{2}(n-1)$. Hinc facile colligitur (si $\mu$ et proin etiam $\nu$ per $6$ non est divisibilis), in hoc casu esse

$$[r, R^\mu] . [r, R^\nu] = R^{\frac{1}{2}(n-1)\mu} \{n - 1 - [r, 1]\}$$

adeoque $= 0$ pro $r = 1$, et $= n R^{\frac{1}{2}(n-1)\mu}$ pro quovis alio valore ipsius $r$. Ceterum quum $R^{\frac{1}{2}(n-1)\mu}$ fiat $= +1$, vel $= -1$, prout $\frac{n-1}{6} . \mu$ est numerus par vel impar, productum nostrum fit in casu priori $= n$, in posteriori $= -n$.

Hinc porro sequitur, statui posse

$$[r, R]^2 = A' [r, R^2]$$
$$[r, R^2] . [r, R] = A'' [r, R^3]$$
$$[r, R^3] . [r, R] = A''' [r, R^4]$$

etc. usque ad

$$[r, R^{6-2}] . [r, R] = A^{(6-2)} [r, R^{6-1}]$$

unde habemus

$$[r, R]^2 = A' [r, R^2]$$
$$[r, R]^3 = A' A'' [r, R^3]$$
$$[r, R]^4 = A' A'' A''' [r, R^4]$$

etc. Denique

$$[r, R]^6 = \pm n A' A'' A''' \ldots A^{(6-2)}$$

ubi signum superius vel inferius accipiendum est, prout $\frac{n-1}{6}$ par est vel impar.

Patet itaque, postquam valor ipsius $[r, R]$ inventus fuerit, functiones reliquas

$$[r, R^2] = \frac{[r, R]^2}{A'}, \quad [r, R^3] = \frac{[r, R]^3}{A' A''} \text{ etc.}$$

hic multo expeditius determinari posse, quam in casibus iis, ubi $a$ non est $= 1$,

ut iam in *Disq. Ar.* (art. 360, III) monuimus. Per considerationem uberiorem indolis functionum $A'$, $A''$ etc. hae operationes adhuc magis facilitabuntur.

15.

In art. 9 ostendimus, valorem functionis $[r, R]$ reduci posse ad formam $\sqrt{n}.(\cos f + i \sin f)$, eodemque modo functiones $[r, R^2]$, $[r, R^3]$ etc. usque ad $[r, R^{6-1}]$ ad similem formam reduci poterunt. Statuamus

$$
\begin{aligned}
[r, R] &= \sqrt{n}(\cos f' + i \sin f') \\
[r, R^2] &= \sqrt{n}(\cos f'' + i \sin f'') \\
[r, R^3] &= \sqrt{n}(\cos f''' + i \sin f''') \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

eritque

$$
\begin{aligned}
A' &= \sqrt{n}(\cos(2f' - f'') + i \sin(2f' - f'')), \\
A'' &= \sqrt{n}(\cos(f' + f'' - f''') + i \sin(f' + f'' - f''')) \\
A''' &= \sqrt{n}(\cos(f' + f''' - f'''') + i \sin(f' + f''' - f'''')) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Hinc patet, si functiones $A'$, $A''$, $A'''$ etc. reducantur ad formas

$$
\begin{aligned}
A' &= a'(\cos b' + i \sin b') \\
A'' &= a''(\cos b'' + i \sin b'') \\
A''' &= a'''(\cos b''' + i \sin b''') \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

et quidem ita, ut omnes $a'$, $a''$, $a'''$ etc. sint positivi, fore

$$a' = a'' = a''' \text{ etc.} = \sqrt{n}$$

$$f' = \tfrac{1}{6}(b' + b'' + b''' + \text{etc.} + b^{(6-2)})$$

si fuerit $\frac{n-1}{6}$ par, vel

$$f' = \tfrac{1}{6}(180^0 + b' + b'' + \text{etc.} + b^{(6-2)})$$

si fuerit $\frac{n-1}{6}$ impar, ac dein

$$
\begin{aligned}
[r, R] &= \sqrt{n}(\cos f' + i \sin f') \\
[r, R^2] &= \sqrt{n}(\cos(2f' - b') + i \sin(2f' - b')) \\
[r, R^3] &= \sqrt{n}(\cos(3f' - b' - b'') + i \sin(3f' - b' - b'')) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

denique erit per formulas art. 8

$$(\tfrac{n-1}{6}, 1) = -\tfrac{1}{6} + \tfrac{\sqrt{n}}{6}\{\cos f' + \cos(2f'-b') + \cos(3f'-b'-b'') + \text{etc.}$$
$$+\cos((6-1)f'-b'-b''-b'''- \text{etc.} - b^{(6-2)})\}$$
$$+\tfrac{i\sqrt{n}}{6}\{\sin f' + \sin(2f'-b') + \sin(3f'-b'-b'') + \text{etc.}\}$$

et perinde prodeunt valores functionum $(\frac{n-1}{6}, g)$, $(\frac{n-1}{6}, g^2)$, $(\frac{n-1}{6}, g^3)$ etc., si in hac formula pro $f'$ resp. substituitur $f' - \frac{360^\circ k}{6}$, $f' - 2\frac{360^\circ k}{6}$, $f' - 3\frac{360^\circ k}{6}$ etc., supponendo $R = \cos\frac{360^\circ k}{6} + i\sin\frac{360^\circ k}{6}$.

## 16.

Simplificatio nova ex observatione sequente petitur. Quum per art. 14 fiat

$$\pm[r, R][r, R^{6-1}] = [r, R^2][r, R^{6-2}] = \pm[r, R^3][r, R^{6-3}] \text{ etc. } = n$$

accipiendo [in producto primo, tertio etc.] signum superius vel inferius, prout $\frac{n-1}{6}$ par est vel impar, esse debebit in casu priori

$$\cos(f' + f^{(6-1)}) = \cos(f'' + f^{(6-2)}) = \cos(f''' + f^{(6-3)}) \text{ etc. } = 1$$

in posteriori

$$-\cos(f' + f^{(6-1)}) = \cos(f'' + f^{(6-2)}) = -\cos(f''' + f^{(6-3)}) \text{ etc. } = 1$$

et in utroque casu

$$\sin(f' + f^{(6-1)}) = \sin(f'' + f^{(6-2)}) = \sin(f''' + f^{(6-3)}) \text{ etc. } = 0$$

Hinc statuere licebit in casu priori

$$f^{(6-1)} = -f', \quad f^{(6-2)} = -f'', \quad f^{(6-3)} = -f''' \text{ etc.}$$

in posteriori

$$f^{(6-1)} = 180^\circ - f', \quad f^{(6-2)} = -f'', \quad f^{(6-3)} = 180^\circ - f''' \text{ etc.}$$

hinc vero sequitur, in priori casu esse

$$b^{(6-2)} = b', \quad b^{(6-3)} = b'', \quad b^{(6-4)} = b''' \text{ etc.}$$
$$A^{(6-2)} = A', \quad A^{(6-3)} = A'', \quad A^{(6-4)} = A''' \text{ etc.}$$

in posteriori vero

$$b^{(\varepsilon-2)} = b' - 180^0, \quad b^{(\varepsilon-3)} = b'' + 180^0, \quad b^{(\varepsilon-4)} = b''' - 180^0 \text{ etc.}$$
$$A^{(\varepsilon-2)} = -A', \qquad A^{(\varepsilon-3)} = -A'', \qquad A^{(\varepsilon-4)} = -A''' \text{ etc.}$$

ita ut multitudo functionum $A'$, $A''$, $A'''$ etc. ad semissem reducatur. Hinc porro colligitur, in priori casu fore

$$f' = \tfrac{1}{\varepsilon}(2b' + 2b'' + \text{etc.} + 2b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-1)})$$
$$\begin{aligned}(\tfrac{n-1}{\varepsilon}, 1) = -\tfrac{1}{\varepsilon} + \tfrac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\{ & 2\cos f' + 2\cos(2f' - b') + 2\cos(3f' - b' - b'') + \text{etc.} \\ & + 2\cos((\tfrac{1}{2}\varepsilon - 1)f' - b' - b'' - \text{etc.} - b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-2)}) \\ & + \cos(\tfrac{1}{2}\varepsilon f' - b' - b'' - \text{etc.} - b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-1)})\}\end{aligned}$$

(ubi terminus ultimus manifesto est $= \cos 0 = 1$) vel

$$f' = \tfrac{1}{\varepsilon}(2b' + 2b'' + \text{etc.} + 2b^{(\frac{1}{2}(\varepsilon-3))} + b^{(\frac{1}{2}(\varepsilon-1))})$$
$$\begin{aligned}(\tfrac{n-1}{\varepsilon}, 1) = -\tfrac{1}{\varepsilon} + \tfrac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\{ & 2\cos f' + 2\cos(2f' - b') + 2\cos(3f' - b' - b'') + \text{etc.} \\ & + 2\cos(\tfrac{1}{2}(\varepsilon - 1)f' - b' - b'' - \text{etc.} - b^{(\frac{1}{2}(\varepsilon-3))})\}\end{aligned}$$

prout $\varepsilon$ par est vel impar; et in casu posteriori

$$f' = \tfrac{1}{\varepsilon}(2b' + 2b'' + \text{etc.} + 2b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-1)})$$
$$\begin{aligned}(\tfrac{n-1}{\varepsilon}, 1) = -\tfrac{1}{\varepsilon} + \tfrac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\{ & 2\cos(2f' - b') + 2\cos(4f' - b' - b'' - b''') + \text{etc.} \\ & + 2\cos((\tfrac{1}{2}\varepsilon - 2)f' - b' - b'' - \text{etc.} - b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-3)}) \\ & + \cos(\tfrac{1}{2}\varepsilon f' - b' - b'' - \text{etc.} - b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-1)})\} \\ + i\tfrac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\{ & 2\sin f' + 2\sin(3f' - b' - b'') + \text{etc.} \\ & + 2\sin((\tfrac{1}{2}\varepsilon - 1)f' - b' - b'' - \text{etc.} - b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-2)})\}\end{aligned}$$

vel

$$f' = \tfrac{1}{\varepsilon}(2b' + 2b'' + \text{etc.} + 2b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-1)} + 180^0)$$
$$\begin{aligned}(\tfrac{n-1}{\varepsilon}, 1) = -\tfrac{1}{\varepsilon} + \tfrac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\{ & 2\cos(2f' - b') + 2\cos(4f' - b' - b'' - b''') + \text{etc.} \\ & + 2\cos((\tfrac{1}{2}\varepsilon - 1)f' - b' - b'' - \text{etc.} - b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-2)})\} \\ + i\tfrac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\{ & 2\sin f' + 2\sin(3f' - b' - b'') + \text{etc.} \\ & + 2\sin((\tfrac{1}{2}\varepsilon - 2)f' - b' - b'' - \text{etc.} - b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-3)}) \\ & + \sin(\tfrac{1}{2}\varepsilon f' - b' - b'' - \text{etc.} - b^{(\frac{1}{2}\varepsilon-1)})\}\end{aligned}$$

prout $\frac{1}{2}\varepsilon$ par est vel impar. De periodis reliquis $\frac{n-1}{\varepsilon}$ terminorum eadem valent, quae supra annotavimus. Generaliter itaque hinc concluditur, ad determinationem harum periodorum requiri sectionem circuli integri in $\varepsilon$ partes, a qua

constructio angulorum $b', b'', b'''$ etc. rationaliter pendet, dein divisionem anguli $b'+b''+b'''+$ etc. in $\mathfrak{b}$ partes, denique radicem quadratam $\sqrt{n}$. Quodsi statuitur statim $\mathfrak{b} = \frac{1}{2}(n-1)$, periodi illae manifesto coincidunt cum duplicatis cosinibus angulorum $\frac{360^0}{n}$, $2\frac{360^0}{n}$, $3\frac{360^0}{n}$ etc. usque ad $\frac{1}{2}(n-1)\frac{360^0}{n}$, ita ut divisio circuli in $n$ partes pendeat a divisione circuli integri in $\frac{1}{2}(n-1)$ partes, divisione anguli, qui illa sectione perfecta construi potest, in $\frac{1}{2}(n-1)$ partes, atque quantitate radicali $\sqrt{n}$. Si usque ad sinus angulorum $\frac{360^0}{n}$ etc. progredi constitutum est, una operatione amplius opus erit.

17.

Resumamus ad maiorem illustrationem exemplum art. 13, ubi invenimus

$$A' = A''' = 2 + 4R + R^3 + 2R^4 = 2R - 2R^2 - R^3$$
$$A'' = 2 + R + 4R^2 + 2R^3 = -R + 2R^2 - 2R^4$$

Accipiendo pro $R$ valorem $\cos 72^0 + i \sin 72^0$, erit

$$A' = A''' = 2\cos 72^0 - 3\cos 144^0 + i(2\sin 72^0 - \sin 144^0)$$
$$A'' = -3\cos 72^0 + 2\cos 144^0 + i(\sin 72^0 + 2\sin 144^0)$$

Determinabuntur itaque anguli $b', b''$ per aequationes

1) $$\sin b' = \frac{2\sin 72^0 - \sin 144^0}{\sqrt{11}}$$

2) $$\cos b' = \frac{2\cos 72^0 - 3\cos 144^0}{\sqrt{11}}$$

3) $$\operatorname{tang} b' = \frac{2\sin 72^0 - \sin 144^0}{2\cos 72^0 - 3\cos 144^0}$$

4) $$\sin b'' = \frac{\sin 72^0 + 2\sin 144^0}{\sqrt{11}}$$

5) $$\cos b'' = \frac{-3\cos 72^0 + 2\cos 144^0}{\sqrt{11}}$$

6) $$\operatorname{tang} b'' = \frac{\sin 72^0 + 2\sin 144^0}{-3\cos 72^0 + 2\cos 144^0}$$

Quaelibet aequationum 1, 2, 3 sufficit ad determinandum angulum $b'$, si quadrans in quo accipiendus est innotuerit; hoc e signis quantitatum $2\sin 72^0 - \sin 144^0$, $2\cos 72^0 - 3\cos 144^0$ decidi debebit: idem valet de angulo $b''$. In casu nostro $b'$ accipietur inter $0$ et $90^0$, $b''$ inter $90^0$ et $180^0$. Si aequationis 3 numerator et denominator multiplicantur per $-3\cos 72^0 + 2\cos 144^0$, transibit in hanc

$$\operatorname{tang} b' = \tfrac{2}{3}{}_{1}\{-\sin 72^{0} + 13 \sin 144^{0}\}$$

et perinde ex aequatione 6, multiplicato numeratore et denominatore per $2\cos 72^{0} - 3\cos 144^{0}$, prodit

$$\operatorname{tang} b'' = \tfrac{2}{3}{}_{1}\{-13 \sin 72^{0} - \sin 144^{0}\}$$

Hinc fit in numeris

$\operatorname{tang} b' = +0{,}4316226944$, $\log\operatorname{tang} b' = 9{,}6351042715$ $b' = 23^{0}20'46''04603$
$\operatorname{tang} b'' = -0{,}8355819332$, $\log\operatorname{tang} b'' = 9{,}9219890411\,n$ $b'' = 140^{0}7'\,6''52441$

unde derivatur

$$5f' = 186^{0}48'38''61647, \quad f' = 37^{0}21'43''723294$$

Habemus itaque

$$(2,1) = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{\sqrt{11}}{5}\{2\cos 37^{0}\ 21'43''723294 + 2\cos 51^{0}\ 22'41''400558\}$$
$$(2,2) = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{\sqrt{11}}{5}\{2\cos 325^{0}21'43''723294 + 2\cos 267^{0}22'41''400558\}$$
$$(2,4) = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{\sqrt{11}}{5}\{2\cos 253^{0}21'43''723294 + 2\cos 123^{0}22'41''400558\}$$
$$(2,8) = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{\sqrt{11}}{5}\{2\cos 181^{0}21'43''723294 + 2\cos 339^{0}22'41''400558\}$$
$$(2,5) = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{\sqrt{11}}{5}\{2\cos 109^{0}21'43''723294 + 2\cos 195^{0}22'41''400558\}$$

unde invenitur

$$(2,1) = +1{,}6825070652 = 2\cos\frac{360^{0}}{11}$$
$$(2,2) = +0{,}8308299 \qquad = 2\cos\frac{720^{0}}{11}$$
$$(2,4) = \qquad = 2\cos\frac{1440^{0}}{11}$$
$$(2,8) = \qquad = 2\cos\frac{2880^{0}}{11}$$
$$(2,5) = \qquad = 2\cos\frac{1800^{0}}{11}$$

18.

Exemplum aliud nobis suppeditabit aequatio $x^{17} - 1 = 0$, quam per aliam methodum iam in *Disquis. Arithm.* pertractaveramus. Statuemus itaque $n = 17$, $6 = 8$, $g = 3$; hinc respondent

numeris 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16
indices 0 . 14 . 1 . 12 . 5 . 15 . 11 . 10 . 2 . 3 . 7 . 13 . 4 . 9 . 6 . 8

Hinc invenimus

$$A' = A''''''' = \qquad 2R + 2R^2 \qquad + 3R^4 + 4R^5 + 2R^6 + 2R^7$$
$$A'' = A'''''' = 2 + 3R \qquad + R^3 + R^4 + 3R^5 + 4R^6 + R^7$$
$$A''' = A''''' = 3 + 3R + 2R^2 + 3R^3 \qquad + R^5 + 2R^6 + R^7$$

sive, quum in hoc casu fiat $R^4 + 1 = 0$

$$A' = A''''''' = -3 - 2R - 2R^3$$
$$A'' = A'''''' = 1 - 4R^2$$
$$A''' = A''''' = 3 + 2R + 2R^3$$

Statuendo itaque $R = \cos 45^0 + i \sin 45^0$ erit

$$A' = A''''''' = -3 - 2i\sqrt{2}, \quad A'' = A'''''' = 1 - 4i, \quad A''' = A''''' = 3 + 2i\sqrt{2}$$

Invenientur itaque $b'$, $b''$, $b'''$ per aequationes

$$\sin b' = -\sqrt{\tfrac{8}{17}} \quad \sin b'' = -\sqrt{\tfrac{16}{17}} \quad \sin b''' = +\sqrt{\tfrac{8}{17}}$$
$$\cos b' = -\sqrt{\tfrac{9}{17}} \quad \cos b'' = +\sqrt{\tfrac{1}{17}} \quad \cos b''' = +\sqrt{\tfrac{9}{17}}$$
$$\operatorname{tang} b' = +\sqrt{\tfrac{8}{9}} \quad \operatorname{tang} b'' = -4 \quad \operatorname{tang} b''' = +\sqrt{\tfrac{8}{9}}$$

unde deducimus

$$b' = 223^0 18' 49'', \quad b'' = 284^0 2' 10'', \quad b''' = 43^0 18' 49'' = b' - 180^0$$
$$4f' = 550^0 39' 48'', \quad f' = 137^0 39' 57''$$

$$(2,1) = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{\sqrt{17}}{8}\{2\cos 137^0 39' 57'' + 2\cos 52^0 1' 5'' + 2\cos 265^0 38' 52'' + 1\}$$
$$(2,3) = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{\sqrt{17}}{8}\{2\cos 92^0 39' 57'' + 2\cos 322^0 1' 5'' + 2\cos 130^0 38' 52'' - 1\}$$
$$(2,9) = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{\sqrt{17}}{8}\{2\cos 47^0 39' 57'' + 2\cos 232^0 1' 5'' + 2\cos 355^0 38' 52'' + 1\}$$
$$(2,10) = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{\sqrt{17}}{8}\{2\cos 2^0 39' 57'' + 2\cos 142^0 1' 5'' + 2\cos 220^0 38' 52'' - 1\}$$
$$(2,13) = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{\sqrt{17}}{8}\{2\cos 317^0 39' 57'' + 2\cos 52^0 1' 5'' + 2\cos 85^0 38' 52'' + 1\}$$
$$(2,5) = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{\sqrt{17}}{8}\{2\cos 272^0 39' 57'' + 2\cos 322^0 1' 5'' + 2\cos 310^0 38' 52'' - 1\}$$
$$(2,15) = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{\sqrt{17}}{8}\{2\cos 227^0 39' 57'' + 2\cos 232^0 1' 5'' + 2\cos 175^0 38' 52'' + 1\}$$
$$(2,11) = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{\sqrt{17}}{8}\{2\cos 182^0 39' 57'' + 2\cos 142^0 1' 5'' + 2\cos 40^0 38' 52'' - 1\}$$

$$\tfrac{1}{2}(2,1) = +0{,}092268 = \cos\tfrac{4}{17}\,360^0$$
$$\tfrac{1}{2}(2,3) = \quad\quad = \cos\tfrac{5}{17}\,360^0$$
$$\tfrac{1}{2}(2,9) = \quad\quad = \cos\tfrac{2}{17}\,360^0$$
$$\tfrac{1}{2}(2,10) = \quad\quad = \cos\tfrac{6}{17}\,360^0$$
$$\tfrac{1}{2}(2,13) = +0{,}93247 = \cos\tfrac{1}{17}\,360^0$$
$$\tfrac{1}{2}(2,5) = \quad\quad = \cos\tfrac{3}{17}\,360^0$$
$$\tfrac{1}{2}(2,15) = \quad\quad = \cos\tfrac{8}{17}\,360^0$$
$$\tfrac{1}{2}(2,11) = \quad\quad = \cos\tfrac{7}{17}\,360^0$$

* * *

Ab his disquisitionibus generalioribus supra functiones $[r, R]$, quae theoriam secundam aequationum purarum in art. 360 *Disquiss. Ar.* inchoatam magis illustrant et ampliant, ad casuum quorundam specialium considerationem accuratiorem (puta si pro $\sigma$ valores determinati accipiuntur) progredimur; plures hinc investigationes non minus fertiles quam elegantes prodibunt, quarum aliae quidem iam in *Disq. Ar.* (artt. ....) pertractatae erant (sed per methodum diversam), aliae vero tamquam prorsus novae considerandae sunt. Mirum vero nexum inter hasce disquisitiones Arithmeticamque sublimiorem, quae incrementa maxima hactenusque inexspectata inde capit, in commentatione alia mox publici iuris facienda evolvere nobis reservamus. — Ceterum in tota disquisitione sequente supponemus, pro $r$ accipi radicem *propriam* aequationis $x^n - 1 = 0$; et pro $R$ radicem propriam aequationis $R^\sigma - 1 = 0$.

19.

Initium facimus a valore $\sigma = 2$; ubi itaque pro $R$ accipiendus est valor $-1$. Functio itaque nostra $[r, R]$ fit

$$= r - r^g + r^{g^2} - r^{g^3} \ldots\ldots - r^{g^{n-2}}$$

habeturque

$$[r, R] = -[r^g, R] = +[r^{g^2}, R] = -[r^{g^3}, R] \text{ etc.}$$

et generaliter, designante $\lambda$ integrum quemcunque per $n$ non divisibilem

$$[r^\lambda, R] = +[r, R] \quad \text{si } \lambda \text{ est residuum quadraticum ipsius } n,$$
$$[r^\lambda, R] = -[r, R] \quad \text{si } \lambda \text{ est non-residuum quadraticum ipsius } n.$$

Porro patet, si residua quadratica ipsius $n$ inter $1, 2, 3 \ldots n-1$ contenta indefinite designentur per $a$, atque non-residua ipsius $n$ inter eosdem limites per $b$, numeros

$$1,\ g^2,\ g^4 \ldots g^{n-3}$$

si ad ordinem non respiciatur, congruos esse secundum modulum $n$ numeris $a$, et perinde numeros

$$g,\ g^3,\ g^5 \ldots g^{n-2}$$

congruos ipsis $b$, ita ut fiat $[r, R] = \Sigma r^a - \Sigma r^b$.

Quodsi itaque statuimus $\frac{360^\circ}{n} = \omega$, atque $r = \cos k\omega + i \sin k\omega$, erit $[r, R] = \Sigma \cos ak\omega - \Sigma \cos bk\omega + i\Sigma \sin ak\omega - i\Sigma \sin bk\omega$. Iam per art. 14 quadratum functionis $[r, R]$ erit $= +n$ vel $= -n$, prout $n$ est formae $4z+1$ vel $4z-1$, adeoque in casu priori $[r, R] = \pm\sqrt{n}$, in posteriori $[r, R] = \pm i\sqrt{n}$; signum vero quantitati radicali praefixum ambiguum manet. Hinc derivantur summationes sequentes

I. Si $n$ est formae $4z+1$

$$\Sigma \cos ak\omega - \Sigma \cos bk\omega = \pm\sqrt{n}$$
$$\Sigma \sin ak\omega - \Sigma \sin bk\omega = 0$$

II. Si $n$ est formae $4z-1$

$$\Sigma \cos ak\omega - \Sigma \cos bk\omega = 0$$
$$\Sigma \sin ak\omega - \Sigma \sin bk\omega = \pm\sqrt{n}$$

Praeterea quum manifesto totus complexus numerorum $a$, $b$ conveniat cum his $1, 2, 3 \ldots n-1$, fit $\Sigma r^a + \Sigma r^b = r + r^2 + r^3 + \text{etc.} + r^{n-1} = -1$, et proin $\Sigma \cos ak\omega + \Sigma \cos bk\omega = -1$, $\Sigma \sin ak\omega + \Sigma \sin bk\omega = 0$. Hinc e summationibus praecedentibus demanant sequentes:

I. Pro casu priori

$$\Sigma \cos ak\omega = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n}$$
$$\Sigma \cos bk\omega = -\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{n}$$
$$\Sigma \sin ak\omega = \Sigma \sin bk\omega = 0$$

II. Pro casu posteriori

$$\Sigma \cos a k\omega = \Sigma \cos b k\omega = -\tfrac{1}{2}$$
$$\Sigma \sin a k\omega = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n}$$
$$\Sigma \sin b k\omega = \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{n}$$

Hae summationes per methodum haud multum diversam in *Disquiss. Arr.* art. 356 iam sunt erutae; neutra quidem methodus ambiguitatem signi quantitati radicali praefigendi tollere valet, attamen hunc defectum in commentatione peculiari nuper supplevimus, ubi demonstratum est, pro valore $k = 1$ signa superiora in omnibus formulis allatis accipi debere.

---

## BEMERKUNGEN.

Von der ursprünglichen Fortsetzung dieser Abhandlung von art. 19 an, welche der Behandlung specieller Fälle gewidmet war, sind mir noch einige Artikel vorhanden, die sich mit der quadratischen Gleichung beschäftigen, deren Wurzeln die beiden $\frac{n-1}{2}$-gliedrigen Perioden sind; das Manuscript bricht im Anfang der Untersuchung ab, durch welche das Vorzeichen der bei der Auflösung derselben auftretenden Quadratwurzel bestimmt werden sollte; aus der Uebereinstimmung dieses noch vorhandenen Anfangs mit der Abhandlung Summatio quarumdam serierum singularium geht hervor, dass der Verfasser seinen Plan änderte, um die eben erwähnte Bestimmung des Vorzeichens zum Gegenstande einer besondern Abhandlung zu machen. Vergleicht man hiermit das Citat im art. 8 (wo im Manuscript statt der zweiten Ausgabe des Werkes von Lagrange durch ein Versehen die dritte angegeben war), so ergibt sich, dass diese Handschrift aus dem Jahre 1808 stammt. Dass aber die Publication des Vorhergehenden nicht aufgegeben war, lehrt ein bei art. 19 offenbar in späterer Zeit eingeschobenes Blatt, auf welchem eine andere Fortsetzung beginnt und bezüglich der Bestimmung des Vorzeichens schon auf die Abhandlung Summatio etc. verwiesen wird. Diese zweite Fortsetzung, welche aber auch bald abbricht, ist hier mitgetheilt. Der Text des durchaus druckfertigen Manuscriptes ist bei der Herausgabe treu beibehalten; nur in art. 16 mussten die Formeln für den zweiten Fall hinzugefügt werden.

R. Dedekind.

---

# DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES CONCERNANTS

## LES PÉRIODES DES CLASSES DES FORMES BINAIRES DU SECOND DEGRÉ.

---

Théorème I. *Le nombre des classes (pr. pr.) d'un même déterminant, qui élevées à la dignité $P^{me}$, $P$ étant ou un nombre premier ou la puissance d'un nombre premier $= p^{\pi}$, produisent la classe principale $K$, est égal ou à 1 ou à une puissance de ce même nombre premier. $p$.*

*Démonstration.* Soit $(\mathfrak{Q})$ le groupe entier de toutes les classes en question et $n$ leur nombre. Puisque la classe principale $K$ est nécessairement contenue dans $(\mathfrak{Q})$, le théorème est évident, si elle y est la seule. Mais s'il y en a d'autres, le nombre des classes contenues dans la période de chacune sera une puissance de $p$; soit une d'elles $A$, et supposons que sa période $(\mathfrak{A})$ contienne $p^{\alpha}$ classes, qui seront toutes comprises dans $(\mathfrak{Q})$. Or si les classes de cette période $(\mathfrak{A})$ épuisent $(\mathfrak{Q})$. on aura $p^{\alpha} = n$, et le théorème sera démontré; sinon, soit $B$ une classe quelconque de $(\mathfrak{Q})$ non contenue dans $(\mathfrak{A})$, et supposons que sa période soit développée jusqu'à ce qu'on y parvienne à une classe $bB$, qui soit en même temps parmi les classes de $(\mathfrak{A})$, ce qui doit nécessairement arriver, parceque du moins la classe principale est commune à cette période et à $(\mathfrak{A})$. Or supposant que $bB$ soit la *première* classe dans la période de $B$ commune à $(\mathfrak{A})$, ou $b$ le plus petit possible, je dis

1°. Que $b$ sera une puissance de $p$. Car il est évident qu'en faisant $b = p^{6}h$, $bB = iA$ et $hk \equiv 1 \pmod{p^{\pi}}$ (ce qui se pourra) on aura $kbB = p^{6}hkB = p^{6}B = ikA$,

c'est à dire que $p^\beta B$ sera aussi parmi les classes de $(\mathfrak{A})$, d'où il s'ensuit que $h = 1$ et $b = p^\beta$.

2°. Qu'en désignant les classes $K, B, 2B, \ldots (b-1)B$ par $(\mathfrak{B})$, toutes les compositions d'une classe de $(\mathfrak{A})$ avec une classe de $(\mathfrak{B})$ donneront $p^{\alpha+\beta}$ classes différentes. Car en supposant $mA + nB = m'A + n'B$ et $n = n'$, on aura nécessairement $m = m'$; si $n > n'$, on aura $(n-n')B = (m'-m)A$, ce qui est impossible, si l'on n'a pas $n = n'$.

3°. Que ces $p^{\alpha+\beta}$ classes différentes seront comprises sous $(\mathfrak{Q})$, ce qui est évident.

Or, si ces $p^{\alpha+\beta}$ classes épuisent $(\mathfrak{Q})$, le théorème est démontré; sinon, on choisira une autre classe de $(\mathfrak{Q})$ non contenue parmi celles-là, savoir $C$; on continuera sa période jusqu'à ce qu'on y parvienne à une classe déjà comprise sous les classes composées de $(\mathfrak{A})$ et $(\mathfrak{B})$. Par un raisonnement semblable au précédent on démontrera, que l'exposant de cette classe doit être une puissance de $p$, $= p^\gamma$, et que la composition des $p^\gamma$ classes premières de la période de $C$ avec les $p^{\alpha+\beta}$ classes déjà trouvées donnera $p^{\alpha+\beta+\gamma}$ classes différentes toutes comprises dans $(\mathfrak{Q})$. Si ces classes n'épuisent pas encore $(\mathfrak{Q})$, on traitera de la même manière une quatrième classe $D$ etc. et il est évident que $(\mathfrak{Q})$ étant formé d'un nombre fini de classes, ces opérations finiront aussi et qu'on aura $n$ égal à une puissance de $p$. C. Q. F. D.

Théorème. II. *Le nombre de toutes les classes du genre principal étant exprimé par $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc., $a$, $b$, $c$, dénotant des nombres premiers différents, il y aura dans ce genre $a^\alpha$, $b^\beta$, $c^\gamma$ etc. classes, qui étant élevées à la dignité $a^\alpha$, $b^\beta$, $c^\gamma$ etc. resp. produisent la classe principale.*

*Démonstration.* Soient $A, A', A''$ etc. toutes les classes qui élevées à la dignité $a^\alpha$ produisent $K$ et $(\mathfrak{A})$ leur totalité; de même $B, B', B''$ etc. $(\mathfrak{B})$, $C, C', C''$, $(\mathfrak{C})$ etc. etc. Je dis que de la composition de toutes les classes de $(\mathfrak{A})$ avec toutes les classes de $(\mathfrak{B})$, avec toutes les classes de $(\mathfrak{C})$ etc. il proviendra des classes différentes entre elles. Car si $A + B + C \ldots = A' + B' + C' \ldots$ etc., on aura, en faisant $A - A' = A''$, $B - B' = B''$ etc.,

$$A'' + B'' + C'' \text{ etc.} = K$$

donc élevant à la dignité $b^\beta c^\gamma$ etc.; $(b^\beta c^\gamma \ldots) A'' = K$, d'où il s'ensuit facilement

$A'' = K$ et $A = A'$ et de la même manière on aura $B = B'$, $C = C'$ etc. Soit la totalité de ces classes $= (S)$. De plus il est clair que toutes ces classes seront du genre principal. Enfin il ne peut exister aucune classe dans le genre principal qui ne soit comprise sous $(S)$. Soit . . .

---

## BEMERKUNG.

Dieses im Jahre 1801 geschriebene Fragment bezieht sich auf Disq. Arithm. art. 306, IX. Das Wort *dignité* wird hier in einem sonst nicht üblichen Sinne gebraucht.

STERN.

---

[I.]

# DE NEXU INTER MULTITUDINEM CLASSIUM, IN QUAS FORMAE BINARIAE SECUNDI GRADUS DISTRIBUUNTUR, EARUMQUE DETERMINANTEM.

COMMENTATIO PRIOR

SOCIETATI REGIAE EXHIBITA 1834....

---

1.

Triginta tres iam elapsi sunt anni, ex quo principia nexus mirabilis, cui haec commentatio dicata est deteximus, uti iam in fine *Disquisitionum Arithmeticarum* annunciatum est. Sed aliae occupationes ab hac scrutatione per longum tempus detraxerant, donec recentiori tempore ad eam reverti et per novas curas eam ampliare contigit. Attamen quum haec nova Arithmeticae Sublimioris pars limites unius commentationis excedat, haecce prior formis determinantium negativorum dicata erit: formae vero determinantium positivorum, quae tractationem prorsus peculiarem requirunt, commentationi alteri reservatae manere debebunt.

2.

Basis totius argumenti est disquisitio peculiaris circa multitudinem omnium combinationum valorum integrorum, quos duo numeri integri indefiniti $x, y$ intra ambitum praescriptum accipiunt. Manifesto hoc problema etiam sub aspectu geometrico exhiberi potest, ut eruatur multitudo *numerorum complexorum*, quorum repraesentatio intra figuram praescriptam cadit. Indoles figurae ex indole lineae quae eam circumdat, adeoque pendebit vel ab unica aequatione inter coordinatas $x, y$ (quoties peripheria est curva in se rediens) vel a pluribus huiusmodi aequa-

tionibus (quoties constat e pluribus partibus curvis seu rectis), pendebitque ab arbitrio nostro, utrum puncta numeris integris complexis respondentia, si quae forte in ipsa peripheria sint, multitudini annumerare velimus an inde excludere.

In repraesentatione analytica problematis conditiones illius limitationis semper ita exhiberi poterunt, ut functio data variabilium $x, y$ vel una vel plures $P, Q, R$ etc. nancisci debeant valores positivos, vel non-negativos (prout valor 0 vel excluditur vel admittitur).

Ita e. g. si figura praescripta est circulus, cuius radius $= \sqrt{A}$, dum centrum cadit in punctum numero complexo integro respondens, conditio analytica erit, ut $A - xx - yy$ non sit negativus, siquidem, quod semper supponemus, puncta in ipsa peripheria sita retinere placet. Si figura est triangulum, tres functiones lineares $ax + by + c$, $a'x + b'y + c'$, $a''x + b''y + c''$ valores non-negativos habere debent, similiterque in aliis casibus.

3

Solutio problematis *exacta*, generaliter loquendo, ita procedere debet, ut primo e natura conditionum variabilis altera e. g. $x$ intra limites coërceatur, inter quos valores singuli integri deinceps percurrant, et quot valores integri alterius $y$ singulis respondeant, eruere oportet, quorum multitudines dein in summam colligi debent. In casibus specialibus plerumque aderunt artificia specialia ad laborem abbreviandum.

E. g. si figura, ut supra, est circulus, cuius radius $= \sqrt{A}$, sit $r$ integer proxime minor quam $\sqrt{A}$, vel ipse $\sqrt{A}$, si $A$ est quadratum. Perinde sint $r', r'', r'''$ etc. $r^{(r)}$ integri proxime minores quam $\sqrt{(A-1)}$, $\sqrt{(A-4)}$, $\sqrt{(A-9)}$ etc. usque ad $\sqrt{(A-rr)}$. Tunc multitudo quaesita erit

$$= 2r + 1 + 2(2r' + 1) + 2(2r'' + 1) + 2(2r''' + 1) + \text{etc.}$$
$$= 1 + 4r + 4r' + 4r'' + 4r''' + \text{etc.} + 4r^{(r)}$$

Brevior erit in hoc exemplo methodus sequens. Sit $q$ integer proxime minor quam $\sqrt{\tfrac{1}{2}A}$ (vel huic aequalis, quoties est integer), atque $r^{(q+1)}, r^{(q+2)}, r^{(q+3)}$ etc. integri proxime minores quam $\sqrt{(A-(q+1)^2)}$, $\sqrt{(A-(q+2)^2)}$, $\sqrt{(A-(q+3)^2)}$ etc. usque ad $\sqrt{(A-rr)}$. Tunc erit multitudo quaesita

$$= 4qq + 1 + 4r + 8(r^{(q+1)} + r^{(q+2)} + r^{(q+3)} + \text{etc.} + r^{(r)})$$

Per hanc formulam eruta est multitudo

| $A$ | | $A$ | | $A$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 317 | 1000 | 3149 | 10000 | 31417 |
| 200 | 633 | 2000 | 6293 | 20000 | 62845 |
| 300 | 949 | 3000 | 9425 | 30000 | 94237 |
| 400 | 1257 | 4000 | 12581 | 40000 | 125629 |
| 500 | 1581 | 5000 | 15705 | 50000 | 157093 |
| 600 | 1885 | 6000 | 18853 | 60000 | 188453 |
| 700 | 2209 | 7000 | 21993 | 70000 | 219901 |
| 800 | 2521 | 8000 | 25137 | 80000 | 251305 |
| 900 | 2821 | 9000 | 28269 | 90000 | 282697 |
| 1000 | 3149 | 10000 | 31417 | 100000 | 314197 |

4.

Ad propositum nostrum non requiritur determinatio exacta, sed potius indagatio expressionis, quae ad multitudinem exactam quam prope velis accedere potest, dum limites in infinitum ampliantur. Sed ante omnia quum haec aliquid vagi involvant, rem exactius explicare oportet.

Supponemus itaque, functiones $P$, $Q$, $R$ etc. praeter variabiles $x$, $y$ implicare elementum constans $k$, ita ut singulae $P$, $Q$, $R$ etc. sint functiones homogeneae trium quantitatum $x$, $y$, $k$. Hoc pacto figura per aequationes $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ etc. determinata pendebit a $k$, ita ut valoribus diversis ipsius $k$ respondeant figurae similes et respectu initii coordinatarum similiter positae, dimensionesque lineares similes valoribus ipsius $k$, areae valoribus ipsius $kk$ proportionales erunt. Denotetur iam multitudo punctorum intra figuram per $M$, area per $V$, patetque $M$ et $V$, crescente $k$, crescere debere; crescente vero $k$ in infinitum, $M$ et $V$ ad rationem aequalitatis quam proxime velis accedent, vel si elementarem claritatem postulas, proposita quantitate quantumvis parva $\lambda$, semper assignari poterit terminus talis, ut pro quolibet valore ipsius $k$ hunc terminum superante certo $\frac{M}{V}$ iacere debeat inter $1-\lambda$ et $1+\lambda$. Secundum morem suetum hoc ita indicare licet: fieri $M = V$ pro valore infinito ipsius $k$.

In exemplo nostro conditio requisita locum tenet, statuendo $k = \sqrt{A}$, curvaque fit circulus, cuius area $= \pi A$, denotante $\pi$ semicircumferentiam circuli pro radio $= 1$. Numeri supra traditi convergentiam luculenter addigitant.

Ceterum si operae pretium esset, facile demonstrationem illius theorematis antiquo rigore absolvere possemus, quam tamen hocce quidem loco supprimere maluimus ad difficiliora properantes.

5.

In hacce commentatione limes per *unicam* aequationem talem exprimetur $axx + 2bxy + cyy = A$, ita quidem ut $a, b, c$ sint integri, atque $bb - ac$ numerus negativus quem statuemus $= -D$. Manifesto curva figuram definiens erit ellipsis, patetque facile, quadrata semiaxium esse radices aequationis

$$(ac - bb)qq - (a+c)Aq + AA = 0 \quad \text{sive} \quad = A\left(\frac{a+c \pm \sqrt{(4bb + (a-c)^2)}}{2(ac-bb)}\right)$$

Productum harum radicum fit $\frac{AA}{ac-bb} = \frac{AA}{D}$, proin area ellipsis $= \frac{\pi A}{\sqrt{D}}$. Hinc itaque colligitur, multitudinem omnium combinationum valorum integrorum ipsarum $x, y$, pro quibus $axx + 2bxy + cyy$ valorem $A$ non superet, crescente $A$ continuo magis appropinquare ad $\frac{\pi A}{\sqrt{D}}$, et pro $A$ infinito huic valorem aequalem statui debere. Ceterum manifestum est, hocce respectu nihil interesse, utrum combinatio $x = 0$, $y = 0$ reliquis annumeretur, an inde excludatur. Hoc itaque modo multitudo quaesita (in ratione posteriori) nihil aliud est, nisi aggregatum multitudinum repraesentationum singulorum numerorum $1, 2, 3, \ldots A$ per formam binariam secundi gradus $axx + 2bxy + cyy$; et quum inter illos numeros alii omnino per hanc formam repraesentari nequeant, alii plures, alii pauciores repraesentationes admittant, quantitas $\frac{\pi}{\sqrt{D}}$ consideranda erit tamquam valor medius multitudinis repraesentationum numeri positivi indefiniti per formam quamlibet, cuius determinans $= -D$.

6.

Antequam quae hinc sequantur generaliter perscrutemur, ut modus argumentationis facilius penetrari possit, casus quosdam singulares evolvere visum est. Resumamus itaque primo formam $xx + yy$, pro qua itaque multitudo repraesentationum numeri indefiniti valorem medium $= \pi$ nanciscitur. Multitudo vero repraesentationum actualium numeri dati haud difficile e principiis generalibus in Disquisitionibus Arithmeticis stabilitis determinatur. Designemus per $fA$ multitudinem repraesentationum numeri $A$, quae erit $= 4$, si $A = 1$ vel $2$ vel potestas binarii; $= 8$, si $A$ est numerus primus formae $4n+1$, vel productum

talis numeri primi in potestatem binarii; $= 0$, si $A$ est numerus primus formae $4n+3$, vel per talem numerum primum divisibilis, neque vero per ipsius quadratum; denique *generaliter*

$$\text{vel} \quad = 4(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$
$$\text{vel} \quad = 0$$

prout, reducto numero $A$ ad formam $2^\mu Sa^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, designantibus $a, b, c$ etc. numeros primos inaequales formae $4n+1$, $S$ autem productum e numeris primis formae $4n+3$, si qui inter factores numeri $A$ semel pluriesve occurrunt, numerus $S$ est vel quadratum vel non quadratum. Patet itaque, $fA$ unice pendere a modo; quo numeri primi 3, 5, 7, 11, 13 etc. inter factores numeri $A$ reperiuntur, ita ut generaliter statuere oporteat

$$fA = 4(3).(5).(7).(11).(13)\ldots.$$

si valores characterum (3), (5), (7) etc. ita acceptos supponimus, ut denotante $p$ numerum primum sit

primo $(p) = 1$, si $p$ ipsum $A$ non metitur

secundo $(p) = \alpha+1$, si $p$ est formae $4n+1$, atque $p^\alpha$ potestas summa ipsum $A$ metiens

tertio $(p) = 0$, si $p$ est formae $4n+3$, atque exponens potestatis altissimae ipsius $p$ ipsum $A$ metientis est impar; denique

quarto $(p) = 1$, si $p$ est formae $4n+3$, atque exponens potestatis summae ipsius $p$ ipsum $A$ metientis est par.

Manifesto casus primus sub secundo et quarto continetur.

Hoc itaque modo termini progressionis $f1, f2, f3, f4$ etc. valde irregulariter procedunt, etiamsi quo maior multitudo sumatur, eo accuratius valor medius $= \pi$ inde surgere debeat. Aggregatum $f1+f2+f3+\ldots+fA$ denotabimus per $FA$.

7.

Statuamus iam generaliter $fm+f3m = f'm$, perspicieturque facile, fieri

$$f'A = 4(5)'.(7).(11).(13)'\ldots$$

i. e. $f'A$ a relatione ipsius $A$ ad divisorem 3 erit independens, unde seriei $f'1$, $f'2$, $f'3$, $f'4$, $f'5$, $f'6$ etc. irregularitas tum serius incipiet tum longe minor erit. Porro si statuimus

$$f'1+f'2+f'3+f'4+\text{etc.}+f'm = F'm$$

erit

$$F'3A = F3A+f3+f6+f9+\ldots+f9A$$
$$= F3A+FA$$

Hinc facile concluditur crescente $A$ in infinitum, statui debere

$$F'3A = 4\pi A$$

sive valorem medium terminorum seriei $f'1$, $f'2$, $f'3$, $f'4$ etc. esse

$$= \tfrac{4}{3}\pi$$

Simili modo statuendo generaliter $-f'm+f'5m = f''m$, fiet

$$f''A = 4(7)(11)(13)\ldots$$

sive e serie nova $f''1$, $f''2$ etc. abeunt vacillationes a relatione ad numerum 5 pendentes. Statuendoque aggregatum

$$f''1+f''2+f''3+\text{etc.}+f''m = F''m$$

fiet

$$F''5m = -F'm+F'5m$$

unde concluditur crescente $m$ in infinitum, statui debere

$$F''5m = \tfrac{4}{3}\pi.4m$$

sive valorem medium terminorum seriei esse $= \tfrac{4}{5}.\tfrac{4}{3}\pi$.

Si eodem modo ulterius procedimus, progressiones novas formando, dum deinceps factores (7), (11), (13), (17) etc. tollimus, hae continuo magis ad invariabilitatem appropinquabunt, valoresque medii deinceps novos factores $\tfrac{8}{7}$, $\tfrac{12}{11}$, $\tfrac{12}{13}$, $\tfrac{16}{17}$, $\tfrac{20}{19}$ etc. nanciscentur, ubi denominatores erunt numeri primi serie naturali, numeratores vero unitate vel maiores vel minores, prout illi sunt formae $4n-1$, vel $4n+1$. Quare quum hoc processu in infinitum continuato valor con-

stans 4 valori medio continuo propior fieri debeat, habemus

$$4 = \pi . \tfrac{4}{3} . \tfrac{4}{5} . \tfrac{8}{7} . \tfrac{12}{11} . \tfrac{12}{13} \ldots \text{ in inf.}$$

sive

$$\pi = 4 \cdot \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \ldots$$

Si singulae fractiones evolvuntur in series infinitas

$$\frac{3}{3+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$$
$$\frac{5}{5-1} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots$$
$$\frac{7}{7+1} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343} + \ldots$$
etc.

productum facile evolvitur in

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} \ldots$$

cuius seriei summam esse $= \frac{1}{4}\pi$ vulgo notum est. Revera via inversa olim iam hinc aequalitas inter $\frac{1}{4}\pi$ et productum infinitum $\frac{4}{3} . \frac{4}{5} . \frac{8}{7} \ldots$ ab ill. Euler erutum fuerat (*Introd. in analys. inf.* T. I. Cap. XV. art. 285).

8.

Consideremus secundo loco formam $xx + 2yy$, pro qua multitudo repraesentationum numeri indefiniti valorem medium $= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ habebit. Designando per $fA$ multitudinem repraesentationum numeri dati $A$ per istam formam, haec erit $= 2$ pro $A = 1$ vel $A = 2$, vel quoties $A$ est potestas binarii; porro $fA = 4$, quoties $A$ est aliquis e serie numerorum primorum, quorum residuum quadraticum est $-2$, sive qui sunt formae $8k+1$, $8k+3$, puta $A = 3, 11, 17, 19, 41, 43$ etc.; denique $fA = 0$, quoties $A$ est numerus primus, cuius non-residuum quadraticum est $-2$, puta e serie 5, 7, 13, 23, 29, 31 etc. sive vel formae $8k+5$, vel formae $8k+7$. Generaliter vero statui debet

$$\text{vel} \quad fA = 2(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$
$$\text{vel} \quad fA = 0$$

prout reducto numero $A$ ad formam $2^{\mu} S a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$, designantibus $a$, $b$, $c$ etc. numeros primos inaequales formae $8k+1$, $8k+3$, contra $S$ productum e nu-

meris reliquis (formae $8k+5$, $8k+7$), si qui inter factores numeri $A$ habentur, prout $S$ est quadratum vel non quadratum. Hinc per ratiocinia prorsus similia ut in art. praec. a serie $f1$, $f2$, $f3$, $f4$, $f5$ etc. puta 2, 2, 4, 2, 0, 2 etc. deinceps ad alias continuo longius *constantes* progrediemur, quarum valores *medii* sint deinceps $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}$ etc.; progrediemur ita, ut deducamur ad aequationem

$$2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdots$$

ubi denominatores constituunt seriem naturalem numerorum primorum, numeratores vero unitate minores sunt, quoties denominatores sunt formae $8k+1$, vel $8k+3$, contra unitate maiores, quoties denominatores sunt formae $8k+5$ vel $8k+7$.

---

## [II.]

## DE NEXU INTER MULTITUDINEM CLASSIUM, IN QUAS FORMAE BINARIAE SECUNDI GRADUS DISTRIBUUNTUR, EARUMQUE DETERMINANTEM.

### COMMENTATIO PRIOR

SOCIETATI REGIAE EXHIBITA 1837 . . .

---

1.

Triginta sex elapsi sunt anni, ex quo principia nexus mirabilis in hac commentatione tractandi detecta sunt, uti iam in fine *Disquisitionum arithmeticarum* annuntiatum est. Sed aliae occupationes per longum tempus ab hac scrutatione detraxerant, donec recentiori tempore ad eam reverti, et per novas curas eam ampliare contigerit. Attamen quum ambitus huius novae Arithmeticae Sublimioris partis limites unius commentationis transgrediatur, haecce prior formis determinantium negativorum dicata erit: formae autem determinantium positivorum, quae tractationem prorsus peculiarem requirunt, commentationi alteri reservatae manebunt.

2.

Ad propositum nostrum opus erit theoremate per se quidem arithmetico, cuius tamen indolem commodius et clarius per considerationes in forma geometrica exhibendas ob oculos ponere licet.

Proposita in plano indefinito figura per lineam qualemcunque terminata, illius area approximative assignari poterit, si plano in quadrata dispertito multitudo tum eorum quae integra sunt intra figuram, tum eorum quae ambitus figurae secat, numeretur, manifestoque area justo minor vel maior prodibit, prout quadrata posteriora vel omittuntur vel prioribus adnumerantur: si vero quadrata posteriora in limine sita, ad normam qualiscunque principii, partim excludere partim adnumerare placuerit, error modo positivus modo negativus esse poterit, necessario tamen minor quam aggregatum cunctorum quadratorum in limine. Quo minora quadrata accipiantur, eo exactius hoc modo area determinabitur, talemque approximationem in infinitum producere sive quadrata tam parva accipere licebit, ut error quavis quantitate data minor evadat. Quod quamquam iam per se evidens esse videatur, tamen demonstratione rigorosa munire non aspernabimur.

Bina quadrata vel unum punctum angulare, vel duo, vel nullum commune habere possunt; in casu primo et secundo contigua, in tertio disiuncta dicentur. Manifesto quadrata, quae omnia inter se contigua sint, quaterna tantum exstant, adeoque inter quina quadrata diversa duo ad minimum disiuncta inveniri debent. Iam quum distantia inter duo puncta in quadratis disiunctis sita nequeat esse minor quam latus quadratorum, quod per $a$ designabimus, patet, si punctum a quocunque alicuius quadrati loco profectum deinceps quadratum secundum, tertium, quartum traiecerit, tandem ad quintum pervenerit, longitudinem viae certe non esse minorem quam $a$. Et quum simili ratione si linea continuo alia quadrata permeat, pars inter quadratum quintum et nonum, nec non inter nonum et decimum tertium etc. non possit esse minor quam $a$, facile colligimus, lineam quamcunque in se ipsam redeuntem, quae omnino $n$ quadrata diversa attigerit, certo non posse esse minorem quam $\frac{(n-4)a}{4}$. Vice versa itaque linea clausa, cuius longitudo est $= l$, certo plura quam $4+\frac{4l}{a}$ quadrata diversa attigisse non potest. Quorum area $= 4aa + 4al$ quum decrescente $a$ in infinitum quavis quantitate data minor fieri possit, idem a potiori valebit de errore quadraturae, de qua supra diximus.

### 3.

Principium admissionis vel exclusionis quadratorum in limite figurae positorum multis modis diversis condi posset: simplicissimum tamen videtur, tantummodo situm centri cuiusque quadrati respicere, ita ut admittantur quadrata, quorum centra sunt intra figuram, excludantur ea, quorum centra sunt extra figuram, denique arbitrio relinquatur, utrum centra, quae forte in peripheria ipsa sunt, interioribus vel exterioribus adnumerare malimus. Loco centrorum etiam quaevis alia puncta in singulis quadratis similiter sita adoptare possemus.

Hoc pacto res eo redit, ut in plano puncta aequidistantia et in rectis aequidistantibus ita disseminata concipiamus, ut quadrata offerant: quo facto per theorema art. praec. affirmare possumus, multitudinem punctorum in figura contentorum in quadratum distantiae binorum punctorum proximorum multiplicatam areae figurae quam prope velis aequalem evadere, si modo distantia ista satis parva accipiatur, sive ad instar vulgaris loquendi modi, productum illud aream exhibere, si distantia sit infinite parva.

### 4.

Curva per aequationem inter coordinatas orthogonales $p, q$ hancce

$$app + 2bpq + cqq = 1$$

expressa, est sectio conica, et quidem ellipsis, si $a$, $c$ atque $ac - bb$ sunt quantitates positivae: area hac ellipsi circumscripta invenitur $= \frac{\pi}{\sqrt{(ac-bb)}}$. Valor quantitatis $app + 2bpq + cqq$ extra ellipsem ubique fit maior quam 1, intra ellipsem minor quam 1, negativus nullibi.

Concipiatur systema punctorum per planum, in quo ellipsis sita est, ita disseminatorum, ut forment quadrata, quorum latera $= \lambda$ axibus coordinatarum sint parallela, ubi nihil refert, utrum initium coordinatarum sive centrum ellipsis cum aliquo horum punctorum coincidat necne. Sit multitudo punctorum intra ellipsem, adnumeratis si quae sunt in ipsa peripheria, $= m$, eritque per theorema art. praec. $\frac{\pi}{\sqrt{(ac-bb)}}$ limes quantitatis $m\lambda\lambda$, ad quem quam prope velis accedit, decrescente $\lambda$ in infinitum.

Si initium coordinatarum cum aliquo systematis puncto coincidere supponimus, statuendo $p = \lambda x$, $q = \lambda y$, manifesto pro singulis punctis systematis $x$ et $y$ erunt numeri integri, et vice versa quaevis combinatio valorum integrorum

quantitatum $x, y$ respondebit alicui systematis puncto. Hinc numerus $m$ nihil aliud est, nisi multitudo omnium combinationum valorum integrorum quantitatum $x, y$ pro quibus $F$ non fit maior quam $M$, si brevitatis caussa functionem, seu formam secundi ordinis $axx+2bxy+cyy$ per $F$, atque quantitatem $\frac{1}{\lambda\lambda}$ per $M$ denotamus. Determinans huius formae est $bb-ac$, pro quo scribemus $-D$. Hoc pacto theorema nostrum iam ita enunciandum erit.

Theorema I. *Multitudo $m$ omnium combinationum valorum integrorum indeterminatarum $x, y$, pro quibus valor formae determinantis negativi $-D$ limitem $M$ non egreditur, fit $=\frac{\pi M}{\surd D}$, proxime quidem, sed approximatione in infinitum crescente, dum $M$ crescit in infinitum. Vix erit monendum, approximationem infinitam hic (et perinde in sequentibus) non ita intelligendam, ac si differentia inter $\frac{\pi M}{\surd D}$ et $m$ ipsa in infinitum decrescat, sed ratio inter has quantitates ad aequalitatem in infinitum appropinquabit, sive $\frac{\pi M}{m\surd D}-1$ in infinitum decrescet.*

5.

Ad dinumerationem reapse efficiendam ita procedi potest, ut pro singulis valoribus integris ipsius $x$ inter limites $-\surd\frac{cM}{D}$ atque $+\surd\frac{cM}{D}$ sitis bini valores ipsius $y$ aequationi $F=M$ respondentes computentur, unde multitudo integrorum inter hos iacentium sponte habetur. Quum haec multitudo eadem sit pro valoribus oppositis ipsius $x$, laboris dimidia fere parte liberamur. Res ita quoque perfici potest, ut valores ipsius $x$ dinumerentur singulis valoribus ipsius $y$ inter limites $-\surd\frac{aM}{D}$ atque $+\surd\frac{aM}{D}$ respondentes. Per combinationem idoneam utriusque methodi labor amplius sublevari potest, quod tamen fusius hic non exsequimur: sufficiat de casu simplicissimo quaedam adiungere.

Sit forma $F=xx+yy$, sive curva circulus, designentque $r, r', r'', r''' \ldots r^{(r)}$ numeros integros proxime minores quam

$$\surd M,\ \surd(M-1),\ \surd(M-4),\ \surd(M-9)\ \ldots\ \surd(M-rr),$$

vel si quae inter has quantitates sunt integri, hos ipsos. Tunc erit multitudo quaesita

$$m = 2r+1+2(2r'+1)+2(2r''+1)+2(2r'''+1)+\text{etc.}+2(2r^{(r)}+1)$$
$$= 1+4r+4r'+4r''+4r'''+\text{etc.}+4r^{(r)}$$

Expeditius autem idem assequimur, denotando per $q$ integrum proxime

minorem quam $\sqrt{\frac{1}{2}M}$ (vel hanc quantitatem ipsam, si fit numerus integer) adiumento formulae

$$m = 4qq + 1 + 4r + 8(r^{(q+1)} + r^{(q+2)} + r^{(q+3)} + \text{etc.} + r^{(r)})$$

Hoc modo eruta sunt sequentia:

| $M$ | $m$ | $M$ | $m$ | $M$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 317 | 1000 | 3149 | 10000 | 31417 |
| 200 | 633 | 2000 | 6293 | 20000 | 62845 |
| 300 | 949 | 3000 | 9425 | 30000 | 94237 |
| 400 | 1257 | 4000 | 12581 | 40000 | 125629 |
| 500 | 1581 | 5000 | 15705 | 50000 | 157093 |
| 600 | 1885 | 6000 | 18853 | 60000 | 188453 |
| 700 | 2209 | 7000 | 21993 | 70000 | 219901 |
| 800 | 2521 | 8000 | 25137 | 80000 | 251305 |
| 900 | 2821 | 9000 | 28269 | 90000 | 282697 |
| 1000 | 3149 | 10000 | 31417 | 100000 | 314197 |

6.

Theorematí art. 4 maiorem generalitatem conciliamus sequenti modo.

Theorema II. *Si non omnes combinationes valorum integrorum quantitatum $x$, $y$ pro quibus $F$ non egreditur valorem $M$, colligendae sunt, sed tantummodo per saltus, puta eae, ubi $x$ congruus est numero dato $G$ secundum modulum datum $g$, atque $y$ congruus numero dato $H$ secundum modulum datum $h$, harum combinationum multitudo $m'$ exprimetur proxime per $\frac{\pi M}{gh\sqrt{D}}$, approximatione in infinitum aucta, dum $M$ in infinitum crescet.*

Revera statuendo $x = gx' + G$, $y = hy' + H$, patet, $m'$ esse multitudinem omnium combinationum valorum integrorum quantitatum $x'$, $y'$, pro quibus

$$agg(x' + \frac{G}{g})^2 + 2bgh(x' + \frac{G}{g})(y' + \frac{H}{h}) + chh(y' + \frac{H}{h})^2$$

valorem $M$ non egrediatur. Manifesto igitur si in plano systema punctorum perinde quidem ut in art. 4 disseminatum supponimus, attamen ita ut non initium coordinatarum sed punctum, cuius coordinatae sunt $p = \frac{G\lambda}{g}$, $q = \frac{H\lambda}{h}$, cum aliquo systematis puncto coincidat, $m'$ exprimet multitudinem punctorum intra el-

lipsin, cuius aequatio est

$$aggpp + 2bghpq + chhqq = 1$$

iacentium semper adnumeratis si quae sunt in peripheria ipsa. Cuius ellipsis area $= \frac{\pi}{gh\sqrt{(ac-bb)}} = \frac{\pi}{gh\sqrt{D}}$ erit limes, ad quem productum $m\lambda\lambda = \frac{m'}{M}$ in infinitum appropinquabit, decrescente $\lambda$ vel crescente $M$ in infinitum.

Ceterum manifestum est, theorema nostrum complecti casum ubi alterutra indeterminatarum $x, y$ sola per saltus progredi debet, dum alterius valor nulli conditioni subiicietur. Patet enim, hoc idem esse, ac si vel $h$ vel $g$ statuatur $= 1$.

7.

Quae hactenus exposita sunt, ab indole coëfficientium formae $axx + 2bxy + cyy$ sunt independentia: abhinc vero supponemus, hosce coëfficientes esse integros. Ita quaevis combinatio valorum integrorum quantitatum $x, y$ ipsi formae valorem integrum conciliabit, sive repraesentationi alicuius numeri integri per istam formam respondebit. Hinc patet, complexum omnium combinationum valorum integrorum quantitatum $x, y$, per quos forma $F = axx + 2bxy + cyy$ valorem non maiorem limite $M$ nanciscatur, esse idem ac complexum omnium repraesentationum numerorum integrorum limitem $M$ non egredientium, sive usque ad hunc limitem incl., si ipse est numerus integer. Quodsi itaque brevitatis gratia multitudinem repraesentationum diversarum numeri determinati integri $n$ per formam $F$ per $F(n)$, vel quatenus ambiguitas non metuenda simpliciter per $Fn$ denotamus, numerus supra per $m$ expressus erit $= F0 + F1 + F2 + F3 +$ etc. $+ FM$, theoremaque primum sequentem induit formam.

Theorema III. *Aggregatum $F0 + F1 + F2 +$ etc. $+ FM$ proxime exprimitur per $\frac{\pi M}{\sqrt{D}}$, approximatione in infinitum crescente, dum $M$ in infinitum augetur.*

8.

Theorematі tertio repraesentationes *omnium* numerorum spectanti aliud adiungere convenit, solos numeros impares spectans. Manifesto per formam $F$ numeri impares repraesentari nequeunt, si $a$ et $c$ simul sunt numeri pares: quapropter disquisitio ad tres reliquos casus restricta erit.

I. Quoties $a$ est impar, $c$ par, numerus impar repraesentatur, tribuendo ipsi $x$ valorem imparem, valore ipsius $y$ arbitrario manente. Theorema II. ita-

que, statuendo $g=2$, $G=1$, $h=1$, docet, multitudinem omnium combinationum valorum talium ipsorum $x, y$, qui formae valorem imparem limite $M$ non maiorem concilient, approximatione infinita exprimi per $\frac{\pi M}{2\sqrt{D}}$, crescente $M$ in infinitum.

II. Quoties $a$ est par, $c$ impar, ad repraesentationem numeri imparis requiritur, ut $y$ sit impar, unde statuendo $g=1$, $h=2$, $H=1$, ad eandem conclusionem deferimur.

III. Quoties tum $a$ tum $c$ impar est, vel valor impar ipsius $x$ cum valore pari ipsius $y$ combinari debet, vel valor par ipsius $x$ cum valore impari ipsius $y$, ut prodeat valor impar formulae. Multitudo omnium combinationum tum prioris generis tum posterioris, pro quibus valor formae limitem $M$ non egreditur, approximatione infinita per $\frac{\pi M}{4\sqrt{D}}$ exprimitur, quapropter multitudo omnium combinationum, quae formae valores impares limitem $M$ non egredientes producunt, etiam hic approximatione infinita per $\frac{\pi M}{2\sqrt{D}}$ exprimitur.

Iam quum complexus omnium talium combinationum nihil aliud sit, nisi complexus omnium repraesentationum omnium numerorum $1, 3, 5, 7 \ldots M$, quoties $M$ est integer impar, vel $1, 3, 5, 7 \ldots M-1$, quoties $M$ est par, habemus

Theorema IV. *Aggregatum*

$$F1+F3+F5+F7\ldots+FM \quad \text{vel} \quad F1+F3+F5+F7\ldots+F(M-1)$$

*(prout $M$ impar est vel par) approximatione infinita exprimitur per* $\frac{\pi M}{2\sqrt{D}}$, *siquidem $F$ est forma, in qua alteruter coëfficientium $a$, $c$ vel uterque est impar.*

---

## [III.]

Es sei $C$ der Complexus der Repräsentanten sämmtlicher Classen der formae proprie primitivae für den Determinant $-D$. Wir bezeichnen durch $(n)$ die Anzahl aller Darstellungen der Zahl $n$ durch Formen aus dem Complexus $C$. Es sei $p$ eine ungerade Primzahl. Dann ist

1. $(pn) = (n)$ wenn $p$ ein Divisor von $D$

2. $(pn) = (n) + (h)$ } wenn $p$ Nichtdivisor von $D$ { Divisor von $xx + D$

3. $(pn) = -(n) + (h)$ } wenn $p$ Nichtdivisor von $D$ { Nichtdivisor von $xx + D$

wo $n = hp^\mu$, $\mu$ beliebig und $h$ nicht durch $p$ theilbar.

Im Fall 1. ist $(h) = (ph) = (pph) = (p^3 h)$ etc.

2. $(ph) = 2(h)$, $(pph) = 3(h)$, $(p^3 h) = 4(h)$ etc.

3. $(ph) = 0$, $(pph) = (h)$, $(p^3 h) = 0$, $(p^4 h) = (h)$ etc.

* * *

Aus jeder Classis pr. pr. für den Determinans $= -D$, deren Anzahl $= \lambda$, sei eine Form ausgewählt, und der Complexus dieser Formen sei $L$.

Man bezeichne durch $fA$ die Anzahl sämmtlicher Darstellungen der Zahl $A$ durch Formen aus $L$.

Es sei ferner $f(A; p) = f\frac{A}{p^\alpha}$, wenn $p^\alpha$ die höchste Potenz der Primzahl $p$ ist, welche $A$ misst; ferner $f(A; p, q) = f\frac{A}{p^\alpha q^\beta}$, wenn $q$ eine andere Primzahl, deren höchste $A$ messende Potenz $= q^\beta$ und so ferner $f(A; p, q, r) = f\frac{A}{p^\alpha q^\beta r^\gamma}$ wenn $r$ eine dritte Primzahl, deren höchste Potenz $A$ messend $r^\gamma$ ist u. s. w.

---

## [IV.]

Man bezeichne durch $(n)$ die Anzahl der Werthe $x$ aus dem Complexus

$$0, 1, 2, 3, 4 \ldots . p^n - 1$$

für welche $xx - D = xx - ap^\mu$ durch $p^n$ theilbar ist.

1) $\mu$ ungerade z. B. $= 7$. 2) $\mu$ gerade z. B. $= 6$

| 1) | 2) $aNp$ | $aRp$ |
|---|---|---|
| $(1) = 1$ | | |
| $(2) = p$ | $(1) = 1$ | $(1) = 1$ |
| $(3) = p$ | $(2) = p$ | $(2) = p$ |
| $(4) = pp$ | $(3) = p$ | $(3) = p$ |
| $(5) = pp$ | $(4) = pp$ | $(4) = pp$ |

| | | |
|---|---|---|
| $(6) = p^3$ | $(5) = pp$ | $(5) = pp$ |
| $(7) = p^3$ | $(6) = p^3$ | $(6) = p^3$ |
| $(8) = 0$ | $(7) = 0$ | $(7) = 2p^3$ |
| $(9) = 0$ | $(8) = 0$ | $(8) = 2p^3$ |
| etc. | etc. | etc. |

Man mache nun Dann ist

| | |
|---|---|
| $(1) - \frac{(2)}{p} = (1)'$ | $fp = (1)'$ |
| $(2) - \frac{(3)}{p} = (2)'$ | $fpp = 1 + (2)'$ |
| $(3) - \frac{(4)}{p} = (3)'$ | $fp^3 = (1)' + (3)'$ |
| $(4) - \frac{(5)}{p} = (4)'$ | $fp^4 = 1 + (2)' + (4)'$ |
| etc. | etc. |

Es ist folglich, $\frac{p-1}{p}(1 + \frac{fp}{p} + \frac{fpp}{pp} + \frac{fp^3}{p^3} + \text{etc.}) = T$ gesetzt,

$$\frac{p+1}{p} T = 1 + \frac{(1)'}{p} + \frac{(2)'}{pp} + \frac{(3)'}{p^3} + \frac{(4)'}{p^4} + \text{etc.} = 1 + \frac{(1)}{p} = 1 + \frac{1}{p}$$

Also $T = 1$

---

## [V.]

Multitudo classium mediocris *) circa determinantem negativum, $-D$ est proxime

$$= \frac{\pi\sqrt{D}}{4(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{125} + \text{etc.})}$$

Multitudo vera exprimitur sequentibus formulis, ubi brevitatis caussa scribitur $m$ pro multitudine mediocri, $M$ pro vera; $p$, $q$ exprimunt omnes numeros impares primos ipsum $D$ non metientes, ille divisores, hic non-divisores ipsius $\Box + D$; $r$ numeros **) primos ipsum $D$ metientes:

*) [Vergl. *Disquiss. Arithm.* art. 302; die dortige Formel weicht um eine Constante $\delta$ von der hier im Text vorkommenden ab.]

**) [impares.]

I. $M = m$ Prod. ex $\frac{p^3+p^2}{p^3-1}\cdot\frac{q^3-q^2}{q^3-1}\cdot\frac{r^3-r}{r^3-1}$

II. $M = \frac{\pi\sqrt{D}}{4}$ Prod. ex $\frac{p+1}{p}\cdot\frac{q-1}{q}\cdot\frac{rr-1}{rr}$

III. NB. $M = \frac{2\sqrt{D}}{\pi}$ Prod. ex $\frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q+1}$

IV. $M = \sqrt{\left\{\frac{D}{2}\,.\,\text{Prod. ex}\ \frac{p+1}{p-1}\cdot\frac{q-1}{q+1}\cdot\frac{rr-1}{rr}\right\}}$

V. $M = \frac{2\sqrt{D}}{\pi}\left\{1 \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{5} \pm \frac{1}{7} \pm \frac{1}{9}\ \text{etc.}\right\}$

NB. Die Formel III wird unmittelbar aus der Vergleichung der beiden Arten, die darstellbaren Zahlen bis zu einer gewissen Grenze zu zählen, abgeleitet.

---

## [VI.]

Theorema. Multitudo classium, in quas omnes formae binariae proprie primitivae determinantis negativi $-D$*) aequalis est

$$\frac{\pi}{4}\times\sqrt{D}\times\text{Prod. ex.}\,\frac{p-1}{p}\,\frac{q+1}{q}\times\frac{rr-1}{rr}$$

designantibus

$p$ omnes numeros primos**) quorum non-res. est $-D$

$q$ omnes numeros primos**) quorum res. $-D$

$r$ omnes numeros primos**) ipsum $D$ metientes

$$= \frac{\frac{\pi}{4}\sqrt{D}\ \text{Prod. ex}\ \frac{rr-1}{rr}}{1 \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{5}\ \text{etc.}}$$

ubi in denom. signum posit. praeponitur fractt., quarum denom. sunt in forma non divis.; negat. iis, quarum denom. sunt in forma divisorum ipsius $xx+D$; eae vero, quarum denom. ad $D$ non forent primi, omnino omittuntur***).

---

*) [distribuuntur.]

**) [impares.]

***) [Bezeichnet man mit $m$ alle positiven ganzen Zahlen, die relative Primzahlen zu $2D$ sind, und benutzt man das durch Jacobi verallgemeinerte Symbol von Legendre, so ist die obige Regel für die Zeichenbestimmung in folgender Weise zu berichtigen: in der vorhergehenden Formel ist der Nenner

$$= \frac{2\sqrt{D}(1 \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{5} \ldots)}{\pi} = \frac{\operatorname{cotg}\theta \pm \operatorname{cotg} 3\theta \pm \operatorname{cotg} 5\theta \ldots \pm \operatorname{cotg} n\theta}{N : \sqrt{D}}$$

ponendo $\theta = \frac{\pi}{N}$, $N = \left\{{1 \atop 4}\right\} D$ et ponendo pro $n$ omnes numeros ad $D$ primos signo ut supra determinato *).

Pro determ. pos. erit mult. Classium **)

$$= \frac{2\sqrt{D}(1 \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{5} \ldots)}{\log . T + U\sqrt{D}}$$

Designantibus $T, U$ valores minimos quantitatum $t, u$ aequationi $tt - Duu = 1$ satisfacientes

$$= \frac{\log \sin \frac{1}{2}\theta \pm \log \sin \frac{3}{2}\theta \pm \log \sin \frac{5}{2}\theta \text{ etc.}}{\log T + U\sqrt{D}}$$

---

[VII.]

Pro determinante negativo $-p$, qui ***) est numerus primus formae $4n+1$, multitudo classium est †) $\equiv (\alpha - \beta)$, ubi $\alpha$ multitudo residuorum quadraticorum in quadrante primo

$$1 . 2 . 3 \ldots . \tfrac{1}{4}(p-1)$$

$\beta$ multitudo non-residuorum.

---

$$1 \pm \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{5} \text{ etc.} = \Sigma \pm \left(\frac{-4D}{m}\right)\frac{1}{m}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Zahl $m$ ein Product aus einer geraden oder ungeraden Anzahl (gleicher oder ungleicher) Primzahlen ist; dagegen ist im Zähler der nachfolgenden Formel

$$1 \pm \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{5} \ldots = \Sigma \left(\frac{-D}{m}\right)\frac{1}{m}]$$

*) [Siehe die weiter unten folgende Note zu diesem Fragment.]

**) [In der nachfolgenden Formel bedeutet $D$ den positiven Determinanten, und es ist

$$1 \pm \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{5} \ldots = \Sigma \left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}]$$

***) [d. h. wenn $p$ eine positive Primzahl von der Form $4n+1$ ist.]

†) [multitudo classium est $= 2(\alpha - \beta)$.]

[VIII.]

$b \equiv 2m + a - 1 \pmod{8}$

wo $m$ die [halbe] Anzahl der Classen für den Determinans $-p$

| $p$ | $m$ | $a$ | $b$ | $f$ | $\frac{2m+a-1-b}{8}$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 2 | + 1 | − 4 | − 4 | + 1 | 3 | 2 |
| 41 | 4 | + 5 | + 4 | + 9 | + 1 | 3 | 4 |
| 73 | 2 | − 3 | − 8 | + 27 | + 1 | 1 | 6 |
| 89 | 6 | + 5 | − 8 | + 34 | + 3 | 9 | 2 |
| 97 | 2 | + 9 | + 4 | + 22 | + 1 | 5 | 6 |
| 113 | 4 | − 7 | + 8 | + 15 | − 1 | 9 | 4 |
| 137 | 4 | − 11 | + 4 | + 37 | − 1 | 3 | 8 |
| 193 | 2 | − 7 | + 12 | + 81 | − 2 | 11 | 6 |
| 233 | 6 | + 13 | + 8 | + 144 | + 2 | 15 | 2 |
| 241 | 6 | + 15 | + 4 | + 64 | − 1 | 13 | 6 |
| 257 | 8 | + 1 | + 16 | + 16 | 0 | 15 | 4 |
| 281 | 10 | + 5 | − 16 | + 53 | + 5 | 9 | 10 |
| 313 | 4 | + 13 | − 12 | − 25 | + 1 | 5 | 12 |
| 337 | 4 | + 9 | + 16 | − 148 | 0 | 7 | 12 |
| 353 | 8 | + 17 | + 8 | + 42 | + 3 | 15 | 8 |
| 5 | 1 | + 1 | + 2 | + 2 | 0 | | |
| 13 | 1 | − 3 | − 2 | + 5 | 0 | | |
| 29 | 3 | + 5 | + 2 | + 12 | + 1 | | |
| 37 | 1 | + 1 | − 6 | − 6 | + 1 | | |
| 53 | 3 | − 7 | − 2 | + 23 | 0 | | |
| 61 | 3 | + 5 | − 6 | + 11 | + 2 | | |
| 101 | 7 | + 1 | − 10 | − 10 | + 3 | | |
| 109 | 3 | − 3 | + 10 | + 33 | − 1 | | |
| 149 | 7 | − 7 | − 10 | + 44 | + 2 | | |
| 157 | 3 | − 11 | − 6 | − 28 | 0 | | |
| 173 | 7 | + 13 | + 2 | + 80 | + 3 | | |
| 181 | 5 | + 9 | + 10 | − 19 | + 1 | | |
| 197 | 5 | + 1 | − 14 | − 14 | + 3 | | |
| 229 | 5 | − 15 | + 2 | − 107 | − 1 | | |
| 269 | 11 | + 13 | + 10 | − 82 | + 3 | | |
| 277 | 3 | + 9 | + 14 | − 60 | 0 | | |
| 293 | 9 | + 17 | + 2 | + 138 | + 4 | | |
| 317 | 5 | − 11 | + 14 | + 114 | − 2 | | |
| 349 | 7 | + 5 | + 18 | − 136 | 0 | | |
| 373 | 5 | − 7 | + 18 | + 104 | − 2 | | |
| 389 | 11 | + 17 | − 10 | − 115 | + 6 | | |
| 397 | 3 | − 19 | − 6 | + 63 | − 1 | | |

## [IX.]

### *Vertheilung der quadratischen Reste in Octanten.*

$p$ Primzahl; $(r)$ Anzahl der quadratischen Reste von $p$, welche zwischen $(r-1)\frac{p}{8}$ und $r\frac{p}{8}$ liegen.

Erster Fall; $p = 8n+1$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-2p$.

$$(1) = (8) = \tfrac{1}{4}(2n+t+u)$$

$$(2) = (4) = (5) = (7) = \tfrac{1}{4}(2n+t-u)$$

$$(3) = (6) = \tfrac{1}{4}(2n-3t+u)$$

| $p$ | $2n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (3) | $p$ | $2n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 233 | 58 | 6 | 4 | 17 | 15 | 11 |
| 41 | 10 | 4 | 2 | 4 | 3 | 0 | 241 | 60 | 6 | 10 | 19 | 14 | 13 |
| 73 | 18 | 2 | 8 | 7 | 3 | 5 | 257 | 64 | 8 | 8 | 20 | 16 | 12 |
| 89 | 22 | 6 | 4 | 8 | 6 | 2 | 281 | 70 | 10 | 4 | 21 | 19 | 11 |
| 97 | 24 | 2 | 10 | 9 | 4 | 7 | 313 | 78 | 4 | 18 | 25 | 16 | 21 |
| 113 | 28 | 4 | 4 | 9 | 7 | 5 | 337 | 84 | 4 | 12 | 25 | 19 | 21 |
| 137 | 34 | 4 | 6 | 11 | 8 | 7 | 353 | 88 | 8 | 12 | 27 | 21 | 19 |
| 193 | 48 | 2 | 10 | 15 | 10 | 13 | 401 | 100 | 10 | 6 | 29 | 26 | 19 |

Zweiter Fall; $p = 8n+5$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-2p$.

$$(1) = (3) = (6) = (8) = \tfrac{1}{4}(2n-t+u)$$

$$(2) = (7) = \tfrac{1}{4}(2n+3t-u+2)$$

$$(4) = (5) = \tfrac{1}{4}(2n-t-u+2)$$

| $p$ | $2n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (4) | $p$ | $2n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (4) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 181 | 44 | 5 | 9 | 12 | 13 | 8 |
| 13 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 197 | 48 | 5 | 5 | 12 | 15 | 10 |
| 29 | 6 | 3 | 1 | 1 | 4 | 1 | 229 | 56 | 5 | 13 | 16 | 15 | 10 |
| 37 | 8 | 1 | 5 | 3 | 2 | 1 | 269 | 66 | 11 | 5 | 15 | 24 | 13 |
| 53 | 12 | 3 | 3 | 3 | 5 | 2 | 277 | 68 | 3 | 11 | 19 | 17 | 14 |
| 61 | 14 | 3 | 5 | 4 | 5 | 2 | 293 | 72 | 9 | 9 | 18 | 23 | 14 |
| 101 | 24 | 7 | 3 | 5 | 11 | 4 | 317 | 78 | 5 | 7 | 20 | 22 | 17 |
| 109 | 26 | 3 | 5 | 7 | 8 | 5 | 349 | 86 | 7 | 13 | 23 | 24 | 17 |
| 149 | 36 | 7 | 3 | 8 | 14 | 7 | 373 | 92 | 5 | 13 | 25 | 24 | 19 |
| 157 | 38 | 3 | 13 | 12 | 9 | 6 | 389 | 96 | 11 | 7 | 23 | 31 | 20 |
| 173 | 42 | 7 | 5 | 10 | 15 | 8 | 397 | 98 | 3 | 21 | 29 | 22 | 19 |

Dritter Fall; $p = 8n + 3$.

$t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-2p$.

$$(1) = (4) = (7) = \tfrac{1}{4}(2n + t - u)$$
$$(2) = (5) = (8) = \tfrac{1}{4}(2n - t + u)$$
$$(3) \quad = \tfrac{1}{4}(2n + t + u + 2)$$
$$(6) \quad = \tfrac{1}{4}(2n - t - u + 2)$$

| $p$ | $2n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (3) | (6) | $p$ | $2n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (3) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 163 | 40 | 3 | 11 | 8 | 12 | 14 | 7 |
| 11 | 2 | 3 | 1 | 4 | 0 | 2 | 0 | 179 | 44 | 15 | 3 | 14 | 8 | 16 | 7 |
| 19 | 4 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 0 | 211 | 52 | 9 | 5 | 14 | 12 | 17 | 10 |
| 43 | 10 | 3 | 5 | 2 | 3 | 5 | 1 | 227 | 56 | 15 | 7 | 16 | 12 | 20 | 9 |
| 59 | 14 | 9 | 3 | 5 | 2 | 7 | 1 | 251 | 62 | 21 | 7 | 19 | 12 | 23 | 9 |
| 67 | 16 | 3 | 7 | 3 | 5 | 7 | 2 | 283 | 70 | 9 | 15 | 16 | 19 | 24 | 12 |
| 83 | 20 | 9 | 5 | 6 | 4 | 9 | 2 | 307 | 76 | 9 | 17 | 17 | 21 | 26 | 13 |
| 107 | 26 | 9 | 3 | 8 | 5 | 10 | 4 | 331 | 82 | 9 | 11 | 20 | 21 | 26 | 16 |
| 131 | 32 | 15 | 3 | 11 | 5 | 13 | 4 | 347 | 86 | 15 | 5 | 24 | 19 | 27 | 17 |
| 139 | 34 | 9 | 7 | 9 | 8 | 13 | 5 | 379 | 94 | 9 | 11 | 23 | 24 | 29 | 19 |

Vierter Fall; $p = 8n + 7$.

$t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-2p$.

$$(1) \quad = \tfrac{1}{4}(2n + 2t - u)$$
$$(2) = (3) = (5) = \tfrac{1}{4}(2n + u + 2)$$
$$(4) = (6) = (7) = \tfrac{1}{4}(2n - u + 2)$$
$$(8) \quad = \tfrac{1}{4}(2n - 2t + u)$$

| $p$ | $2n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (4) | (8) | $p$ | $2n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (4) | (8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 191 | 46 | 13 | 4 | 17 | 13 | 11 | 6 |
| 23 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 199 | 48 | 9 | 10 | 14 | 15 | 10 | 10 |
| 31 | 6 | 3 | 4 | 2 | 3 | 1 | 1 | 223 | 54 | 7 | 16 | 13 | 18 | 10 | 14 |
| 47 | 10 | 5 | 4 | 4 | 4 | 2 | 1 | 239 | 58 | 15 | 4 | 21 | 16 | 14 | 8 |
| 71 | 16 | 7 | 2 | 7 | 5 | 4 | 1 | 263 | 64 | 13 | 6 | 21 | 18 | 15 | 11 |
| 79 | 18 | 5 | 4 | 6 | 6 | 4 | 3 | 271 | 66 | 11 | 12 | 19 | 20 | 14 | 14 |
| 103 | 24 | 5 | 10 | 6 | 9 | 4 | 6 | 311 | 76 | 19 | 6 | 27 | 21 | 18 | 11 |
| 127 | 30 | 5 | 8 | 8 | 10 | 6 | 7 | 359 | 88 | 19 | 6 | 30 | 24 | 21 | 14 |
| 151 | 36 | 7 | 6 | 11 | 11 | 8 | 7 | 367 | 90 | 9 | 20 | 22 | 28 | 18 | 23 |
| 167 | 40 | 11 | 6 | 14 | 12 | 9 | 6 | 383 | 94 | 17 | 12 | 29 | 27 | 21 | 18 |

## [X.]

### *Vertheilung der quadratischen Reste in Zwölftel.*

$p$ Primzahl; $(r)$ Anzahl der quadratischen Reste von $p$, welche zwischen $\frac{r-1}{12}p$ und $\frac{r}{12}p$ liegen.

Erster Fall; $p = 24n+1$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$

$4u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-3p$

$$(1) = (12) = \tfrac{1}{6}(6n+3t+2u)$$
$$(2) = (4) = (6) = (7) = (9) = (11) = \tfrac{1}{6}(6n-3t+2u)$$
$$(3) = (5) = (8) = (10) = \tfrac{1}{6}(6n+3t-4u)$$

| $p$ | $n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 73 | 3 | 2 | 3 | 5 | 3 | 2 |
| 97 | 4 | 2 | 3 | 6 | 4 | 3 |
| 193 | 8 | 2 | 6 | 11 | 9 | 5 |
| 241 | 10 | 6 | 3 | 14 | 8 | 11 |

Zweiter Fall; $p = 24n+13$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$4u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-3p$.

$$(1) = (3) = (10) = (12) = \tfrac{1}{2}(2n+1+t)$$
$$(2) = (6) = (7) = (11) = \tfrac{1}{2}(2n+1-t)$$
$$(4) = (9) = \tfrac{1}{2}(2n+1-t+2u)$$
$$(5) = (8) = \tfrac{1}{2}(2n+1+t-2u)$$

| $p$ | $n$ | $t$ | $u$ | (1) | (2) | (4) | (5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 37 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 0 |
| 61 | 2 | 3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 109 | 4 | 3 | 3 | 6 | 3 | 6 | 3 |
| 157 | 6 | 3 | 4 | 8 | 5 | 9 | 4 |
| 181 | 7 | 5 | 3 | 10 | 5 | 8 | 7 |
| 229 | 9 | 5 | 3 | 12 | 7 | 10 | 9 |

Dritter Fall; $p = 24n+5$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-3p$.

$(1) = (2) = (6) = (7) = (11) = (12) = n$
$(3) = (10) = \frac{1}{2}(2n+1+t)$
$(4) = (9) = \frac{1}{2}(2n-t+u)$
$(5) = (8) = \frac{1}{2}(2n+1-u)$

| $p$ | $n$ | $t$ | $u$ | (1) | (3) | (4) | (5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 29 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| 53 | 2 | 3 | 5 | 2 | 4 | 3 | 0 |
| 101 | 4 | 7 | 5 | 4 | 8 | 3 | 2 |
| 149 | 6 | 7 | 7 | 6 | 10 | 6 | 3 |
| 173 | 7 | 7 | 9 | 7 | 11 | 8 | 3 |
| 197 | 8 | 5 | 11 | 8 | 11 | 11 | 3 |
| 269 | 11 | 11 | 7 | 11 | 17 | 9 | 8 |

Vierter Fall; $p = 24n+17$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;
$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-3p$.

$(1) = (2) = (6) = (7) = (11) = (12) = \frac{1}{4}(6n+3+u)$
$(3) = (10) = \frac{1}{8}(6n+6+3t-2u)$
$(4) = (9) = \frac{1}{8}(6n+3-3t+u)$
$(5) = (8) = \frac{1}{8}(6n+6-2u)$

| $p$ | $n$ | $t$ | $u$ | (1) | (3) | (4) | (5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 0 | 2 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 41 | 1 | 4 | 3 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 89 | 3 | 6 | 3 | 4 | 6 | 1 | 3 |
| 113 | 4 | 4 | 9 | 6 | 4 | 4 | 2 |
| 137 | 5 | 4 | 9 | 7 | 5 | 5 | 3 |
| 233 | 9 | 6 | 15 | 12 | 8 | 9 | 5 |
| 257 | 10 | 8 | 9 | 12 | 12 | 8 | 8 |

BEMERKUNGEN ZUR ABHANDLUNG

# DE NEXU INTER MULTITUDINEM CLASSIUM, IN QUAS FORMAE BINARIAE SECUNDI GRADUS DISTRIBUUNTUR, EARUMQUE DETERMINANTEM.

## Zu I. und II.

Die zweite Formel für die Anzahl der innerhalb des Kreises liegenden Punkte (I. art. 3 und II. art. 5) ergiebt sich aus der Betrachtung des in denselben eingeschriebenen Quadrates, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel sind; die Vergleichung beider Formeln führt zu dem auch arithmetisch leicht zu beweisenden Satze

$$r' + r'' + \ldots . + r^{(\varrho)} = \varrho\varrho + r^{(\varrho+1)} + r^{(\varrho+2)} + \ldots + r^{(r)}$$

aus welchem sich wieder die Richtigkeit der ersten von den beiden folgenden Regeln ergiebt, die sich auf einem besondern Blatt vorfanden:

„Auflösungen der Gleichung $xx + yy \leq A$; formula

$$1 + 4\sqrt{A} + 4\sqrt{\tfrac{1}{2}A} + 8\,\Sigma(\sqrt{(A - nn)} - n)$$

wo bei jeder Wurzel der Bruch weggelassen und von $n = 1$ bis $n = \sqrt{A}$ „(soll heissen $\sqrt{\tfrac{1}{2}A}$)“ summirt wird.

Andre Formel

$$1 + 4\left\{A - \frac{A}{3} + \frac{A}{5} - \frac{A}{7} + \frac{A}{9} - \frac{A}{11} \ldots\right\}$$

wo bei jedem Theil der Bruch weggelassen.“

Diese letztere Formel folgt aus dem später (I. art. 8) zur Anwendung kommenden Satze über die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen einer bestimmten Zahl durch die Form $xx + yy$ (vergl. Disqq. Arithm. art. 182, Note), welcher leicht in den folgenden umgeformt werden kann: die Anzahl der verschiedenen Darstellungen einer positiven ganzen Zahl $m$ durch die Form $xx + yy$ ist $= 4(a - b)$, wo $a$, $b$ die Anzahlen der Divisoren von $m$ bedeuten, welche resp. von der Form $4n + 1$, $4n + 3$ sind. Aus der Vergleichung

dieser arithmetischen Formel mit der (in I. art. 5 oder II. art. 4) durch geometrische Betrachtungen gewonnenen mittlern Darstellungsanzahl erhält man leicht und in aller Strenge das bekannte Resultat

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

welches in der Abhandlung (I. art. 7) durch eine ähnliche Vergleichung, aber mit Hülfe unendlicher Producte abgeleitet wird.

---

## Zu III. und IV.

Ist $C$ der Complex aller positiven, nicht eigentlich-äquivalenten formae proprie primitivae von negativem Determinant $-D$, und legt man den Variabeln dieser Formen je zwei Werthe bei, welche relative Primzahlen zu einander sind, so ist die Anzahl aller Darstellungen einer positiven ganzen Zahl $m$ gleich $\varepsilon\psi(m)$, wo $\varepsilon$ die Anzahl der Auflösungen der Gleichung $tt + Duu = 1$, und $\psi(m)$ die Anzahl derjenigen Wurzeln $n$ der Congruenz $nn + D \equiv 0 \pmod{m}$ bedeutet, für welche die drei Zahlen $m$, $2n$ und $\frac{nn+D}{m}$ ohne gemeinschaftlichen Divisor sind (Disqq. Arithm. art. 180). Der Factor $\varepsilon$ ist $= 4$ für $D = 1$, in allen andern Fällen $= 2$. Ist ferner $m = p^\pi p'^{\pi'} p''^{\pi''} \ldots$, wo $p, p', p'' \ldots$ von einander verschiedene Primzahlen bedeuten, so ist $\psi(m) = \psi(p^\pi)\psi(p'^{\pi'})\psi(p''^{\pi''})\ldots$; bedeutet $\mathfrak{A}(m)$ die Anzahl aller Wurzeln $n$ der Congruenz $nn + D \equiv 0 \pmod{m}$, und bedient man sich des von Legendre eingeführten, von Jacobi verallgemeinerten Zeichens, so ist $\psi(p^\pi) = \mathfrak{A}(p^\pi) = 1 + \left(\frac{-D}{p}\right)$, wenn $p$ nicht in $2D$ aufgeht, sonst aber $= \mathfrak{A}(p^\pi) - \frac{1}{p}\mathfrak{A}(p^{\pi+1})$; die Anzahl $\mathfrak{A}(p^\pi)$ lässt sich immer leicht bestimmen (Disqq. Arithm. art. 104), für die Folge reicht aber die Bemerkung aus, dass $\mathfrak{A}(p^\pi)$ immer von $\pi$ unabhängig wird, sobald $\pi$ eine gewisse Grösse überschreitet.

Legt man den Variabeln der in dem Complex $C$ enthaltenen Formen alle ganzzahligen Werthe ohne Ausnahme bei (Disqq. Arithm. art. 181), so wird die Anzahl $(m)$ aller Darstellungen der Zahl $m$ gleich $\varepsilon f(m)$, wo $f(m) = \Sigma\psi\left(\frac{m}{\mu\mu}\right)$ ist, und das Summenzeichen sich auf alle quadratischen Divisoren $\mu\mu$ der Zahl $m$ bezieht. Hieraus folgt unmittelbar

$$f(m) = f(p^\pi p'^{\pi'} p''^{\pi''} \ldots) = f(p^\pi) f(p'^{\pi'}) f(p''^{\pi''}) \ldots$$

und

$$f(p^\pi) = \psi(p^\pi) + \psi(p^{\pi-2}) + \psi(p^{\pi-4}) + \ldots$$

welche Reihe so lange fortzusetzen ist, als die Exponenten $\pi, \pi-2, \pi-4 \ldots$ nicht negativ werden. Wenn $p$ nicht in $2D$ aufgeht, so folgt hieraus

$$f(p^\pi) = 1 + \left(\frac{-D}{p}\right) + \left(\frac{-D}{pp}\right) + \ldots + \left(\frac{-D}{p^\pi}\right)$$

und allgemein, wenn $m$ relative Primzahl zu $2D$ ist,

$$f(m) = \Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Divisoren $n$ der Zahl $m$ bezieht.

Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit der im Text (III, 1, 2, 3) aufgestellten Sätze über die Anzahl $(m)$, wenn man für den ersten derselben noch die Bedingung hinzufügt, dass $D$ nicht durch $pp$ theilbar sein darf (die Bestimmung der Classenanzahl ist schon in den Disqq. Arithm. art. 256 auf den Fall zurückgeführt, in welchem $D$ durch kein Quadrat theilbar ist). Zugleich findet man, auch ohne Rücksicht auf diese Beschränkung, dass die unendliche Reihe

$$1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(pp)}{pp}+\frac{f(p^3)}{p^3}+\ldots$$

den Werth

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \text{ oder } \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-D}{p}\right)\frac{1}{p}}$$

hat, je nachdem $2D$ durch die Primzahl $p$ theilbar oder nicht theilbar ist.

## Zu V.

Die zu der Formel III hinzugefügte Bemerkung gibt den Weg an, auf welchem der Verf. zur Bestimmung der Anzahl $k$ der in dem Complex $C$ enthaltenen Formen gelangt ist. Aus geometrischen Betrachtungen (vergl. I. art. 5 und II. art. 4) ergiebt sich, dass der Grenzwerth, welchem sich der Quotient

$$\frac{(1)+(2)+(3)+\ldots+(m)}{m}$$

mit unbegrenzt wachsendem $m$ nähert, d. h. die mittlere Anzahl der Darstellungen einer unbestimmten positiven ganzen Zahl

$$=k\frac{\pi}{\sqrt{D}}$$

ist; ein zweiter Ausdruck für denselben Grenzwerth lässt sich auf verschiedene Arten aus der Natur der im Vorhergehenden bestimmten Anzahl $(m)=\varepsilon f(m)$ der Darstellungen der Zahl $m$ ableiten. Der zu diesem Zweck von dem Verf. zunächst eingeschlagene Weg scheint nach den vorhandenen Bruchstücken (I. artt. 7, 8; III und IV) folgender gewesen zu sein.

Ist $\theta(m)$ irgend eine Function der positiven ganzen Zahl $m$, und $p$ irgend eine Primzahl, so kann man aus $\theta(m)$ immer eine neue Function $\theta'(m)$ ableiten, deren Werth unabhängig davon ist, ob und wie oft $p$ als Factor in $m$ enthalten ist, und welche für alle durch $p$ nicht theilbaren Zahlen $m$ mit $\theta(m)$ übereinstimmt; eine solche Function erhält man, wenn man $\theta'(m)=\theta\left(\frac{m}{p^\pi}\right)$ setzt, wo $p^\pi$ die höchste in $m$ aufgehende Potenz von $p$ bedeutet; und man kann sagen, dass die Function $\theta'(m)$ aus $\theta(m)$ durch Elimination der Primzahl $p$ entsteht. Bildet man auf diese Weise aus $f(m)$ eine neue Function $f'(m)$ durch Elimination der Primzahl 2, aus dieser die Function $f''(m)$ durch Elimination von 3 u. s. f., so wird jede folgende dieser Functionen einen regelmässigern Verlauf haben, als die vorhergehenden; eliminirt man eine Primzahl nach der andern, wie sie ihrer Grösse nach auf einander folgen, so wird eine solche Function

$\theta(m)$ für unendlich viele Werthe von $m$ den Werth $f(1) = 1$ haben, und namentlich für alle diejenigen Werthe von $m$, welche kleiner sind als die zuletzt eliminirte Primzahl. Durch unendliche Fortsetzung dieses Processes nähert man sich immer mehr der Function $f^{\infty}(m)$, welche für alle Werthe von $m$ den Werth 1 hat, und deren mittlerer Werth folglich ebenfalls $= 1$ ist. Gelingt es nun den mittlern Werth irgend einer Function $\theta(m)$ durch denjenigen der nächstfolgenden $\theta'(m)$ auszudrucken, so wird man auch den mittlern Werth der Function $f(m)$ durch eine unendliche Kette von Operationen finden können.

Ist $p$ die Primzahl, durch deren Elimination $\theta'(m)$ aus $\theta(m)$ entsteht, so ist $\theta(m) = \theta'(m)f(p^{\pi})$, wenn $p^{\pi}$ wieder die höchste in $m$ aufgehende Potenz von $p$ bedeutet. Für den Fall, dass $p$ nicht in $2D$ angeht, findet man hieraus leicht, dass

$$\theta'(m) = \theta(mp) - \left(\frac{-D}{p}\right)\theta(m)$$

ist; setzt man zur Abkürzung

$$\Theta(m) = \theta(1) + \theta(2) + \ldots + \theta(m)$$
$$\Theta'(m) = \theta'(1) + \theta'(2) + \ldots + \theta'(m)$$

so ergiebt sich

$$\Theta'(mp) = \Theta(mp) - \left(\frac{-D}{p}\right)\Theta(m)$$

und hieraus, wenn man mit $\omega$, $\omega'$ resp. die mittlern Werthe der Functionen $\theta(m)$, $\theta'(m)$ bezeichnet,

$$\omega = \frac{\omega'}{1 - \left(\frac{-D}{p}\right)\frac{1}{p}}$$

Wenn aber die Primzahl $p$ in $2D$ aufgeht, so findet zwar zwischen den Functionen $\theta(m)$ und $\theta'(m)$ im Allgemeinen keine so einfache Beziehung mehr Statt; indessen ergiebt sich auf ähnliche Art leicht, dass in diesem Fall $\omega = \omega'$ ist. Ein anderer Weg, die Beziehung zwischen $\omega$ und $\omega'$ in beiden Fällen abzuleiten, ist folgender. Setzt man

$$\vartheta(m) = \Sigma\,\theta(\mu)$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Zahlen $\mu$ bezieht, die nicht durch $p$ theilbar und ausserdem nicht grösser als $m$ sind, und bezeichnet man mit $m'$, $m''$, $m'''$ . . . resp. die grössten in $\frac{m}{p}$, $\frac{m'}{p}$, $\frac{m''}{p}$ . . . enthaltenen ganzen Zahlen, so ist

$$\Theta(m) = \vartheta(m) + \vartheta(m')f(p) + \vartheta(m'')f(pp) + \vartheta(m''')f(p^3) + \ldots$$
$$\Theta'(m) = \vartheta(m) + \vartheta(m') + \vartheta(m'') + \vartheta(m''') + \ldots$$

und hieraus folgt

$$\frac{\omega}{\omega'} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left\{1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(pp)}{pp} + \frac{f(p^3)}{p^3} + \ldots\right\}$$

was mit dem eben gefundenen Resultat übereinstimmt (vergl. die Note zu III und IV).

Der mittlere Werth der Function $f(m)$ ist daher gleich dem unendlichen Product

$$\Pi\,\frac{1}{1 - \left(\frac{-D}{p}\right)\frac{1}{p}}$$

in welchem $p$ alle in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen durchlaufen muss, und hieraus folgt

$$k = \frac{2\sqrt{D}}{\pi} \Pi \frac{1}{1 - \left(\frac{-D}{p}\right)\frac{1}{p}}$$

Hinsichtlich der Strenge dieser Deduction bleibt aber ein Bedenken übrig, welches sich auf die Methode bezieht, den mittlern Werth der Function $f(m)$ durch successive Elimination aller Primzahlen zu bestimmen; denn wenn es auch einleuchtet, dass der Werth der durch Elimination der ersten $n$ Primzahlen erhaltenen Function $f^{(n)}(m)$ mit dem der Function $f^{\infty}(m) = 1$ übereinstimmt, so lange $m$ kleiner bleibt als die zuletzt eliminirte Primzahl, und dass also durch die Wahl eines hinreichend grossen Werthes $n$ diese Uebereinstimmung bis zu jeder vorher vorgeschriebenen Grösse der Zahl $m$ getrieben werden kann, so ist hiermit allein doch keineswegs erwiesen, dass mit unbegrenzt wachsendem $n$ der mittlere Werth der Function $f^{(n)}(m)$ sich dem mittlern Werthe der Function $f^{\infty}(m)$, d. h. dem Werthe $1$ unbegrenzt nähert. In welcher Weise der Verf. diese Lücke auszufüllen beabsichtigte, lässt sich aus den vorhandenen Papieren nicht mit Sicherheit erkennen; doch führt die schon oben (in der Note zu I) mitgetheilte Formel

$$1 + 4\left\{A - \frac{A}{3} + \frac{A}{5} - \frac{A}{7} + \frac{A}{9} - \frac{A}{11} \ldots\right\}$$

für die Anzahl der Paare von Zahlen, deren Quadratsumme den Werth $A$ nicht übertrifft, zu der Vermuthung, dass der Verf., mit Umgehung des unendlichen Productes, für den mittlern Werth der Function $f(m)$ unmittelbar die unendliche Reihe

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

gefunden hat, in welcher $n$ der Grösse nach alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen muss, die relative Primzahlen zu $2D$ sind. Die einfachste Art, diesen Uebergang anzudeuten, scheint die folgende zu sein.

Ist $\mu$ der grösste aller derjenigen Divisoren einer Zahl $m$, welche relative Primzahlen zu $2D$ sind, und setzt man $\vartheta(m) = f(\mu)$, so ist $\vartheta(m)$ diejenige Function, welche durch Elimination aller in $2D$ aufgehenden Primzahlen aus $f(m)$ entsteht, und deren mittlerer Werth nach dem Obigen mit demjenigen der Function $f(m)$ übereinstimmt. Da nun $\vartheta(m) = \Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)$ ist, wo $n$ alle Divisoren von $\mu$, d. h. alle diejenigen Divisoren von $m$ durchläuft, welche relative Primzahlen zu $2D$ sind, so ergibt sich die der obigen analoge Formel

$$\Theta(m) = \vartheta(1) + \vartheta(2) + \ldots + \vartheta(m) = \Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{m}{n}$$

wo in der Summe rechter Hand der Buchstabe $n$ alle relativen Primzahlen zu $2D$ durchläuft, und von dem Quotienten $\frac{m}{n}$ immer nur die grösste in ihm enthaltene ganze Zahl beizubehalten ist. Ordnet man die Glieder dieser Reihe so, dass die Zahlen $n$ ihrer Grösse nach wachsend auf einander folgen, so nimmt der Factor $\frac{m}{n}$ fortwährend ab oder doch wenigstens nie zu, und die Reihe bricht ab, sobald $n > m$ wird. Ausserdem ergiebt sich aus dem Fundamentaltheorem in der Theorie der quadratischen Reste und aus der Verallgemeinerung desselben, dass die Summe von je $\varphi(4D)$ auf einander folgenden Werthen des Factors $\left(\frac{-D}{n}\right)$ verschwindet, woraus folgt, dass die Summe von noch so vielen auf einander folgenden Werthen

desselben ihrem absoluten Werth nach die endliche, nur von dem Determinant $D$ abhängige Grösse $\Delta = \varphi(2D)$ niemals übertrifft. Verbindet man diese beiden Bemerkungen mit einander, so findet man leicht, dass die Summe aller auf das Glied $\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{m}{n}$ folgenden Glieder absolut genommen kleiner als $\Delta\frac{m}{n}$ ist, und dass folglich der Quotient $\theta(m):m$ bei unendlich wachsendem $m$ die in der angegebenen Art geordnete, convergirende unendliche Reihe

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

zum Grenzwerth hat. Nachdem so der gemeinschaftliche mittlere Werth der Functionen $\theta(m)$ und $f(m)$ gefunden ist, erhält man unmittelbar

$$k = \frac{6\sqrt{D}}{\pi}\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Artikel 6 und 8 der Abhandlung II auf eine in mancher Beziehung einfachere und auch leicht auszuführende Behandlungsweise des Problems hindeuten, bei welcher nur die Darstellungen ungerader oder sogar nur solcher Zahlen betrachtet werden, die relative Primzahlen zu $2D$ sind.

---

## Zu VI und VII.

Die Art, wie der Verf. die Summation der Reihe $\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}$ ausgeführt hat, ergiebt sich aus einigen speciellen Beispielen, welche sich auf einzelnen Blättern vorfinden.

Ist $D \equiv 3 \pmod{4}$, so folgt aus dem Fundamentaltheorem in der Theorie der quadratischen Reste mit Benutzung der Reihe

$$\operatorname{cotang} u = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-\pi} + \frac{1}{u+\pi} + \frac{1}{u-2\pi} + \frac{1}{u+2\pi} + \cdots$$

dass

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n} = \Sigma\left(\frac{n}{D}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2D}\Sigma\left(\frac{\nu}{D}\right)\operatorname{cotang}\frac{\nu\pi}{2D}$$

ist, wo $\nu$ alle relativen Primzahlen zu $2D$, durchläuft, die kleiner als $D$ sind; setzt man

$$\sqrt{-1} = i, \quad \cos\frac{2\pi}{D} + i\sin\frac{2\pi}{D} = r$$

und bezeichnet mit $\mu$ alle relativen Primzahlen zu $D$, welche nicht grösser als $D$ sind, so lässt die vorstehende Summe sich leicht in die folgende umformen

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi i}{4D}\left(\frac{2}{D}\right)\Sigma\left(\frac{\mu}{D}\right)\frac{r^\mu-1}{r^\mu+1}$$

wendet man nun die für jede Wurzel $\omega$ der Gleichung $\omega^D = 1$ gültige Formel

$$\frac{\omega-1}{\omega+1}=\Sigma(-1)^{\alpha-1}\omega^{\alpha}$$

an, in welcher $\alpha$ die Zahlen $1, 2, 3 \ldots (D-1)$ durchlaufen muss, so erhält man durch Umkehrung der Summationsordnung

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{\pi i}{4D}\left(\frac{2}{D}\right)\Sigma(-1)^{\alpha-1}\Sigma\left(\frac{\mu}{D}\right)r^{\alpha\mu}$$

Die auf $\mu$ bezügliche Summation lässt sich bekanntlich mit Hülfe der in der Abhandlung *Summatio quarumdam serierum singularium* bewiesenen Sätze ausführen; beschränkt man sich auf den Fall, in welchem $D$ durch kein Quadrat theilbar ist, so findet man allgemein

$$\Sigma\left(\frac{\mu}{D}\right)r^{\alpha\mu}=\left(\frac{\alpha}{D}\right)i^{\left(\frac{D-1}{2}\right)^2}\sqrt{D}$$

wo $\left(\frac{\alpha}{D}\right)=0$ gesetzt werden muss, falls $\alpha$ keine relative Primzahl zu $D$ ist. In dem Fall $D\equiv 3 \pmod{4}$ erhält man daher

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{\pi}{4\sqrt{D}}\left(\frac{2}{D}\right)\Sigma(-1)^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{D}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{D}}\Sigma\left(\frac{\alpha'}{D}\right)$$

wo $\alpha'$ alle relativen Primzahlen zu $D$ durchläuft, die kleiner als $\frac{1}{2}D$ sind; da endlich $\varepsilon=2$ ist, so wird die Anzahl der Classen

$$k=\Sigma\left(\frac{\alpha'}{D}\right)$$

Ist dagegen $D\equiv 1 \pmod{4}$, so erhält man mit Benutzung der Reihe

$$\operatorname{cosec} u=\frac{1}{u}-\frac{1}{u-\pi}-\frac{1}{u+\pi}+\frac{1}{u-2\pi}+\frac{1}{u+2\pi}-\ldots$$

auf ähnliche Weise

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}=\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{D}\right)\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2D}\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{D}\right)\operatorname{cosec}\frac{\nu\pi}{2D}=\frac{\pi}{2D}\Sigma\left(\frac{\mu}{D}\right)\frac{r^{\mu}}{r^{2\mu}+1}$$

wo die Buchstaben $\nu$ und $\mu$ die frühere Bedeutung haben; schliesst man den evidenten Fall $D=1$ aus und wendet die fur jede Wurzel $\omega$ der Gleichung $\omega^D=1$ (mit Ausnahme von $\omega=1$) gültige Formel

$$\frac{\omega}{\omega\omega+1}=1+\Sigma\omega^{4\alpha''}+\Sigma\omega^{D-4\alpha''}$$

an, in welcher $\alpha''$ die Zahlen $1, 2, 3 \ldots \frac{1}{2}(D-1)$ durchlaufen muss, so ergiebt sich, wieder unter der Beschränkung, dass $D$ durch kein Quadrat theilbar ist,

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{\pi}{\sqrt{D}}\Sigma\left(\frac{\alpha''}{D}\right)$$

und hieraus, da $\varepsilon=2$ ist,

$$k=2\Sigma\left(\frac{\alpha''}{D}\right)$$

Ganz ähnlich würden sich die Fälle behandeln lassen, in welchen $D$ gerade ist. —

Was die Bestimmung der Classen-Anzahl für *positive* Determinanten $D$ betrifft, so finden sich ausser der im Text mitgetheilten Schlussformel nur einzelne geometrische Figuren vor, welche Hyperbel-Sectoren von endlichen Dimensionen darstellen, und neben denselben Ungleichungen, durch welche die Punkte, deren Coordinaten die Variabeln der quadratischen Formen sind, in das Innere eines solchen Hyperbel-Sectors gedrängt werden. Diese Hyperbel-Sectoren treten an die Stelle der Ellipsen, welche den quadratischen Formen von negativen Determinanten entsprechen, und durch die Bestimmung ihres Flächeninhalts ergiebt sich wieder die mittlere Darstellungsanzahl, wenn nämlich nur solche Darstellungen zugelassen werden, bei welchen die Variabeln den eben erwähnten Ungleichungen Genüge leisten. Andererseits dienen diese Ungleichungen dazu, aus den unendlich vielen Darstellungen einer Zahl $m$, welche alle zu einer und derselben Wurzel $n$ der Congruenz $nn - D \equiv 0 \left(\text{mod.} \frac{m}{\mu\mu}\right)$ gehören und welche den sämmtlichen Auflösungen der Gleichung $tt - Duu = 1$ entsprechen (vergl. Disqq. Arithm. art. 205), eine einzige zu isoliren und alle andern auszuschliessen. Die Anzahl aller zugelassenen Darstellungen der Zahl $m$ durch den Complex aller nicht eigentlich äquivalenten formae proprie primitivae ist dann gleich dem Werth der Function $f(m)$, in welcher nur $-D$ durch $D$ zu ersetzen ist, und aus der Betrachtung der Eigenschaften derselben ergiebt sich, wie früher bei negativen Determinanten, ein zweiter Ausdruck für die mittlere Darstellungsanzahl; die Vergleichung desselben mit dem vorher durch geometrische Betrachtungen abgeleiteten Werthe führt dann unmittelbar zu der Bestimmung der Anzahl der Classen.

---

## Zu VIII.

Hier bedeutet $p$ eine positive Primzahl von der Form $4n+1$; die Bezeichnung stimmt mit der in der Abhandlung *Theoria residuorum biquadraticorum* I. art. 23 angewendeten überein; es ist also

$$f \equiv 1.2.3\ldots\tfrac{1}{2}(p-3).\tfrac{1}{2}(p-1) \pmod{p}$$

$$p = aa + bb, \quad a \equiv 1 \pmod{4}; \quad b \equiv af \pmod{p}$$

die mit $\alpha$, $\mathfrak{b}$ bezeichneten Zahlen sind durch die Zerlegung $p = \alpha\alpha + 2\mathfrak{b}\mathfrak{b}$ bestimmt. Die Columne $f$ ist den beiden vorgefundenen Tabellen hinzugefügt; ausserdem sind einige Lücken in denselben ausgefüllt.

Der im Text aufgestellte Satz hängt mit dem biquadratischen Charakter der Zahl 2 zusammen; da nämlich (vergl. *Theoria resid. biqu.* I. art. 21)

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{\frac{1}{2}b} \pmod{p}$$

ist, so folgt aus der Congruenz

$$b \equiv 2m + a - 1 \pmod{8}$$

die andere

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{m+\frac{a-1}{2}} \text{ (mod. } p)$$

und umgekehrt jene aus dieser. Der Beweis dieser letztern Congruenz ergiebt sich leicht auf folgende Art. Ist $\mu$ die Anzahl der quadratischen Reste $\alpha_1$, welche zwischen $0$ und $\frac{1}{4}p$ liegen, so ist (nach VII)

$$m = 2\mu - \tfrac{1}{4}(p-1)$$

und die Anzahl der quadratischen Reste $\alpha_2$, welche zwischen $\frac{1}{4}p$ und $\frac{1}{2}p$ liegen, ist $= \frac{1}{4}(p-1) - \mu$. Ist nun $p \equiv 1$ (mod. 8), also die Zahl 2 quadratischer Rest, so stimmen die Zahlen $2\alpha_1$ und $p - 2\alpha_2$ im Complex mit den Zahlen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ überein, und bezeichnet man das Product dieser Zahlen mit $A$, so ergiebt sich

$$2^{\frac{p-1}{4}} A \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)-\mu} A \text{ (mod. } p)$$

und folglich

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv (-1)^{\mu} \equiv f^{2\mu} \equiv f^{m+\frac{1}{4}(p-1)} \text{ (mod. } p)$$

da ferner in diesem Fall $b \equiv 0$ (mod. 4), und folglich

$$\frac{p-1}{4} = (a+1)\frac{a-1}{4} + \frac{bb}{4} \equiv 2\,\frac{a-1}{4} \equiv \frac{a-1}{2} \text{ (mod. 4)}$$

ist, so erhält man die zu beweisende Congruenz

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{m+\frac{a-1}{2}} \text{ (mod. } p)$$

Ist dagegen $p \equiv 5$ (mod. 8), also die Zahl 2 quadratischer Nichtrest, so stimmen die Zahlen $2\alpha_1$ und $p - 2\alpha_2$ mit den sämmtlichen zwischen $0$ und $\frac{1}{2}p$ liegenden quadratischen Nichtresten überein; bezeichnet man ihr Product mit $B$, und das Product der Zahlen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ wieder mit $A$, so ist

$$f \equiv AB, \quad (-1)^{\frac{p-1}{4}-\mu}\, 2^{\frac{p-1}{4}} A \equiv B \text{ (mod. } p)$$

erhebt man diese beiden Congruenzen zum Quadrat, indem man berücksichtigt, dass

$$ff \equiv -1, \quad 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (mod. } p)$$

ist, so erhält man

$$-1 \equiv AABB, \quad -AA \equiv BB$$

und hieraus $A^4 \equiv +1$; da nun $A$ ein Product aus quadratischen Resten, also $AA$ ein Product aus biquadratischen Resten und folglich selbst ein biquadratischer Rest ist, so muss $AA \equiv +1$ sein, weil $-1$ ein biquadratischer Nichtrest ist. Hieraus folgt

$$(-1)^{\frac{p-1}{4}-\mu}\, 2^{\frac{p-1}{4}} \equiv AB \equiv f \pmod{p}$$

und

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv (-1)^{\mu-1} f \equiv f^{2\mu-1} \equiv f^{m+\frac{p-5}{4}} \pmod{p}$$

da endlich in diesem Fall $b \equiv 2 \pmod{4}$, und folglich

$$\frac{p-5}{4} = (a+1)\frac{a-1}{4} + \frac{bb-4}{4} \equiv 2\,\frac{a-1}{4} \equiv \frac{a-1}{2} \pmod{4}$$

ist, so erhält man wieder die zu beweisende Congruenz

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{m+\frac{a-1}{2}} \pmod{p}$$

---

## Zu IX.

Es sei $p$ eine positive ungerade durch kein Quadrat theilbare Zahl, und

$$S_r = \Sigma\left(\frac{s_r}{p}\right)$$

wo $s_r$ alle relativen Primzahlen zu $p$ durchlaufen muss, welche zwischen $(r-1)\frac{p}{8}$ und $r\frac{p}{8}$ liegen; bezeichnet man die Anzahlen der nicht eigentlich äquivalenten formae proprie primitivae für die Determinanten $-p$ und $-2p$ resp. mit $C_1$ und $C_2$, so ist (vergl. Dirichlet Recherches sur diverses applications etc. §. 11 in Crelle's Journal XXI)

$$C_1 = 2(S_1 + S_2), \quad C_2 = 2(S_1 - S_4)$$

oder

$$C_1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad C_2 = 2(S_2 + S_3)$$

je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$ ist. Bedenkt man ferner, dass die Zahlen $s_1$ und $s_2$ im Complex mit den Zahlen $2s_1$ und $p-2s_4$, und ebenso die Zahlen $s_3$ und $s_4$ im Complex mit den Zahlen $2s_2$ und $p-2s_3$ übereinstimmen, und dass im Falle $p \equiv 1 \pmod{4}$ die Summe $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$ ist, so ergeben sich in beiden Fällen noch zwei neue Relationen zwischen den vier Summen $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, so dass jede derselben durch $C_1$ und $C_2$ ausgedrückt werden kann. Man erhält auf diese Weise, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist,

$$S_1 = S_8 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{2}{p}\right) C_1 + \tfrac{1}{4} C_2$$

$$S_2 = S_7 = \tfrac{1}{4}\left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) C_1 - \tfrac{1}{4} C_2$$

$$S_3 = S_6 = -\tfrac{1}{4}\left(2 + \left(\frac{2}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{4} C_2$$

$$S_4 = S_5 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{2}{p}\right) C_1 - \tfrac{1}{4} C_2$$

und, wenn $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist

$$S_1 = -S_8 = \tfrac{1}{4}\left(3 + \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_1 - \tfrac{1}{4} C_2$$

$$S_2 = -S_7 = -\tfrac{1}{4}\left(1 - \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{4} C_2$$

$$S_3 = -S_6 = \tfrac{1}{4}\left(1 - \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{4} C_2$$

$$S_4 = -S_5 = \tfrac{1}{4}\left(1 - \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_1 - \tfrac{1}{4} C_2$$

Ist $p$ eine Primzahl, so findet man hieraus unmittelbar die im Text angegebenen Formeln für die Anzahlen der quadratischen Reste, welche in den einzelnen Octanten enthalten sind.

## Zu X.

Es sei $p$ eine positive und durch kein Quadrat theilbare Zahl von der Form $6n \pm 1$, und

$$S_r = \Sigma \left(\frac{s_r}{p}\right)$$

wo $s_r$ alle relativen Primzahlen zu $p$ durchlaufen muss, welche zwischen $(r-1)\frac{p}{12}$ und $r\frac{p}{12}$ liegen; bezeichnet man die Anzahlen der nicht eigentlich äquivalenten formae proprie primitivae für die Determinanten $-p$ und $-3p$ mit $C_1$, $C_3$, so findet man leicht (vergl. Dirichlet Recherches etc. §. 11 oder die Note zu VI und VII)

$$C_1 = 2(S_1 + S_2 + S_3), \quad C_3 = 2(S_1 + S_2 - S_5 - S_6)$$

oder

$$C_1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6, \quad C_3 = 2(S_2 + S_3 + S_4 + S_5)$$

je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$ ist. Berücksichtigt man ferner, dass

die Zahlen $s_1$ und $s_2$ mit den Zahlen $2s_1$ und $p-2s_6$
„ „ $s_3$ und $s_4$ „ „ „ $2s_2$ und $p-2s_5$
„ „ $s_5$ und $s_6$ „ „ „ $2s_3$ und $p-2s_4$

und ebenso

die Zahlen $s_1, s_2, s_3$ mit den Zahlen $3s_1$, $3s_5-p$, $p-3s_4$
„ „ $s_4, s_5, s_6$ „ „ „ $3s_2$, $3s_6-p$, $p-3s_3$

übereinstimmen, und dass im Falle $p \equiv 1 \pmod{4}$ die Summe $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 0$ ist, so erhält man ausser den beiden obigen noch vier neue Relationen zwischen den sechs Summen $S_1, S_2 \ldots S_6$, so dass dieselben sämmtlich aus $C_1$ und $C_3$ bestimmt werden können. Man erhält auf diese Weise, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist,

$$S_1 = S_{12} = \tfrac{1}{4}\left(1+\left(\tfrac{3}{p}\right)\right)C_1 + \tfrac{1}{12}\left(1+\left(\tfrac{2}{p}\right)\right)C_2$$

$$S_2 = S_{11} = -\tfrac{1}{4}\left(1+\left(\tfrac{3}{p}\right)\right)C_1 + \tfrac{1}{12}\left(1+\left(\tfrac{2}{p}\right)\right)C_2$$

$$S_3 = S_{10} = \tfrac{1}{2}C_1 - \tfrac{1}{4}\left(1+\left(\tfrac{2}{p}\right)\right)C_2$$

$$S_4 = S_9 = -\tfrac{1}{2}C_1 + \tfrac{1}{4}\left(2-\left(\tfrac{2}{p}\right)\right)C_2$$

$$S_5 = S_8 = \tfrac{1}{4}\left(1+\left(\tfrac{3}{p}\right)\right)C_1 - \tfrac{1}{12}\left(5-\left(\tfrac{2}{p}\right)\right)C_2$$

$$S_6 = S_7 = -\tfrac{1}{4}\left(1+\left(\tfrac{3}{p}\right)\right)C_1 + \tfrac{1}{12}\left(1+\left(\tfrac{2}{p}\right)\right)C_2$$

und, wenn $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist,

$$S_1 = -S_{12} = \tfrac{1}{12}\left(9+3\left(\tfrac{2}{p}\right)-\left(\tfrac{3}{p}\right)+\left(\tfrac{6}{p}\right)\right)C_1 - \tfrac{1}{2}C_2$$

$$S_2 = -S_{11} = \tfrac{1}{4}\left(-1+\left(\tfrac{2}{p}\right)+\left(\tfrac{3}{p}\right)-\left(\tfrac{6}{p}\right)\right)C_1 + \tfrac{1}{2}C_2$$

$$S_3 = -S_{10} = \tfrac{1}{4}\left(-\left(\tfrac{3}{p}\right)+\left(\tfrac{6}{p}\right)\right)C_1$$

$$S_4 = -S_9 = \tfrac{1}{4}\left(3-2\left(\tfrac{3}{p}\right)-\left(\tfrac{6}{p}\right)\right)C_1$$

$$S_5 = -S_8 = \tfrac{1}{4}\left(-1-\left(\tfrac{2}{p}\right)+\left(\tfrac{3}{p}\right)+\left(\tfrac{6}{p}\right)\right)C_1 + \tfrac{1}{2}C_2$$

$$S_6 = -S_7 = \tfrac{1}{12}\left(3-3\left(\tfrac{2}{p}\right)+\left(\tfrac{3}{p}\right)-\left(\tfrac{6}{p}\right)\right)C_1 - \tfrac{1}{2}C_2$$

Ist $p$ eine Primzahl, so findet man aus dem ersten System die im Text angegebenen Formeln; für die andern Fälle erhält man ähnliche Formeln aus dem zweiten System.

R. Dedekind.

## GEOMETRISCHE SEITE DER TERNÄREN FORMEN.

Ein Punkt im Raume (0) sei als Anfangspunkt angenommen. Der Uebergang von da zu drei andern Punkten $P, P', P''$, die mit jenem nicht in einer Ebene liegen, sei resp. $t, t', t''$; wo, so oft keine Verwechslung möglich ist, die Punkte $P, P', P''$ selbst durch $(t), (t'), (t'')$ bezeichnet werden mögen.

Es sei ferner allgemein $(t, t')$ das Product der Länge der beiden Linien $t, t'$ in den Cosinus ihrer Neigung etc.

Man hat allgemein $(\alpha t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \ldots,\ \sigma u + \sigma' u' + \sigma'' u'' + \ldots)$ wenn man die Multiplication

$$(\alpha t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \ldots) \times (\sigma u + \sigma' u' + \sigma'' u'' + \ldots)$$

ausführt und statt $tu, tu', tu'', t'u', t'u''$.. u. s. w. $(t, u), (t, u'), (t, u''), (t', u'), (t', u'')$u.s.w. schreibt.

Jeder Punkt im Raume wird durch ein Trinomium

$$(x t + x' t' + x'' t'')$$

dargestellt werden können.

Für alle Punkte, die in einer bestimmten Ebene liegen, wird dann eine Gleichung

$$\lambda x + \lambda' x' + \lambda'' x'' = L$$

statt finden, wo $\lambda, \lambda', \lambda'', L$ bestimmte Zahlen bedeuten. Für eine Ebene durch die drei Punkte $\mu t, \mu' t', \mu'' t''$ ist

$$\lambda\mu = \lambda'\mu' = \lambda''\mu'' = L$$

Schreibt man

$$(t,t) = a,\ (t',t') = a',\ (t'',t'') = a'',\ (t',t'') = b,\ (t.t'') = b',\ (t,t') = b''$$

und

$$\begin{array}{lll} a'a''-bb = A, & aa''-b'b' = A', & aa'-b''b'' = A'' \\ b'b''-ab = B, & bb''-a'b' = B', & bb'-a''b'' = B'' \end{array}$$

$$D = aa'a''+2bb'b''-abb-a'b'b'-a''b''b''$$

so ist

$$\begin{array}{lll} T = At+B''t'+B't'' & \text{senkrecht gegen} & t' \text{ und } t'' \\ T' = B''t+A't'+Bt'' & & t \text{ und } t'' \\ T'' = B't+Bt'+A''t'' & & t \text{ und } t' \end{array}$$

und allgemein, wenn

$$\lambda x+\lambda' x'+\lambda'' x'' = L$$

die Gleichung einer Ebene ist, so wird die Linie

$$\lambda T+\lambda' T'+\lambda'' T''$$

gegen dieselbe senkrecht sein.

Es ist dann ferner

$$\begin{aligned} aT+b''T'+b'T'' &= Dt \\ b''T+a'T'+bT'' &= Dt' \\ b'T+bT'+a''T'' &= Dt'' \end{aligned}$$

und die Linien $t, t', t''$ sind senkrecht gegen die Ebenen, deren Gleichungen

$$\begin{aligned} ax+b''x'+b'x'' &= \text{Const} \\ b''x+a'x'+bx'' &= \text{Const} \\ b'x+bx'+a''x'' &= \text{Const} \end{aligned}$$

Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks durch die Punkte $mt$, $m't'$, $m''t''$ ist aequal der Quadratwurzel aus dem Werthe der Form

$$F \ldots \binom{A,\ A',\ A''}{B,\ B',\ B''}$$

wenn substituirt wird $X = m'm''$, $X' = mm''$, $X'' = mm'$, während der sechsfache Cubikinhalt der Pyramide, die sich dadurch mit dem 0 Punkte bildet, $= mm'm''\sqrt{D}$ wird, folglich ist das Perpendikel

$$= \sqrt{\frac{D}{F\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{m'},\ \frac{1}{m''}\right)}}$$

$T$, $T'$, $T''$ beziehen sich ebenso auf die Form $\binom{AD,\ A'D,\ A''D}{BD,\ B'D,\ B''D}$ wie $t$, $t'$, $t''$ auf $\binom{a,\ a',\ a''}{b,\ b',\ b''}$

Die drei Wurzeln der Gleichung

$$0 = p^3 - pp(a + a' + a'') + p(A + A' + A'') - D$$

stellen die Quadrate der drei Hauptaxen eines in dasjenige Parallelepipedum einbeschriebenen Ellipsoids vor, auf welches sich die ternäre positive Form

$$\binom{a,\ a',\ a''}{b,\ b',\ b''} \text{ mit Adjuncte } \binom{A,\ A',\ A''}{B,\ B',\ B''} \text{ und Determ. } = -D$$

bezieht

---

*Beziehung der Raumverhältnisse auf ein gegebenes Tetraeder.*

Es seien (0), (1), (2), (3) die vier Ecken, gegenüberstehenden Flächen und Perpendikel. Es kommen dann jedem Punkte des Raums $P$ gegen einen beliebigen Anfangspunkt $M$ vier Coordinaten zu $x$, $x'$, $x''$, $x'''$, unter welchen aber die Relation

$$x + x' + x'' + x''' = 0$$

Statt findet. Es bedeutet nemlich $x$ den Quotienten, wenn man die Distanz des

Punktes $P$ von einer durch $M$ mit dem Planum (0) parallel gelegten Ebene mit dem Perpendikel (0) dividirt u. s. f.

Allgemein ist dann

$$-(PM)^2 = xx'(01)^2 + xx''(02)^2 + xx'''(03)^2 + x'x''(12)^2 + x'x'''(13)^2 + x''x'''(23)^2$$

---

*Das Grundgesetz der Crystallisation* lässt sich am kürzesten so aussprechen:

Zwischen je fünf Ebenen, welche dabei vorkommen, gibt es folgende Relation:

Sind ihre Normalen auf der Kugelfläche (0), (1), (2), (3), (4), so sind allezeit die Producte $\sin 102 . \sin 304$, $\sin 103 . \sin 204$, $\sin 203 . \sin 104$ in einem rationalen Verhältnisse; ist dies wie $\alpha : \beta : \gamma$, so ist $\beta = \alpha + \gamma$.

Sind die Coordinaten der 5 Punkte auf der Kugelfläche

$$\left.\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \quad \text{so müssen} \quad \begin{matrix} (ab' - ba').(a''b''' - b''a''') \\ (ab'' - ba'').(a'''b' - b'''a') \\ (ab''' - ba''').(a'b'' - b'a'') \end{matrix}$$

in rationalem Verhältnisse stehen.

Allgemein seien 1, 2, 3, 4, 5 die 5 Punkte auf der Kugelfläche, 0 der Mittelpunkt; dann stehen, wenn 12 den körperlichen Inhalt des Tetraeders 0345 bedeutet

$$\left.\begin{matrix} 23.45 \\ 24.53 \\ 25.34 \end{matrix}\right\} \text{ in rationalem Verhältnisse}$$

ebenso

$$\left.\begin{matrix} 12.34 \\ 13.42 \\ 14.23 \end{matrix}\right\} \text{ u. s. f.}$$

*Transformationen der Form* $\binom{5,\ 5,\ 5}{-1,\ -1,\ -1}$ Det. $= 108$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{Bmatrix}+1+1-1\\-1+1+1\\+1-1+1\end{Bmatrix}$ | $\binom{17\quad 17\quad 17}{-7-7-7}$ 36.108 | | $\binom{240\quad 240\quad 240}{+168+168+168}$ 256.11664 | $\binom{10\quad 10\quad 10}{+7+7+7}$ 216 | Chaux carbonatée équiaxe |
| $\begin{Bmatrix}+1+1\ \ 0\\0+1+1\\+1\ \ 0+1\end{Bmatrix}$ | $\binom{8\quad 8\quad 8}{+2+2+2}$ 4.108 | $\binom{4\quad 4\quad 4}{+1+1+1}$ 54 | $\binom{15\quad 15\quad 15}{-3-3-3}$ 27.108 | $\binom{5\quad 5\quad 5}{-1-1-1}$ 54 | inverse |
| $\begin{Bmatrix}+2+1+1\\+1+2+1\\+1+1+2\end{Bmatrix}$ | $\binom{20\quad 20\quad 20}{+14+14+14}$ 10.108 | $\binom{10\quad 10\quad 10}{+7+7+7}$ 216 | $\binom{51\quad 51\quad 51}{-21-21-21}$ 132.108 | $\binom{17\quad 17\quad 17}{-7-7-7}$ 16.108 | contrastante |
| $\begin{Bmatrix}+1+2+2\\+2+1+2\\+2+2+1\end{Bmatrix}$ | $\binom{29\quad 29\quad 29}{+23+23+23}$ 25.108 | | $\binom{312\quad 312\quad 312}{-138-138-138}$ 67500.108 | $\binom{52\quad 52\quad 52}{-23-23-23}$ 33750 | mixte |

Setzt man die ursprüngliche Form allgemein $= \binom{t,\ t,\ t}{u,\ u,\ u}$

und eine abgeleitete $\binom{T,\ T,\ T}{U,\ U,\ U}$

so ist

$$
\begin{array}{lll}
1, & T = 3t - 2u & U = -t + 2u \\
2, & T = 2t + 2u & U = t + 3u \\
3, & T = 6t + 10u & U = 5t + 11u \\
4, & T = 9t + 16u & U = 8t + 17u
\end{array}
$$

Die Form $\binom{1,\ 3,\ k}{0,\ 0,\ 0}$ geht durch die Substitution

$$
\begin{array}{lll}
x = u + u' - 2u'' & \text{umgekehrt}\ 6u = & x + 3y + 2z \\
y = u - u' & \phantom{umgekehrt}\ 6u' = & x - 3y + 2z \\
z = u + u' + u'' & \phantom{umgekehrt}\ 6u'' = & -2x + 2z
\end{array}
$$

$$x \equiv z \pmod{3}, \quad x \equiv y \pmod{2}$$

über in $\binom{4+k,\ 4+k,\ 4+k}{k-2,\ k-2,\ k-2}$

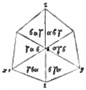
Um den Kalkspath zu produciren ist $k = 0{,}973103$ zu setzen.

Sind die complexen Werthe der orthographischen Projection von drei gleich langen und unter einander senkrechten Graden $a, b, c$, so ist $aa + bb + cc = 0$, allgemein kann man setzen, $p$ und $q$ beliebige complexe Zahlen bedeutend

$$a = (p - q)(q - pii), \quad b = (q - qi)(pii - pi), \quad c = (qi - p)(pi - q).$$

*Hexakisoctaeder.*

Gleichung: $px + qy + rz = 1$




$\alpha < \beta < \gamma$

*Coordinaten.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\frac{1}{\gamma}$ | 0 | 0 |
| 2. | $\frac{1}{\beta+\gamma}$ | $\frac{1}{\beta+\gamma}$ | 0 |
| 3. | $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ | $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ | $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ |

Sechsfacher Inhalt einer Elementarpyramide $= \frac{1}{\gamma\cdot(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$

Alle [Flächen] sind um eine Kugel beschrieben, deren Halbmesser $= \frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}$

Doppelte Fläche eines Dreiecks $= \frac{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}{\gamma(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$

**Kante** $1.2 = \frac{\sqrt{(\beta\beta+\gamma\gamma)}}{\gamma(\beta+\gamma)}$, $1.3 = \frac{\sqrt{((\alpha+\beta)^2+2\gamma\gamma)}}{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$, $2.3 = \frac{\sqrt{(2\alpha\alpha+(\beta+\gamma)^2)}}{(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$.

Cosinus Kanten Winkel. $3.1.2 = \frac{\alpha\beta+\beta\beta+\gamma\gamma}{\sqrt{(\beta\beta+\gamma\gamma)((\alpha+\beta)^2+2\gamma\gamma)}}$

Sinus $= \frac{\gamma\cdot\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}{\sqrt{(\beta\beta+\gamma\gamma)((\alpha+\beta)^2+2\gamma\gamma)}}$

*Vorkommende Werthe.*

| | α β γ | | | α β γ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7. | 0. 0. 1 | Hexaeder | 2. | 1. 2. 2. | Triakisoctaeder |
| 3. | 0. 1. 1 | Rhombendodekaeder | 4. | 1. 2. 3. | Hexakisoctaeder |
| 6. | 0. 1. 2 | Tetrakishexaeder | | 1. 2. 4 | |
| | 0. 1. 3 | | 2. | 1. 3. 3 | Triakisoctaeder |
| | 0. 2. 3 | | 4. | 1. 3. 5 | Hexakisoctaeder |
| 1. | 1. 1. 1 | Octaeder | 2. | 2. 3. 3 | Triakisoctaedor |
| 5. | 1. 1. 2 | Trapezicositetraeder | | 2. 3. 4? | |
| | 1. 1. 3 | | | 3. 5. 11 | |

# BEMERKUNGEN.

Neben den vorstehenden Notizen, welche die in der Anzeige von SEEBER's Untersuchungen der ternären Formen gegebenen Gesichtspunkte theilweise weiter entwickeln, sind in der Handschrift mehre eigne mit einem achtzölligen REICHENBACH'schen Theodolithen ausgeführte Crystallmessungen aufgezeichnet. Die einzelnen Protokolle enthalten das jedesmalige Datum der Beobachtung, woraus zu ersehen ist, dass diese Untersuchung dem Monat Juli 1831 angehört.

Aus der Theorie der indifferenten ternären quadratischen Formen findet sich im handschriftlichen Nachlass nur der folgende, wahrscheinlich in der Zeit der Ausarbeitung der Disqn. Arr. aufgezeichnete Lehrsatz

'Omnes transformationes formae ternariae

$$\begin{pmatrix}1, & 1, & -1\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$$

in se ipsam exhibentur per formulam

$$\begin{matrix}\alpha\delta+\beta\gamma & \alpha\beta-\gamma\delta & \alpha\beta+\gamma\delta\\ \alpha\gamma-\beta\delta & \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha+\delta\delta-\beta\beta-\gamma\gamma) & \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha+\gamma\gamma-\beta\beta-\delta\delta)\\ \alpha\gamma+\beta\delta & \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha+\beta\beta-\gamma\gamma-\delta\delta) & \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)\end{matrix}$$

acceptis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ita ut fiat $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$.'

Es entstehen nemlich alle Transformationen, in denen die neun Coëfficienten ganze Zahlen sind, wenn für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sowohl alle die der Bedingungsgleichung genügenden ganzen Zahlen und zwar zwei gerade und zwei ungerade gesetzt werden, als auch alle die ungeraden Vielfache von $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, welche dieselbe Bedingungsgleichung $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$ erfüllen.

Zu Seite 305. Chaux carbonatée équiaxe, inverse, contrastante und mixte sind die von HAÜY (Traité de Minéralogie 1801 Tome II pag. 132, 137) gebrauchten Benennungen.

Die Tafel der Transformationen der Form $\begin{pmatrix} 5, & 5, & 5 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ enthält in der ersten Verticalreihe die Coëfficienten der Substitution, in der zweiten die dadurch entstandene neue Form, in der dritten die der letztern Form entsprechende primitive, wenn diese nicht selbst schon eine solche ist, und in der vierten deren Adjuncta.

SCHERING.

# ZUR THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE.

[I.]

1.

Wir erweitern das Gebiet der höhern Arithmetik, indem wir darin auch die imaginären Grössen aufnehmen. Bei der gegenwärtigen Untersuchung nennen wir eine ganze imaginäre Zahl jede Grösse $x+iy$, wenn $x$, $y$ reelle ganze Zahlen sind.

2.

Die unendliche Anzahl imaginärer ganzer Zahlen lässt sich am bequemsten durch Punkte in einer unbegrenzten Ebene sinnlich darstellen; wir nennen schlechthin denjenigen Punkt, dessen Abscisse $x$, die Ordinate $y$ ist, den Punkt $x+iy$, alle Punkte, die ganze Zahlen vorstellen, sollen Ganzepunkte heissen.

3

Um etwas bestimmtes festzusetzen, sollen die Abscissen immer auf der linken Seite positiv, die Ordinaten oben positiv sein.

4.

Die gerade Linie von dem Punkte $x+iy$ zu dem Punkte $x'+iy'$ gezogen soll schlechtweg die gerade Linie $(x+iy, x'+iy')$ heissen, wir nehmen dabei zugleich, insofern es darauf ankommt, auf die Richtung Rücksicht und unterscheiden also die gerade Linie $x+iy$, $x'+iy'$ von der $x'+iy'$, $x+iy$.

5.

Der Kürze wegen wollen wir imaginäre Grössen wie $x+iy$ auch durch einen einzigen Buchstaben bezeichnen, wie $z$.

6.

Die Figur, welche durch die geraden Linien $zz', z'z'', z''z''', \ldots z^{n-1}z^n, z^nz$ begrenzt wird, nennen wir schlechtweg die Figur $zz'z''z''' \ldots z^n$. Wir schliessen dabei den Fall nicht aus, wo etwa einige dieser Linien einander schneiden.

7.

Durch $S(z, z', z'' \ldots z^n)$ bezeichnen wir allgemein die Summe von so vielen reellen ganzen Zahlen, als Ganzepunkte innerhalb der Figur liegen, indem wir für jeden Punkt, um den die Grenzlinie der Figur einmal, zweimal, dreimal u.s.w. herumgeht, die Zahl $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ etc. setzen; die obern Zeichen gelten, wenn die Grenzlinie den Punkt so umgibt, dass dieser auf der rechten Seite der Figur liegt, die untern im entgegengesetzten Fall. Schneiden sich also keine Seiten der Figur, so ist $S(z, z', z'' \ldots)$ schlechthin die Anzahl der Punkte innerhalb der Figur, positiv oder negativ genommen.

8.

Offenbar ist immer

$$S(z, z', z'' \ldots z^n) = S(z', z'', z''' \ldots z^n, z) = S(z'', z''' \ldots z') \text{ etc.}$$
$$= -S(z^n, z^{n-1} \ldots z'', z', z) = -S(z^{n-1}, z^{n-2} \ldots z', z, z^n) \text{ etc.}$$

9.

Wie es hiebei mit den auf der Grenzlinie selbst liegenden Punkten gehalten werden soll, muss noch näher bestimmt werden. Es gibt viele Fälle, wo auf der Grenzlinie gar keine ganze Punkte liegen können: dann ist keine Bestimmung nöthig. Liegen aber auf der Grenzlinie $zz'$ solche Punkte, so zeigen wir durch ein zwischen $z$ und $z'$ eingeschobenes $+$ an, dass diese Punkte so betrachtet werden sollen, als lägen sie rechts von der Grenzlinie, so wie durch ein $-$, als lägen sie links. Auch werden wir wol ein 0 oder $\frac{1}{2}$ einschieben, wodurch angedeutet werden soll, dass sie gar nicht oder nur mit dem halben Werthe auf je-

der Seite in Betracht gezogen werden sollen. Falls einer oder der andere der Punkte $z, z', z''$ etc. selbst ein Ganzepunkt, so wird er, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird, gar nicht mitgezählt, als insofern er zugleich etwa als Nicht-Eckpunkt auch in Betracht kommt.

## 10.

Lehrsätze. Wenn alle $z, z', z''$ etc. um eine und dieselbe Ganzezahl vermehrt werden, so bleibt das $S$ ungeändert.

Wenn $i$ in $-i$ und jedes Bindezeichen ins entgegengesetzte verwandelt wird, so ändert $S$ bloss das Zeichen.

$$S(z,z',z''\ldots z^n) = S(z,u,u'\ldots u^n,z',z'',z^n) - S(z,u,u'\ldots u^n,z')$$
$$= S(z,u,u',u''\ldots u^n,z^m,z^{m+1}\ldots z^n) - S(z,u,u',u''\ldots u^n,z^m,z^{m-1}\ldots z',z)$$

wo die Bindezeichen correspondiren müssen, aber zwischen den rückwärts laufenden Gliedern entgegengesetzt werden.

Ist $\zeta$ eine ganze Zahl $= a+bi$, so ist, wenn die gegenüberliegenden Bindezeichen entgegengesetzt,

$$S(z.z', z'+\zeta, z+\zeta) = [bx'-ay'] - [bx-ay]$$

Hiebei ist zu bemerken, dass wenn $bx'-ay'$ selbst eine ganze Zahl ist, diese für $[bx'-ay']$ angenommen werde, wenn das Bindezeichen zwischen $z'$ und $z'+\zeta$ $+$ ist, hingegen 1 oder $\frac{1}{2}$ weniger, wenn dieses Bindezeichen $-$ oder $\frac{1}{2}$ ist; bei $bx-ay$ gilt das Umgekehrte.

Uebrigens gilt die Formel nur für den Fall, wo $a$ und $b$ keinen gemeinschaftlichen Divisor haben; ist ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler $= h$, so hat man dafür zu nehmen

$$h\left[\frac{bx'-ay'}{h}\right] - h\left[\frac{bx-ay}{h}\right]$$

## 11.

Wenden wir uns nun näher zu unserm Gegenstande selbst. Wenn für den Modulus $m = a+bi$ die Zahlen $f, f', f''$ etc. so beschaffen sind, dass sie erstlich alle nach dem Modulus $m$ unter sich incongruent sind, zweitens aber jede ganze Zahl einer von ihnen nothwendig congruent sein muss, so nennen wir den

Inbegriff der Zahlen $f, f', f''$ etc. das System der Primitivreste von $m$. Ihre Anzahl ist immer $= aa+bb$.

12.

Man kann das System der Primitivreste auf vielfache Art bilden; die einfachste ist, die Punkte innerhalb des Quadrats $0, m, (1+i)m, im$ zu wählen; dazu müssen aber noch hinzugefügt werden

I. der Punkt oder die Grösse $0$

II. alle Punkte auf zwei einander nicht gegenüberliegenden Grenzlinien.

Anstatt auf einer der 4 Grenzlinien alle Punkte zu nehmen, kann man sie auch auf mehren zugleich nehmen.

Diese Auswahl dieser Punkte auf den Grenzlinien, falls welche darauf fallen, kann auf mehrfache Art geschehen, so dass obigen Bedingungen Genüge geschieht. Am einfachsten ist die folgende Manier.

Man nehme auf der Grenzlinie $0,m$ alle Punkte zwischen $0$ und $\frac{1}{2}m$ inclus. nnd auf der Grenzlinie $0, im$ alle Punkte von $\frac{1}{2}im$ bis $im$ exclusive und auf ähnliche Art bei den beiden andern.

Man kann diese beiden Manieren so sinnlich darstellen




13.

Schliesst man von den Primitivpunkten aus

I. Bloss den Punkt $0$, wenn $a$ gerade und $b$ ungerade oder umgekehrt.

II. Die Punkte $0$ und $\frac{1}{2}(1+i)m$, wenn $a$ und $b$ beide ungerade.

III. Die vier Punkte $0, \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}(1+i)m, \frac{1}{2}im$, wenn $a$ und $b$ beide gerade,

so nennen wir die übrigbleibenden eigentliche Primitivpunkte, die ausgeschlossenen uneigentliche. Die Anzahl von jenen ist also

$$\begin{array}{ll} \text{im Fall I} & = aa+bb-1 \\ \text{II} & = aa+bb-2 \\ \text{III} & = aa+bb-4 \end{array}$$

also immer durch 4 theilbar.

### 14.

Diese eigentlichen Primitivpunkte lassen sich in 4 Classen $F, F', F'', F'''$ theilen, so dass

$$\begin{array}{llll} iF \equiv F' & iF' \equiv F'' & iF'' \equiv F''' & iF''' \equiv F \\ -F \equiv F'' & -F' \equiv F''' & -F'' \equiv F & -F''' \equiv F' \\ -iF \equiv F''' & -iF' \equiv F & -iF'' \equiv F' . & -iF''' \equiv F'' \end{array}$$

Hiebei findet nun folgendes höchst wichtige Theorem statt.

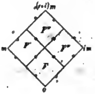
Es sei $M$ eine Zahl, welche mit $m$ keinen Factor gemein hat. Von den Zahlen $MF$ gehören in die Classe $F$ eine Anzahl von $n$

$$\begin{array}{ll} F' & n' \\ F'' & n'' \\ F''' & n''' \end{array}$$

und der kleinste Rest von $n' + 2n'' + 3n'''$ nach dem Modulus 4 sei $= N$, also $N$ einer der 4 Zahlen 0, 1, 2, 3 gleich: unter dieser Voraussetzung ist $N$ *unabhängig* von der Art der Vertheilung der Primitivreste in Classen. Wir nennen ihn den Decident des biquadratischen Verhältnisses der Zahl $M$ zu $m$.

### 15.

Die einfachste Art der Vertheilung ist allerdings folgende




Inzwischen kann in speciellen Fällen eine andere Vertheilung vortheilhafter sein.

### 16.

Sind $f, f', f''$ etc. die sämmtlichen Primitivreste des Modulus $m$, so ist

$$\begin{aligned} & S(z+\tfrac{f}{m},\quad z'+\tfrac{f}{m},\quad z''+\tfrac{f}{m},\quad \text{etc.}) \\ + & S(z+\tfrac{f'}{m},\quad z'+\tfrac{f'}{m},\quad z''+\tfrac{f'}{m},\quad \text{etc.}) \\ + & S(z+\tfrac{f''}{m},\quad z'+\tfrac{f''}{m},\quad z''+\tfrac{f''}{m},\quad \text{etc.}) \\ + & \text{ etc.} \\ = & S(mz,\ mz',\ mz'',\ \text{etc.}) \end{aligned}$$

## 17.

### *Theorie des biquadratischen Restes* $1+i$.

Der Modulus soll mit dem Reste keinen Theiler gemein haben, wir nehmen also an, dass von den Zahlen $a$ und $b$ die eine gerade, die andere ungerade sei. Die Vertheilung der eigentlichen Primitivreste in die vier Classen stellt folgendes Schema vor







Zu $n$ sind zu rechnen alle Zahlen auf
der Linie $0 \ldots \frac{1}{2}m$ Anzahl $= g$

Zu $n'$ alle Zahlen auf
der Linie $0 \ldots (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m$ Anzahl $= g'$

Zu $n''$ alle Zahlen innerhalb
des Dreiecks $\frac{1}{2}m,\ m,\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m$ Anzahl $= h$

Zu $n'''$ alle Zahlen innerhalb
des Dreiecks $0,\ \frac{1}{2}m,\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m$ Anzahl $= h'$

und ausserdem alle Zahlen auf
der Linie $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m \ldots (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m$ Anzahl $= g''$

Man hat immer $g'+g''=g$, $aa+bb=p$, $\frac{1}{4}(p-1)=g+g'+g''+h+h'$

Der Decident ist also

$$D = S(0_{(+)}, \tfrac{1}{2}m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m_{(-)}) + \tfrac{1}{2}(p-1) + 2g''$$

Man nehme nun an, dass für den Modulus $m+1+i$

| | | |
|---|---|---|
| $g$ | übergehe in | $G$ |
| $g'$ | | $G'$ |
| $g''$ | | $G''$ |
| $h$ | | $H$ |
| $h'$ | | $H'$ |

so hat man

$$\begin{aligned}\Delta S(0_{(+)}, \tfrac{1}{2}m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m_{(-)})\\ &= + S(0_{(+)}, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i_{(-)})\\ &\quad - S(0_{(+)}, \tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)})\\ &\quad - S(\tfrac{1}{2}m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i, \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)\end{aligned}$$

Das letzte dieser $S$ ist

$$= [\tfrac{1}{2}(a-b)] - [\tfrac{1}{2}a] - S((\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m, \tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i)$$

wenn $a$ ungerade oder gerade

$$\begin{aligned}&= [\tfrac{1}{2}(a-b)] - [\tfrac{1}{2}a] - S(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}m+i)\\ &= [\tfrac{1}{2}(a-b)] - [\tfrac{1}{2}a] + S(0_{(+)}, \tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)})\\ &\quad - S(0_{(+)}, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i_{(-)})\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\Delta D = -[\tfrac{1}{2}(a-b)] + [\tfrac{1}{2}a] + 2S(0_{(+)}, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i_{(-)}) + a + b + 1\\ - 2S(0_{(+)}, \tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)}) - 2g'' + 2G''\end{aligned}$$

Die Bindezeichen gelten alle für den Fall, wo $a-b$ positiv ist, sonst nimmt man die entgegengesetzten.

Wir zerlegen ferner $S(0_{(+)}, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i_{(-)})$ in

$$\begin{aligned}&S(0_{(+)}, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}m)+\tfrac{1}{2}i_{(-)})\\ &+ [\tfrac{1}{2}(a-b)] - [\tfrac{1}{2}(a-b)]\\ &- S((\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m_{(-)}, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m, (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m-\tfrac{1}{2}i_{(+)})\end{aligned}$$

Der letzte Theil

$$\begin{aligned}
&= -S(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)},\ (-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}i)m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i,\ (-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}i)m+\tfrac{1}{2}{}_{(+)})\\
&= -S(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i_{(-)},\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}{}_{(+)})\\
&= -S(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i_{(+)},\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}{}_{(-)})+g''-G''\\
&= \quad S(0_{(+)},\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m+\tfrac{1}{2}i_{(-)})\\
&\quad -S(0_{(+)},\ \tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)})+g''-G''
\end{aligned}$$

Dadurch wird also

$$\begin{aligned}
\Delta D = &+[\tfrac{1}{2}(a-b)]+[\tfrac{1}{2}a]-4S(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i_{(+)},\ \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}im-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}{}_{(-)})\\
&-2[\tfrac{1}{4}(a-b)]+a+b+1
\end{aligned}$$

Für den Fall der Vermehrung des Modulus um $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ ist keine besondere Untersuchung nöthig, weil offenbar die Moduli $m$, $im$, $-m$, $-im$ gleiche Decidenten haben. Wir haben also folgende Lehrsätze:

Ist der Decident des Modulus $a+bi$, $=D$ so sind die Decidenten von

| | |
|---|---|
| $a+1+(b+1)i$ | $D+a+b+1+[\tfrac{1}{2}a]\quad+[\tfrac{1}{2}(a-b)]\quad-2[\tfrac{1}{4}(a-b)]$ |
| $a+1+(b-1)i$ | $D+a-b+1+[-\tfrac{1}{2}b]+[-\tfrac{1}{2}(a+b)]-2[-\tfrac{1}{4}(a+b)]$ |
| $a-1+(b+1)i$ | $D-a+b+1+[\tfrac{1}{2}b]\quad+[\tfrac{1}{2}(a+b)]\quad-2[\tfrac{1}{4}(a+b)]$ |
| $a-1+(b-1)i$ | $D-a-b+1+[-\tfrac{1}{2}a]+[\tfrac{1}{2}(b-a)]\quad-2[\tfrac{1}{4}(b-a)]$ |

Hieraus ferner

| | | oder insofern $a$ ungerade ist |
|---|---|---|
| $a+2+bi$ | $D-\frac{a-b-3}{2}+2[\tfrac{1}{2}a]\quad-2[\frac{a-b}{4}]-2[\frac{-a-b-2}{4}]$ | $D+\frac{b-a-1}{2}$ |
| $a-2+bi$ | $D+\frac{a-b+3}{2}+2[-\tfrac{1}{2}a]-2[\frac{b-a}{4}]-2[\frac{a+b-2}{4}]$ | $D$ |
| $a+(b+2)i$ | $D-\frac{a+b-3}{2}+2[\tfrac{1}{2}b]\quad-2[\frac{a+b}{4}]-2[\frac{a-b-2}{4}]$ | $D+\frac{a+b-3}{2}$ |
| $a+(b-2)i$ | $D+\frac{a+b+3}{2}+2[-\tfrac{1}{2}b]-2[\frac{-a-b}{4}]-2[\frac{b-a-2}{4}]$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a+2+(b+2)i$ | $2a-b+1+D$ | oder | $D+b-1$ |
| $a+2+(b-2)i$ | $-a-2b+1+D$ | | $D+a-1$ |
| $a-2+(b+2)i$ | $a+2b+1+D$ | | $D-a-1$ |
| $a-2+(b-2)i$ | $-2a+b+1+D$ | | $D-b-1$ |

| | |
|---|---|
| $a+4+bi$ | $D+a+b$ |
| $a+(b+4)i$ | $D-a+b$ |
| $a-4+bi$ | $D-a-b$ |
| $a+(b-4)i$ | $D+a-b$ |

| | |
|---|---|
| $a+8+bi$ | $D+2$ |

| | |
|---|---|
| $a+4+(b+4)i$ | $D+2b$ |
| $a+4+(b-4)i$ | $D+2a$ |
| $a-4+(b+4)i$ | $D+2a$ |
| $a-4+(b-4)i$ | $D+2b$ |

Das Resultat der vorhergehenden Untersuchungen ist also folgendes:

Für den Modulus $m = a+bi$, wo $a$ ungerade $b$ gerade, wird

$$D\frac{1+i}{m} = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab+bb-8b+1) \text{ (und wenn } a+bi = 1+(2+2i)(\alpha+\beta i))$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{8}(-aa+2ab-3bb+1) \equiv -(\alpha-\beta)^2-\beta$$

$$D\frac{1-i}{m} = \tfrac{1}{8}(+aa+2ab-bb-8b-1) \text{ oder } \tfrac{1}{8}(+aa+2ab+3bb-1)$$

$$D\frac{-1-i}{m} = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab+bb+1) = \beta+\alpha\alpha+2\alpha\beta-\beta\beta \equiv -\beta+(\alpha+\beta)^2$$

$$D\frac{-1+i}{m} = \tfrac{1}{8}(+aa+2ab-bb-1) = \alpha+\alpha\alpha-2\alpha\beta-\beta\beta \equiv -\alpha-(\alpha+\beta)^2$$

$$D\frac{2}{m} = \tfrac{1}{2}ab$$

$$D\frac{i}{m} = \tfrac{1}{4}(aa+bb-1)$$

$$D\frac{-1}{m} = \tfrac{1}{2}(aa+bb-1)$$

*Allgemeines Theorem über die Decidenten.*

Es seien $A$, $B$, $C$ etc. ungleiche (unger. imag.) Primzahlen, deren keine die Zahl $M$ misst: alsdann ist

$$D\frac{M}{A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta}} = \alpha D\frac{M}{A}+\beta D\frac{M}{B}+\gamma D\frac{M}{C}+ \text{etc.}$$

$$M^{\frac{1}{4}(aa+bb-1)} \equiv i^{D\frac{M}{a+bi}} \text{ mod. } (a+bi) \text{ wenn } a+bi \text{ eine Primzahl}$$

$$D\frac{1+i}{m} = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab-3bb+1) = -\tfrac{1}{8}(3(a-b)\mp1)(a-b\mp1) \text{ wenn } a \equiv \tfrac{1}{3}$$

$$D\frac{1-i}{m} = \tfrac{1}{8}(+aa+2ab+3bb-1)$$

$$D\frac{-1-i}{m} = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab+bb+1) = \tfrac{1}{8}(a-b\mp1)(a-b\mp3) \text{ wenn } a \equiv \pm1$$

$$D\frac{-1+i}{m} = \tfrac{1}{8}(+aa+2ab-bb-1)$$

Allgemein $m \equiv 1 \mod. (1+i)$

$$D\frac{1+i}{m} = -\text{P. Real.} \frac{(1+i)(m^4-1)}{16} = \text{Coëff. im.} \frac{m^4-1}{8+8i}$$

$$D\frac{1-i}{m} = +\text{P. Real.} \frac{(1-i)(m^4-1)}{16} = \text{Coëff. im.} \frac{m^4-1}{8-8i}$$

$1+i \pmod{16}$

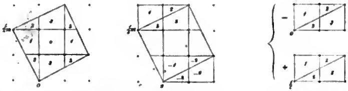
| $a$ | $b$ = 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 5 | 1 | 2 | 0 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 |
| 7 | 2 | 0 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| 9 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 3 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 3 | 0 | 2 |
| 13 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 |
| 15 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 3 |

[18.]

*Theorie des biquadratischen Restes* $-1-2i$.

Der Modulus $= m = a+bi$ soll so beschaffen sein, dass $a$ ungerade, $b$ gerade; auch setzen wir voraus, dass derselbe eine Primzahl sei.

Der Decident wird durch folgende Schemata vorgestellt, von deren Identität man sich leicht überzeugt:



Der Kürze wegen bezeichnen wir $S(x,\ x+\alpha,\ x+\alpha+\beta,\ x+\beta)$ durch $[x, \alpha, \beta]$ so dass

$$[x, \alpha, \beta] = -[x, \beta, \alpha] = [x+\alpha, \beta, -\alpha] = -[x+\alpha, -\alpha, \beta]$$
$$= [x+\alpha+\beta, -\alpha, -\beta] = -[x+\alpha+\beta, -\beta, -\alpha]$$

Setzt man ferner

$$\frac{m}{-2-4i} = \frac{-a-2b}{10} + \frac{-b+2a}{10} i = Q$$

so besteht der Decident aus folgenden acht Theilen

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= [0,\ \tfrac{1}{2},\ -iQ]\\
-2\,\mathrm{II} &= -2[0,\ \tfrac{1}{2},\ Q]\\
\mathrm{III} &= +[Q,\ \tfrac{1}{2},\ -iQ]\\
\mathrm{IV} &= +[-iQ,\ \tfrac{1}{2},\ Q]\\
-3\,\mathrm{V} &= -3[Q,\ \tfrac{1}{2},\ Q]\\
-3\,\mathrm{VI} &= -3[2Q,\ \tfrac{1}{2},\ -iQ]\\
+2\,\mathrm{VII} &= +2[(1-i)Q,\ \tfrac{1}{2},\ Q]\\
+\ \mathrm{VIII} &= +[0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}im]
\end{aligned}$$

Ist $F$ indefinite ein Elementarrest des Modulus $-1-2i$, so hat man

$$\Sigma[2FQ,\ \tfrac{1}{2},\ iQ] = [0,\ -\tfrac{1}{2}-i,\ \tfrac{1}{2}im].$$

Setzt man also für $F$: $0,\ 1,\ i,\ -1,\ -i$ so hat man

$$\begin{aligned}
0 = \quad & [0,\ \tfrac{1}{2},\ iQ] && = \mathrm{IX}\\
& +[2Q,\ \tfrac{1}{2},\ iQ] && = \mathrm{X}\\
& +[2iQ,\ \tfrac{1}{2},\ iQ] && = \mathrm{XI}\\
& +[-2Q,\ \tfrac{1}{2},\ iQ] && = \mathrm{XII}\\
& +[-2iQ,\ \tfrac{1}{2},\ iQ] && = \mathrm{XIII}\\
& -[0,\ -\tfrac{1}{2}-i,\ \tfrac{1}{2}im] && = -\mathrm{XIV}
\end{aligned}$$

Man setze dies zu dem vorigen Werth des Decident hinzu. Aus dieser Vereinigung fliessen folgende Resultate.

(1) Da $(1+2i)Q+\tfrac{1}{2}$ eine ganze Zahl ist, so wird

$$\mathrm{XI} = [-Q-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ iQ] = -[-Q,\ -\tfrac{1}{2},\ iQ] = -[Q,\ \tfrac{1}{2},\ -iQ]$$

also $$\mathrm{III}+\mathrm{XI} = 0$$

(2) Wir ziehen zusammen IV, $-3$V, X, XIII auf folgende Weise

$$\begin{aligned}
\mathrm{IV} &= +[-2Q+\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{1}{2},\ Q] && = [-2iQ-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}i,\ iQ]\\
\mathrm{V} &= -[2Q,\ +\tfrac{1}{2},\ -Q] && = -[-2iQ,\ -\tfrac{1}{2}i,\ iQ]\\
\mathrm{X} &= [+iQ-\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{1}{2},\ iQ]\\
&= [-iQ+\tfrac{1}{2}i,\ -\tfrac{1}{2},\ -iQ] && = [-2iQ-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{1}{2},\ iQ]\\
\mathrm{XIII} &= && \phantom{=}\ [-2iQ,\ \tfrac{1}{2},\ iQ]
\end{aligned}$$

Also die ganze Ausbeute aus diesen Theilen

$$\begin{aligned}&-4\,\mathrm{V}\\&+R(-2iQ)-R(-iQ)-I(-2iQ)+I(-iQ)\\&-\text{Quadr.}\,[-2iQ-\tfrac12+\tfrac12 i]\\&+\text{Quadr.}\,[-2iQ+\tfrac12-\tfrac12 i]\end{aligned}$$

(3) I, —2 II, —3 VI, +2 VII, +IX, +XII zusammengezogen geben folgendes

$$\begin{aligned}\mathrm{I}\ &=[0,\ \tfrac12,\ -iQ]\\\mathrm{II}\ &=[0,\ -\tfrac12 i,\ -iQ]\\\mathrm{VI}\ &=[iQ-\tfrac12 i,\ \tfrac12,\ -iQ]=[\tfrac12-\tfrac12 i,\ -\tfrac12,\ iQ]=[-\tfrac12+\tfrac12 i,\ \tfrac12,\ -iQ]\\\mathrm{VII}&=[-Q-\tfrac12 i,\ \tfrac12,\ Q]\ \ =[-\tfrac12+\tfrac12 i,\ -\tfrac12,\ -Q]=[+\tfrac12+\tfrac12 i,\ -\tfrac12 i,\ -iQ]\\\mathrm{IX}\ &=[0,\ -\tfrac12,\ -iQ]\\\mathrm{XII}&=[-iQ+\tfrac12 i,\ \tfrac12,\ iQ]=[\tfrac12+\tfrac12 i,\ -\tfrac12,\ -iQ]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=+4\,\mathrm{I}-4\,\mathrm{II}-4\,\mathrm{VI}+4\,\mathrm{XII}\\&\quad-I(\tfrac12 i)+I(-iQ+\tfrac12 i)+I0-I(-iQ)-2R0+2R(-iQ)\\&\quad+2\,\text{Quadr.}\,(-iQ+\tfrac12+\tfrac12 i)\\&=4\,\mathrm{I}-4\,\mathrm{II}-4\,\mathrm{VI}+4\,\mathrm{XII}\\&\quad+R(-1-2i)Q-R(-2iQ)-I(-iQ)+2R(-iQ)\\&\quad+2\,\text{Quadr.}\,(-2iQ+\tfrac12+\tfrac12 i)\end{aligned}$$

Dies Alles zusammen gibt folglich

$$+4\,\mathrm{I}-4\,\mathrm{II}-4\,\mathrm{V}-4\,\mathrm{VI}+4\,\mathrm{XII}+\tfrac12(a-1)-\tfrac12 b$$
$$+\text{Quadr.}(-2iQ+\tfrac12-\tfrac12 i)+2\,\text{Quadr.}\,(-2iQ+\tfrac12+\tfrac12 i)-\text{Quadr.}\,(-2iQ-\tfrac12+\tfrac12 i)$$

Endlich gibt $\mathrm{VIII}-\mathrm{XIV}=\tfrac12(a-1)+\tfrac12 b$

Also da die drei Quadrattheile dem Decident von $\frac{m}{-1-2i}$ gleich sind, so wird

$$\text{Dec.}\,\frac{-1-2i}{m}=a-1+\text{Dec.}\,\frac{m}{-1-2i}\quad \text{W. Z. B. W.}$$

Wahrscheinlich wird der Beweis noch sehr dadurch vereinfacht werden können, dass

$$\text{Dec.}\,\frac{1+2i}{m}=$$



[19.]

Durch Induction ist folgendes gefunden

$$\text{Dec. } \frac{a-bi}{a+bi} \equiv \frac{aa+2ab-1}{4}, \qquad a \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\equiv \frac{aa+2ab+2bb-1}{4}, \qquad a+bi \equiv 1 \pmod{2+2i}$$

Hiermit steht Folgendes in Verbindung:

Es sei $aa+bb=p$ (Primzahl) $a \equiv 1 \pmod{4}$

$$1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{4}(p-1) \equiv \alpha \quad \text{mod. } p$$

$$\tfrac{1}{4}(p+3).\tfrac{1}{4}(p+7) \ldots \tfrac{1}{2}(p-1) \equiv \beta$$

$$\tfrac{1}{2}(p+1).\tfrac{1}{2}(p+3) \ldots \tfrac{3}{4}(p-1) \equiv \gamma$$

$$\tfrac{1}{4}(3p+1) \ldots\ldots\ldots\ldots p-1 \equiv \delta$$

so ist

$$\alpha \equiv \delta, \quad \beta \equiv \gamma \quad \text{wenn } \tfrac{1}{2}b \text{ gerade}$$

$$\alpha \equiv -\delta, \quad \beta \equiv -\gamma \quad \text{wenn } \tfrac{1}{2}b \text{ ungerade}$$

$$\pm\alpha\beta \equiv i, \quad \pm\beta\beta \equiv 2b, \quad \frac{\beta}{\alpha} \equiv 2a, \quad \frac{\beta}{1+\alpha\beta} \equiv \sqrt{a}, \quad \tfrac{1}{2}\beta(1-\alpha\beta) \equiv \sqrt{a}$$

Es wird demnach nur darauf ankommen die Decidenten bei reellen Resten zu bestimmen

$$a^{\frac{1}{4}bb}.b^{\frac{1}{4}(aa-1)} \equiv 1 \pmod{(aa+bb)} \quad \text{si } a \equiv 1 \pmod{4} \quad b \text{ par } \; aa+bb \text{ primus}$$

Will man bloss mit reellen Zahlen zu thun haben, so kommt es auf folgendes Haupttheorem an. Es sei $a-1$ durch $4$, $b$ durch $2$ theilbar; $a$ und $b$ ohne gemeinschaftlichen Divisor, $k$ bedeute die Zahlen $1, 2, 3 \ldots aa+bb-1$.

Es sei

$\alpha$ die Zahl aller Werthe von $k$, wo die kleinsten Reste von $ak$, $bk$, $aak$, $abk$ alle zwischen $0$ und $\frac{1}{2}(aa+bb)$ liegen

$\beta$ $ak$, $bk$, $aak$, $-abk$

$\gamma$ $ak$, $bk$, $-aak$, $-abk$

$\delta$ $ak$, $bk$, $-aak$, $abk$

alsdann ist $\beta+2\gamma+3\delta-\frac{1}{4}(aa-1)$ durch $4$ theilbar.

## [II.]

## VORBEREITUNGEN ZUR ALLGEMEINEN THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE.

---

(1.)

Es sei $P = x + iy$, wo weder $x$ noch $y$ eine ganze Zahl ist. Wir bezeichnen die Zahl $+1$ durch $LP$, $L'P$, $L''P$, $L'''P$, je nachdem $P$ im ersten, zweiten, dritten oder vierten Qradranten liegt (im ersten und zweiten Quadranten ist $[y]$ gerade, im dritten und vierten ungerade; im ersten und vierten ist $[x]$ gerade, im zweiten und dritten ungerade). In allen Fällen, wo diese Zeichen nicht $= 1$ sind, werden sie $= 0$ vorausgesetzt. Man hat dann folgende 24 Relationen

$$\begin{array}{lll}
L(P\pm 1) = L'P & L(P\pm i) = L'''P & L(P\pm 1\pm i) = L''P \\
L'(P\pm 1) = LP & L'(P\pm i) = L''P & L'(P\pm 1\pm i) = L'''P \\
L''(P\pm 1) = L'''P & L''(P\pm i) = L'P & L''(P\pm 1\pm i) = LP \\
L'''(P\pm 1) = L''P & L'''(P\pm i) = LP & L'''(P\pm 1\pm i) = L'P
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
LiP = L'''P & L(-P) = L''P & L(-iP) = L'P \\
L'iP = LP & L'(-P) = L'''P & L'(-iP) = L''P \\
L''iP = L'P & L''(-P) = LP & L''(-iP) = L'''P \\
L'''iP = L''P & L'''(-P) = L'P & L'''(-iP) = LP
\end{array}$$

(2.)

Durch $PP'$ oder $z$ bezeichnen wir eine Linie, die von $P$ anfängt und in $P'$ endigt. Sie braucht nicht gerade zu sein. Wir legen allen geraden Linien von $2x + 2iy$ nach $2x + (2y + 1)i$ gezogen (wo $x, y$ indefinite alle ganzen Zahlen bedeuten) eine positive und eine negative Seite bei; für jene wählen wir die rechte, für diese die linke. Durch $Tz$ bezeichnen wir die Anzahl aller Schnitte

der Linie $z$ mit den eben gedachten Linien, als positiv gezählt diejenigen, wo $z$ von der negativen Seite auf die positive übergeht, als negativ die andern. Ferner setzen wir

$$Tz - T(z-1) = Sz$$

($z-1$ ist eine der $z$ parallele Linie, die von dem Punkte $P-1$ nach $P'-1$ geht). Offenbar brauchen wir nur dem oben gedachten System von Linien noch die von $2x+1+2yi$ nach $2x+1+(2y+1)i$ gezognen beizufügen und deren linke Seiten positiv und die rechten als negativ zu betrachten um in $Sz$ die Anzahl aller Schnitte von $z$ mit diesem zweifachen System von Geraden zu erkennen. Wir haben nun ferner

$$\begin{aligned}
T(-z) &= -T(z+i) \\
T(z)+T(z+i) &= [\tfrac{1}{2}x] - [\tfrac{1}{2}x'] \\
S(z+1) &= -Sz \\
S(z+i) &= -Sz+LP+L'''P-LP'-L'''P' \\
S(z+1+i) &= \phantom{-}Sz-LP-L'''P+LP'+L'''P' \\
Siz &= \phantom{-}Sz-LP+LP' \\
S(-z) &= \phantom{-}Sz-LP-L'''P+LP'+L'''P' \\
S(-iz) &= \phantom{-}Sz+L'P-L'P'
\end{aligned}$$

## 1.

Wir betrachten in der Ebene zwei Gattungen von Punkten; einmal die, denen ganze Zahlen entsprechen; dann diejenigen, welche durch Producte aus ganzen Zahlen in die Grösse $Q = \frac{m}{2M}$ bestimmt werden. Wir können dieselben durch die Benennungen Punkte der ersten und Punkte der zweiten Ordnung unterscheiden.

## 2.

Indem wir jeden Punkt der zweiten Ordnung mit seinen vier Nachbarn durch gerade Linien verbinden, die wir *Ligaturen* nennen werden, theilt sich die ganze Ebene in unendlich viele Quadrate. Die Punkte der ersten Ordnung liegen theils innerhalb dieser Quadrate, theils auf den Ligaturen innerhalb der Gren-

zen derselben, theils auf den Grenzen der Ligaturen, das letzte, wenn sie zugleich Punkte der zweiten Ordnung sind. Ist $kQ$ ein solcher Punkt, so muss insofern $m$, $M$ ohne gemeinschaftlichen Theiler und beide ungerade sind, $k$ durch $M$ theilbar sein.

3.

Bei den Ligaturen können wir zugleich einen Unterschied zwischen dem Anfangspunkte und Endpunkte machen, also $PQ$ von $QP$ unterscheiden, oder auch in einigen Fällen diesen Unterschied bei Seite setzen. Wir nennen zwei solche Ligaturen entgegengesetzte. Bezeichnen können wir überhaupt am bequemsten die Ligaturen durch ihren Anfangs- und Endpunkt, die man allenfalls in eine Klammer einschliessen mag. Einer Ligatur entgegengesetzte soll durch das doppelte Ueberstreichen angedeutet werden $QP = \overline{\overline{PQ}}$.

4.

Jedes der gedachten Quadrate wird von vier solchen Ligaturen eingeschlossen

$$\{kQ, (k+1)Q\}, \ \{(k+1)Q, (k+1+i)Q\}, \ \{(k+1+i)Q, (k+i)Q\}, \ \{(k+i)Q, kQ\} \ldots \Omega$$

denen es zur rechten liegt. Es ist wichtig hiebei auf die Form der Zahl $k$ zu sehen, und wir unterscheiden in dieser Beziehung viererlei Quadrate, je nachdem $k \equiv 0, 1, 1+i, i \pmod{2}$ ist, und bedienen uns dann der Zahlen 0, 1, 2, 3, die wir resp. die Intensoren der Quadrate nennen.

5.

Den Ligaturen legen wir dieselben Intensoren bei, welche die ihnen zur rechten liegenden Quadrate haben.

6.

Wir haben nun ein anderes grösseres Quadrat $\Omega'$ zu betrachten, nemlich dasjenige, welches entsteht, wenn das in 4 angezeigte für $k = 0$, mit $M$ multiplicirt wird: dies wird also durch die geraden Linien $\mu$, $\mu'$, $\mu''$, $\mu'''$ begrenzt

$$\{0, \tfrac{1}{2}m\}, \ \{\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}(1+i)m\}, \ \{\tfrac{1}{2}(1+i)m, \tfrac{1}{2}im\}, \ \{\tfrac{1}{2}im, 0\}$$

Es besteht aus ganzen Quadraten $\Omega$ und Stücken solcher Quadrate; man zähle

alle Punkte der ersten Ordnung innerhalb desselben zusammen, indem man für jeden Punkt den Intensor des Quadrats $\Omega$, worin er liegt, nimmt, diese Summe oder deren kleinster Rest nach dem Modulus 4 heisst der Decident von $M$ für den Modulus $m$, und bestimmt die biquadratische Modalität von $M$ in Beziehung auf diesen Modulus.

7.

Wir zerlegen das Quadrat $\Omega'$ in 5 Stücke auf folgende Art. Man verbinde den Punkt 0 mit $\frac{1}{2}(1+i)(m-1)$ durch die Linie $\lambda$, die durch lauter Ligaturen innerhalb $\Omega'$ gehe. Es sei

$$\tfrac{1}{2}m+i\lambda=\lambda', \quad \tfrac{1}{2}(1+i)m-\lambda=\lambda'', \quad \tfrac{1}{2}im-i\lambda=\lambda'''$$

diese 4 Linien gehen also von den Ecken des Quadrats $\Omega'$ aus ins Innere und endigen sich an den vier Ecken des innersten Quadrats, dessen Intensor 0 sein wird, wenn $m\equiv 1 \pmod{2+2i}$; die Ligaturen dieses Quadrats seien $\nu, \nu', \nu'', \nu'''$.

Die 5 Stücke werden also begrenzt sein

I. ... $\mu$, $\lambda'$, $\bar{\bar{\nu}}$, $\bar{\lambda}$
II. ... $\mu'$, $\lambda''$, $\bar{\bar{\nu}}'$, $\bar{\lambda}'$
III. ... $\mu''$, $\lambda'''$, $\bar{\bar{\nu}}''$, $\bar{\lambda}''$
IV. ... $\mu'''$, $\lambda$, $\bar{\nu}'''$, $\bar{\lambda}'''$
V. das innere Quadrat $\nu, \nu', \nu'', \nu'''$

Der Decident ist also die Aufzählung aller Punkte erster Ordnung in I. II. III. IV.

8.

Der Kürze wegen soll Intensor irgend eines Punkts der Intensor des Quadrats sein, in dem er liegt, und durch vorgesetztes $\Upsilon$ ausgedrückt werden.

9.

Der Decident ist also

$$\Sigma\Upsilon P+\Sigma\Upsilon P'+\Sigma\Upsilon P''+\Sigma\Upsilon P'''$$

wo $P$ alle Punkte in I. u. s. w. bedeuten.

10.

Wir betrachten nun noch den Raum $VI = -i\,IV$, welcher ausserhalb $\Omega'$ liegt, sich aber durch $\mu$ an I anschliesst und mit ihm zusammen den Raum $\omega$ ausmacht, der aus $AA+BB$ vollständigen Quadraten besteht. Bedeutet $\Pi$ alle ganzen; $\Pi'$ alle um $\frac{1}{2}i$ vermehrten ganzen Punkte dieses Raumes, so lässt sich leicht beweisen, dass der Decident

$$= \Sigma\Upsilon\Pi - \Sigma\Upsilon\Pi' + \text{Anzahl aller ganzen Punkte innerhalb VI}$$
$$- \text{Anzahl aller halben Punkte innerhalb VI}.$$

11.

Man denke sich von jedem ganzen Punkte $k$ nach $k+\frac{1}{2}i$ gerade Linien gezogen, deren rechte Seite als positiv, die linke als negativ angesehen wird. Es sei $l$ eine Linie, und $Sl$ bezeichne die Summe aller Schnitte der $l$ mit jenem System von Linien, diejenigen als positiv angesehen, wo $l$ von der negativen auf die positive übergeht, die entgegengesetzten Schnitte als negativ. Man hat dann für den Decidenten folgenden Ausdruck

$$\Sigma(\Upsilon l.Sl) + \Sigma Sl' - S\mu$$

wo $l$ *alle* Ligaturen der Quadrate in $\omega$ bedeuten (immer so genommen, dass die Quadrate ihnen zur rechten liegen) und wo $l'$ diejenigen Ligaturen bedeutet, die auf dem Umfange der Figur $\omega$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}m$ liegen, also ausserhalb $\Omega'$.

Alle Ligaturen $l$ bestehen aus

1) $l'$

2) $l''$ die innerhalb $\Omega'$ liegenden Grenzligaturen also $\lambda'$, $\bar{\nu}$, $\bar{\lambda}$.

3) $l'''$ die im Innern von $\omega$ liegen.

Verstände man unter $l$ indefin. alle Ligaturen, die sich innerhalb $\omega$ oder auf den Grenzen dieser Figur befinden, insofern sie von Punkten $\frac{km}{2M}$ ausgehen, so dass $k$ durch $1+i$ theilbar ist, so wäre der Decident

$$= \Sigma a.Sl - S\mu$$

wo $a = 1$ für alle Ligaturen im Innern von $\omega$

$a = \Upsilon l + 1$ für alle Grenzligaturen ausserhalb $\Omega'$, deren Richtung in der von 0 nach $\frac{1}{2}m$ gehenden Grenze liegt

$\alpha = -(\Upsilon\lambda+1) = -\Upsilon l$ für alle auf dieser Grenze, die in entgegengesetztem Sinne laufen

$\alpha = \Upsilon l$ für alle Grenzligaturen innerhalb $\Omega'$, deren Richtung auf 0 zugeht

$\alpha = -\Upsilon l+1$ für alle Grenzligaturen innerhalb $\Omega'$, deren Richtung von 0 abwärts geht.

12.

Wir können nun die sämmtlichen vorkommenden $l$ (nach der letzten Manier) zu zweien combiniren, nemlich $l$ mit $\frac{1}{2}m-l$, welche wir verbundene Ligaturen nennen wollen; eine einzige ist hiervon ausgenommen, welche isolirt steht oder mit ihrer verbundenen Ligatur identisch ist, nemlich diejenige, welche von

$$\tfrac{1}{2}(M-1).\tfrac{m}{2M} \quad \text{nach} \quad \tfrac{1}{2}(M+1)\tfrac{m}{2M} \quad \text{läuft}$$

für verbundene Ligaturen ist das $\alpha$ immer einerlei.

[III.]

THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE.

1.

Kleinste Reste des Modulus $m = a+bi$ heissen die ganzen Zahlen $\mu = \alpha+\delta i$, für welche $\frac{\mu}{m} = x+yi$ so beschaffen ist, dass $x$ und $y$ positiv und kleiner als 1 sind. Es kommt noch dazu der Rest 0 *). Ihre Anzahl ist $= aa+bb$.

2.

In sofern $aa+bb$ ungerade ist, wird $aa+bb$ von der Form $4n+1$ sein. Den kleinsten Rest 0 ausgeschlossen, theilen sich die übrigen in vier Classen. Zur ersten Classe $f$ zählen wir diejenigen, wo $x$ und $y$ kleiner als $\frac{1}{2}$ sind,

*) und wenn $a$ und $b$ etwa den gemeinschaftlichen Divisor $e$ haben, die Zahlen $\frac{m}{e}, \frac{2m}{e}, \frac{3m}{e} \ldots \frac{(e-1)m}{e}$. Jedoch wollen wir diesen Fall vorerst von der Untersuchung ausschliessen.

die zweite $f'$ wo $x > \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{2}$
dritte $f''$ . $x > \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$
vierte $f'''$ $x < \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$

Man erhält alle Reste

$$f' \text{ aus } if + m$$
$$f'' \text{ aus } -f + (1+i)m$$
$$f''' \text{ aus } -if + im$$

3.

Es sei $M$ eine andere Zahl, die mit $m$ keinen Factor gemein hat, so wird

$$M^{aa+bb-1} \equiv 1 \text{ (mod. } m).$$

sein: folglich $M^{\frac{1}{4}(aa+bb-1)}$ entweder $\equiv 1$, oder $\equiv i$, oder $\equiv -1$, oder $\equiv -i$ d. i. $\equiv i^{\varepsilon}$, wo $\varepsilon$ eine der vier Zahlen 0, 1, 2, 3 vorstellt. Im ersten Fall wird $M$ biquadratischer Rest von $m$ sein, mithin auch quadratischer. Im dritten ist $M$ quadratischer aber nicht biquadratischer Rest; im zweiten und vierten sowohl quadratischer als biquadratischer Nichtrest. Wir nennen dies $\varepsilon$, wovon die biquadratische Modalität der Zahl $M$ in Beziehung auf den Modulus $m$ abhängt, den Decidenten von $M$ beim Modulus $m$. Die Induction lehrt folgenden schönen Lehrsatz. „Sind $M$ und $m$ ungerade Primzahlen von der Form $1+(2+2i)\mu$ so dass $\mu$ eine ganze Zahl ist, so ist die Differenz der beiden Decidenten, von $M$ beim Modulus $m$, und von $m$ beim Modulus $M$ entweder $= 0$ oder $= 2$; das erstere, wenn wenigstens eine der Zahlen $m$, $M$ von der Form $1+4N$ ist; das andere, wenn beide von der Form $1+2i+4N$ sind.“ Dies Theorem der Reciprocität ist dem bei den Quadratischen Resten bei bloss reellen Zahlen analog.

4.

Man multiplicire alle Zahlen $f$ mit $M$, und suche deren kleinste Reste nach dem Modulus $m$. Es seien darunter $\alpha$ zu $f$ gehörig

$\beta$ $f'$
$\gamma$ $f''$
$\delta$ $f'''$

so ist $\varepsilon \equiv \beta + 2\gamma + 3\delta$ (mod. 4).

Beweis. Der Inbegriff derjenigen Zahlen aus $f$, deren Producte mit $M$ Reste zu $f$ gehörig geben, sei $g$; der Inbegriff derjenigen, deren Producte Reste aus $f'$ geben, sei $g'$, und ebenso $g''$, $g'''$; so werden die kleinsten Reste von

$$-ig'M, \quad -g''M, \quad ig'''M$$

alle in $f$ enthalten, und sowohl unter sich als von den kleinsten Resten der Producte $gM$ verschieden sein, folglich das Product aus allen

$$gM, \quad -ig'M, \quad -g''M, \quad +ig'''M$$

dem Producte aller $f$ congruent sein, mithin auch dem Producte aller $g, g', g'', g'''$. Jenes Product ist aber gleich dem Producte aus allen $g, g', g'', g'''$ in

$$M^{\alpha}.(-iM)^{\beta}.(-M)^{\gamma}.(iM)^{\delta}$$

also dies letzte Product $\equiv 1$

folglich $$M^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}(-i)^{\beta}(-1)^{\gamma}i^{\delta} \equiv 1$$
oder $$M^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \equiv i^{\beta}(-1)^{\gamma}(-i)^{\delta} \equiv i^{\beta+2\gamma+3\delta}$$

woraus der Lehrsatz von selbst folgt.

5.

Die Entscheidung, ob der kleinste Rest einer Zahl $N$ nach dem Modulus $m$ zur Classe $f, f', f''$ oder $f'''$ gehöre, ist leicht. Ist nemlich $\omega$ die in $\frac{N}{m}$ enthaltene ganze Zahl, so wird jener Rest $= N - \omega m$ sein, und also zu $f, f', f''$ gehören, je nachdem

$$\frac{N}{m} - \omega = x + iy$$

gesetzt

$$\begin{array}{ll} x < \tfrac{1}{2}, & y < \tfrac{1}{2} \\ x > \tfrac{1}{2}, & y < \tfrac{1}{2} \\ x > \tfrac{1}{2}, & y > \tfrac{1}{2} \\ x < \tfrac{1}{2}, & y > \tfrac{1}{2} \end{array}$$

ist. In diesen 4 Fällen wird der Reihe nach die in $\frac{2N}{m}$ enthaltene ganze Zahl folgende sein

$$2\omega$$
$$2\omega+1$$
$$2\omega+1+i$$
$$2\omega+i$$

Hieraus ist klar, dass der kleinste Rest von $N$ nach dem Modulus $m$ zu $f, f', f'', f'''$ gehören werde, je nachdem die in $\frac{2N}{m}$ enthaltene ganze Zahl $= \xi+\eta i$ gesetzt

| | |
|---|---|
| $\xi$ gerade | $\eta$ gerade |
| $\xi$ ungerade | $\eta$ gerade |
| $\xi$ ungerade | $\eta$ ungerade |
| $\xi$ gerade | $\eta$ ungerade |

6.

Hiernach findet sich der Decident von $M$ nach dem Modulus $m$ auf folgende Art. Man suche die ganzen Zahlen, die in allen einzelnen $\frac{2fM}{m}$ enthalten sind. Diese allgemein durch $x+yi$ bezeichnet, lasse man ganz aus der Acht, diejenigen, wo $x$ und $y$ beide gerade sind, rechne für jede derjenigen, wo $x$ ungerade und $y$ gerade ist, eins, entnehme für jede derjenigen, wo $x$ und $y$ beide ungerade sind, zwei, und drei für jede von denen, wo $x$ gerade, $y$ ungerade ist. Von der Summe aller dieser Zahlen nehme man den kleinsten Rest nach 4, welcher der verlangte Decident sein wird. Wir drücken dies so aus

$$\text{Dec.}\ \frac{M}{m} = \Sigma n$$

wo $\left[\frac{2fM}{m}\right] = x+yi$, $n = 0$ zu setzen ist wenn $x$ gerade $y$ gerade
$1$ $x$ ungerade $y$ gerade
$2$ $x$ ungerade $y$ ungerade
$3$ $x$ gerade $y$ ungerade

Kürze halber wollen wir $n$ durch die Characteristik $\theta$ bezeichnen, $n = \theta\frac{2fM}{m}$ *).

---

*) Um zu entscheiden, in welche Classe $M$ in Beziehung auf $m$ gehört, wählt man diejenigen Werthe von $k$ (unter den Zahlen $1, 2, 3 \ldots p-1$) aus wodurch $\left[\frac{2km'M}{p}\right]$ gerade wird und addirt $-\Sigma\left[\frac{2km'}{p}\right]^2$ Nimmt man $k$ nur bis $\frac{1}{2}p$, so hat man zu summiren

$$-\Sigma\left\{\left[\frac{2km'M}{p}\right]^2+\left[\frac{2km'}{p}\right]^2\right\}$$

für diejenigen Werthe von $\left[\frac{2km'M}{p}\right]$ die durch $1+i$ theilbar sind.

7. 8.

Diese Regel ist allgemein, was für eine Zahl auch $M$ bedeute. Für den Fall, der zunächst den Gegenstand unserer Untersuchung ausmachen soll, wo $M$ ungerade und von der Form $1+(2+2i)N$ vorausgesetzt wird, ist eine etwas abgeänderte Vorschrift zweckmässiger.

Man denke sich die Zahlen $f$ wiederum in 4 Classen zerlegt; in die erste setzt man die $(h)$, deren Doppeltes sich auch noch in $f$ findet; in die zweite $h'$ zählen wir die, deren Doppelte $2h'$ zu $f'$ gehören, und ebenso $h''$ und $h'''$ bedeuten diejenigen, deren Doppelte zu $f''$ und $f'''$ gehören. Es ist also der Decident $\varepsilon$

$$\varepsilon = \Sigma\theta\frac{2hM}{m}+\Sigma\theta\frac{2h'M}{m}+\Sigma\theta\frac{2h''M}{m}+\Sigma\theta\frac{2h'''M}{m}.$$

Den Complexus aller $2h$ und $-2h''+(1+i)m$ nennen wir $H$

den von allen $-i(2h'-m)$ und $i(2h'''-im)$ nennen wir $H'$

$H$ und $H'$ umfassen also alle $f$, jene sind die geraden, diese die ungeraden.

Ferner sind folgende Relationen in Anwendung zu bringen

$$\begin{aligned}
\theta iN &= 1+\theta N\\
\theta(-N) &= 2+\theta N\\
\theta(-iN) &= 3+\theta N\\
\theta(N+1) &= 1-\theta N\\
\theta(N+1+i) &= 2+\theta N\\
\theta(N+i) &= 3-\theta N
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
\theta\frac{(-2h'i+mi)M}{m} &= 3-\theta\frac{-2h'iM}{m} = -\theta\frac{2h'M}{m}\\
\theta\frac{(-2h''+m(1+i))M}{m} &= 2+\theta\frac{-2h''M}{m} = \theta\frac{2h''M}{m}\\
\theta\frac{(2h'''i+m)M}{m} &= 1-\theta\frac{2h'''iM}{m} = -\theta\frac{2h'''M}{m}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \Sigma\theta\frac{2hM}{m}-\theta\frac{(-2h'i+mi)M}{m}+\theta\frac{(-2h''+m(1+i))M}{m}-\theta\frac{(2h'''i+m)M}{m}\\
&= \Sigma\theta\frac{HM}{m}-\Sigma\theta\frac{H'M}{m}
\end{aligned}$$

oder

$$\varepsilon = \Sigma \pm \theta \frac{fM}{m}$$

ubi signum superius accipiendum pro paribus $f$, inferius pro imparibus.

9.

Es sei nun allgemein $f = \xi + \eta i$. Die Zahlen $\xi, \eta$ sind durch die Bedingung, dass $f$ ein kleinster Rest von $m$ sein, oder $\frac{f}{m} = x + yi$ gesetzt, $x$ und $y$ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen müssen, innerhalb gewisser Grenzen beschränkt, wofür sich durch Unterscheidung der verschiedenen Fälle leicht bestimmte Regeln geben liessen. Ertheilen wir $\eta$ einen bestimmten Werth, so wird wiederum $\xi$ seine bestimmten Grenzen haben. Z. B. wenn wir annehmen, dass $a$ negativ, $b$ positiv ist, so muss, da

$$x = \frac{a\xi + b\eta}{aa+bb}$$
$$y = \frac{a\eta - b\xi}{aa+bb}$$

I. damit $x$ positiv werde $\xi < -\frac{b}{a}\eta$

II. damit $y$ positiv werde $\xi < \frac{a}{b}\eta$

III. damit $x < \frac{1}{2}$ werde $\xi > \frac{aa+bb-2b\eta}{2a}$

IV. damit $y < \frac{1}{2}$ werde $\xi > \frac{2a\eta - aa - bb}{2b}$

für positive $\eta$ schliesst die zweite Bedingung bereits die erste ein, für negative $\eta$ hingegen ist es umgekehrt; ebenso ist die dritte Bedingung schon in der vierten enthalten,

wenn $\eta < \frac{1}{2}(a+b)$
und umgekehrt, wenn $\eta > \frac{1}{2}(a+b)$

Wir haben indessen nicht nöthig alle acht Fälle, die hier eintreten können, besonders zu betrachten, sondern bezeichnen nur für einen bestimmten Werth von $\eta$ die kleinere Grenze von $\xi$ durch $\xi^0$, die grössere durch $\xi^{00}$ und bemerken nur, dass bei diesen Grenzwerthen immer entweder $x = 0$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ ist, und zwar dass

| wenn | in der *obern* Grenze | in der *untern* Grenze |
|---|---|---|
| $a$ pos. $b$ positiv | $x=\frac{1}{2}$ oder $y=0$ | $x=0$ oder $y=\frac{1}{2}$ |
| $a$ neg. $b$ positiv | $x=0$ oder $y=0$ | $x=\frac{1}{2}$ oder $y=\frac{1}{2}$ |
| $a$ neg. $b$ negativ | $x=0$ oder $y=\frac{1}{2}$ | $x=\frac{1}{2}$ oder $y=0$ |
| $a$ pos. $b$ negativ | $x=\frac{1}{2}$ oder $y=\frac{1}{2}$ | $x=0$ oder $y=0$ |

sein muss. Wir werden diese vier Fälle Kürze halber so unterscheiden, dass wir sagen, im ersten gehöre $m$ zum ersten Quadranten, im zweiten zum zweiten etc.

10.

Wir wollen nun das Aggregat aller $\pm\theta^{\frac{fM}{m}}$ näher betrachten, bei denen $\eta$ einen bestimmten Werth hat. Indem $\xi$ nach und nach stetig von dem kleinsten Werthe $\xi^0$ bis zum grössten $\xi^{00}$ wächst, wird sich

$$\frac{(\xi+\eta i)M}{m} = X + Yi$$

auch nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, und zwar wird, wenn $\frac{M}{m}$ im ersten Quadranten liegt, sowohl $X$ als $Y$ beständig wachsen; liegt $\frac{M}{m}$ im zweiten Quadranten, so wird $X$ beständig abnehmen und $Y$ zunehmen; im dritten Quadranten wird das umgekehrte vom ersten, im vierten das umgekehrte vom zweiten Statt finden. Allein die in $X+iY$ enthaltene ganze Zahl wird sich sprungsweise ändern, indem entweder $[X]$ oder $[Y]$ sich um Eine Einheit ändert. Es seien die Werthe von $\xi$, wo ein solcher Uebergang Statt findet, d. i. wo entweder $X$ oder $Y$ eine ganze Zahl wird, der Reihe nach folgende

$$\xi', \xi'', \xi''', \ldots \xi^n$$

Hier muss bemerkt werden, dass weder diese Werthe noch $\xi^0$ und $\xi^{00}$ ganze Zahlen sein können, ausgenommen für $\eta = 0$, wo entweder $\xi^0$ oder $\xi^{00} = 0$ wird. Es sei nun

$$\theta^{\frac{(\xi'+\eta i)M}{m}} - \theta^{\frac{(\xi^0+\eta i)M}{m}} = \delta' \quad \text{(anders auszudrücken}$$

$$\theta^{\frac{(\xi''+\eta i)M}{m}} - \theta^{\frac{(\xi'+\eta i)M}{m}} = \delta''$$

etc.

$$\theta^{\frac{(\xi^{00}+\eta i)M}{m}} - \theta^{\frac{(\xi^{n-1}+\eta i)M}{m}} = \delta^n$$

so sieht man leicht, weil zwischen $\xi^0$ und $\xi'$ $[\frac{1}{2}\xi'] - [\frac{1}{2}\xi^0]$ gerade und $[\frac{1}{2}\xi' + \frac{1}{2}] - [\frac{1}{2}\xi^0 + \frac{1}{2}]$ ungerade ganze Zahlen liegen etc., dass bloss den bestimmten Werth von $\eta$ betrachtet

$$\begin{aligned}(\pm 1)\Sigma\theta\frac{fM}{m} = &\{[\tfrac{1}{2}\xi'] - [\tfrac{1}{2}\xi^0] - [\tfrac{1}{2}\xi' + \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{1}{2}\xi^0 + \tfrac{1}{2}]\} \,.\, \theta\frac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} \\ &+ \{[\tfrac{1}{2}\xi''] - [\tfrac{1}{2}\xi'] - [\tfrac{1}{2}\xi'' + \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{1}{2}\xi' + \tfrac{1}{2}]\} \,.\, \{\theta\frac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} + \delta'\} \\ &+ \{[\tfrac{1}{2}\xi'''] - [\tfrac{1}{2}\xi''] - [\tfrac{1}{2}\xi''' + \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{1}{2}\xi'' + \tfrac{1}{2}]\} \,.\, \{\theta\frac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} + \delta' + \delta''\} \\ &+ \text{etc.} \\ &+ \{[\tfrac{1}{2}\xi^{00}] - [\tfrac{1}{2}\xi^n] - [\tfrac{1}{2}\xi^{00} + \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{1}{2}\xi^n + \tfrac{1}{2}]\} \,.\, \{\theta\frac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} + \delta' + \delta'' + \ldots + \delta^n\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = &-([\tfrac{1}{2}\xi^0] - [\tfrac{1}{2}\xi^0 + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \theta\frac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} \\ &-([\tfrac{1}{2}\xi'] - [\tfrac{1}{2}\xi' + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \delta' \\ &-([\tfrac{1}{2}\xi''] - [\tfrac{1}{2}\xi'' + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \delta'' \\ &- \text{etc.} \\ &-([\tfrac{1}{2}\xi^n] - [\tfrac{1}{2}\xi^n + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \delta^n \\ &+([\tfrac{1}{2}\xi^{00}] - [\tfrac{1}{2}\xi^{00} + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \theta\frac{(\xi^{00} + \eta i)M}{m}\end{aligned}$$

(wo das obere Zeichen für gerade $\eta$, das untere für ungerade gilt.)

Die Zahlen $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$ u.s.w. können keine andere Werthe haben als $+1$ und $-1$. Den Werth $+1$ bekommt $\delta'$, wenn die Werthe von $X$, $Y$, die zu $\xi'$ gehören, durch $X'$, $Y'$ bezeichnet

| | $\frac{M}{m}$ im 1. Quadr. | $\frac{M}{m}$ im 2. Quadr. |
|---|---|---|
| | $X'$ ganze gerade Zahl | $X'$ ganze gerade Zahl |
| und | $[Y]$ ungerade | $[Y]$ gerade |
| | $Y'$ ganze gerade Zahl | $Y'$ ganze gerade Zahl |
| und | $[X]$ gerade | $[X]$ gerade |

| | $\frac{M}{m}$ im 3. Quadr. | $\frac{M}{m}$ im 4. Quadr. |
|---|---|---|
| | $X'$ ganze gerade Zahl | $X'$ ganze gerade Zahl |
| und | $[Y]$ gerade | $[Y]$ ungerade |
| | $Y'$ ganze gerade Zahl | $Y'$ ganze gerade Zahl |
| und | $[X]$ ungerade | $[X]$ ungerade |

So oft sich eine dieser Bedingungen in die entgegengesetzte ändert, wird $\delta = -1$; so oft sich beide ändern, bleibt $\delta = +1$.

## 11.

Zur bequemern Uebersicht dieser Rechnungen dienen folgende Formeln:

$$\text{es ist}\quad m = a+bi, \qquad aa+bb = d$$
$$M = A+Bi, \qquad AA+BB = D$$
$$\frac{dM}{m} = \alpha+\beta i, \qquad \alpha = aA+bB, \qquad \beta = aB-bA$$
$$\frac{\xi+i\eta}{m} = x+iy, \qquad M(x+iy) = X+iY$$

Ist gegeben $\eta$ und $X$, so wird

$$1.\quad \xi = \frac{\beta\eta}{\alpha}+\frac{dX}{\alpha}$$
$$2.\quad Y = \frac{D\eta}{\alpha}+\frac{\beta X}{\alpha}$$

Ist gegeben $\eta$ und $Y$, so wird

$$3.\quad \xi = -\frac{\alpha\eta}{\beta}+\frac{dY}{\beta}$$
$$4.\quad X = -\frac{D\eta}{\beta}+\frac{\alpha Y}{\beta}$$

Ist gegeben $\eta$ und $x$, so wird

$$5.\quad \xi = -\frac{b\eta}{a}+\frac{dx}{a}$$
$$6.\quad X = -\frac{B\eta}{a}+\frac{\alpha x}{a}$$
$$7.\quad Y = \frac{A\eta}{a}+\frac{\beta x}{a}$$

Ist gegeben $\eta$ und $y$, so wird

$$8.\quad \xi = \frac{a\eta}{b}-\frac{dy}{b}$$
$$9.\quad X = \frac{A\eta}{b}-\frac{\alpha y}{b}$$
$$10.\quad Y = \frac{B\eta}{b}-\frac{\beta y}{b}$$

## 12.

Die Regel des 10. Art. lässt sich nun so ausdrücken. Indem $\eta$ einen bestimmten Werth erhält, ist

$$\Sigma \pm \theta\frac{fM}{m} = k^0\theta(X^0+Y^0 i)-k^{00}\theta(X^{00}+Y^{00}i)+\Sigma k$$

Hier ist $k^0 = 0$, wenn $[\xi^0]$ gerade; $k^0 = +1$, wenn $[\xi^0]$ ungerade und $\eta$ gerade; $k^0 = -1$, wenn $[\xi^0]$ ungerade und $\eta$ ungerade ist; $k^{00}$ wird eben so durch $[\xi^{00}]$ und $\eta$ bestimmt. Endlich ist $\Sigma k$ ein Aggregat von so vielen Zahlen, als es zwischen $\xi = \xi^0$ und $\xi = \xi^{00}$ ganze Werthe von $X$ oder $Y$ gibt; jedesmal ist $k = 0$, wenn das entsprechende $[\xi]$ gerade ist, hingegen $= \pm 1$, wenn $[\xi]$ ungerade ist. Das Zeichen wird auf folgende Art bestimmt. Ist $X$ eine ganze Zahl, so wird $k = 1$, wenn zugleich

$\eta$ gerade
$X$ gerade
$[Y]$ gerade
$\frac{M}{m}$ im zweiten oder dritten Quadranten d.i. $a$ negativ

Ist eine oder drei dieser Bedingungen nicht vorhanden, so wird $k = -1$; fehlen zwei oder alle vier, so bleibt $k = 1$. Ist hingegen $Y$ eine ganze Zahl, so wird $k = 1$, wenn von den 4 Bedingungen

$\eta$ gerade
$Y$ gerade
$[X]$ gerade
$\frac{M}{m}$ im ersten oder zweiten Quadranten d.i. $\mathfrak{b}$ positiv

alle oder zwei oder keine erfüllt ist.

## 13.

Jetzt haben wir noch die Fälle besonders zu betrachten, wo $\xi^0$ oder $\xi^{00}$ (oder $X^0$, $Y^0$, $X^{00}$, $Y^{00}$) eine ganze Zahl ist. Es sind hier vier Fälle zu unterscheiden, indem wir $a$ und $A$ ungerade setzen.

I. Liegt $m$ im ersten Quadranten, so wird für $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$; $\eta = \frac{1}{2}b$ eine ganze Zahl; es ist dann $Y^{00} = \frac{1}{2}B$ eine ganze Zahl und $\theta(X^{00} + Y^{00}i)$ wird nur dann $= \theta(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}Bi)$ sein, wenn $\mathfrak{b}$ negativ ist, bei einem positiven $\mathfrak{b}$ hingegen wird dafür $\theta(\frac{1}{2}A + (\frac{1}{2}B - 1)i)$ genommen werden.

II. Liegt $m$ im zweiten Quadranten, so wird für $x = 0$, $y = 0$; $\eta = 0$. Hier wird für diesen Werth von $\eta$, $X^{00} = 0$, $Y^{00} = 0$. Man hat dann

$\theta(X^{00}+Y^{00}i)=2$, je nachdem $\frac{M}{m}$ im 1.
$3$ 2.
$0$ 3.
$1$ 4. Quadr. liegt, und $k^{00}=1$

III. Liegt $m$ im dritten Quadranten, so wird für $x=\frac{1}{2}$, $y=0$; $\eta=\frac{1}{2}b$ eine ganze Zahl, wofür $X^0+Y^0i=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}Bi$. Man setzt dann

$$\theta(X^0+Y^0i)=\theta(\tfrac{1}{2}A+(\tfrac{1}{2}B-1)i)$$

so oft $\mathfrak{b}$ negativ ist.

IV. Liegt $m$ im vierten Quadranten, so ist für $\eta=0$,
$\theta(X^0+Y^0i)=0, 1, 2, 3$ zu setzen, je nachdem $\frac{M}{m}$ im 1. 2. 3. 4. Quadranten liegt $k^0=0$.

14.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen folgt nunmehr folgende Bestimmung des Decidenten.

Man sammle alle Werthe von $x$ und $y$, die *innerhalb* der Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen und wofür entweder $\eta$ und $X$ oder $\eta$ und $Y$ eine ganze Zahl ist, und bestimme für jedes $x+iy$ nach den Regeln des 12. Art. den Werth von $k$.

Man sammle ferner alle Werthe auf den Grenzen d. i. wo entweder $x=0$ oder $\frac{1}{2}$, während $y$ *zwischen* 0 und $\frac{1}{2}$, oder $y=0$ oder $=\frac{1}{2}$, während $x$ *zwischen* 0 und $\frac{1}{2}$, die so beschaffen sind, dass $\eta$ eine ganze Zahl und $[\xi]$ ungerade, und bestimme das zugehörige $l$ auf folgende Weise. Es sei $\theta M(x+yi)=\pm\theta$, das obere Zeichen für gerade, das untere für ungerade $\eta$

so ist für $m$ im

| für | 1. Quadr. | 2. Quadr. | 3. Quadr. | 4. Quadr. |
|---|---|---|---|---|
| $y=0$ | $l=-\theta$ | $l=-\theta$ | $l=+\theta$ | $l=+\theta$ |
| $x=\frac{1}{2}$ | $l=-\theta$ | $l=+\theta$ | $l=+\theta$ | $l=-\theta$ |
| $y=\frac{1}{2}$ | $l=+\theta$ | $l=+\theta$ | $l=-\theta$ | $l=-\theta$ |
| $x=0$ | $l=+\theta$ | $l=-\theta$ | $l=-\theta$ | $l=+\theta$ |

Kürzer so $l = \pm \theta$,

das Zeichen ist dasselbe wie das von $a$ wenn $x = 0$
das entgegengesetzte wenn $x = \frac{1}{2}$
dasselbe wie das von $b$ wenn $y = \frac{1}{2}$
das entgegengesetzte wenn $y = 0$

Zu $\Sigma k + \Sigma l$ kommt dann noch hinzu

wenn $m$ im zweiten Quadranten liegt: 2, 1, 0, 3 } je nachdem $\frac{M}{m}$ im
wenn $m$ im vierten Quadranten liegt: 0, } 1. 2. 3. 4. Quadr.

wenn $m$ im ersten Quadranten liegt und $\frac{1}{2}(a-1)$ ungerade ist

$$\theta(\tfrac{1}{2}A + (\tfrac{1}{2}B - 1)i) \text{ wenn } \beta \text{ positiv}$$
$$\theta(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}Bi) \text{ wenn } \beta \text{ negativ}$$

wenn $m$ im dritten Quadranten liegt und $\frac{1}{2}(a-1)$ ungerade ist

$$-\theta(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}Bi) \text{ wenn } \beta \text{ positiv}$$
$$-\theta(\tfrac{1}{2}A + (\tfrac{1}{2}B - 1)i) \text{ wenn } \beta \text{ negativ.}$$

---

## [IV.]

### 1.

Biquadratischer Rest? $m = a + bi; \quad aa + bb = d$

Modulus $M = A + Bi, \quad AA + BB = D$

$\frac{mB}{M} = \mu \qquad \mu = \alpha + \beta i, \quad \alpha = aA + bB, \quad \beta = Ab - Ba$

$\xi + \eta i = \pi; \quad \pi m = x + yi = p, \quad \pi M = X + Yi = P$

Relationen

$$\begin{array}{lll} x = a\xi - b\eta & d\xi = ax + by & D\xi = AX + BY \\ y = b\xi + a\eta & d\eta = -bx + ay & D\eta = -BX + AY \\ X = A\xi - B\eta & dX = \alpha x + \beta y & Dx = \alpha X - \beta Y \\ Y = B\xi + A\eta & dY = -\beta x + \alpha y & Dy = \beta X + \alpha Y \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\beta\xi &= -Bx+bX = \phantom{-}Ay-aY\\
\beta\eta &= -Ax+aX = -By+bY\\
\alpha\xi &= \phantom{-}Ax+bY = \phantom{-}By+aX\\
\alpha\eta &= -Bx+aY = \phantom{-}Ay-bX
\end{aligned}$$

Diejenigen $\pi$, wo $\xi$ und $\eta$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen, sollen durch $\pi^0$ bezeichnet werden, und die entsprechenden $p$ und $P$ durch $p^0$ und $P^0$; diejenigen $\pi$, wo $\eta = 0$ und $\xi$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, durch $\pi'$; die, wo $\xi = \frac{1}{2}$ und $\eta$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, durch $\pi''$; diejenigen $\pi$, wo $\eta = \frac{1}{2}$ und $\xi$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, durch $\pi'''$; endlich die wo $\xi = 0$ und $\eta$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ durch $\pi''''$.

Der Decident von $\frac{m}{M}$ wird so gefunden:

Man sammle alle *ganzen* $P^0$, für welche mithin $x^0$ und $y^0$ gebrochen sein werden; die respectiven Intensoren von $p^0$ seien $t^0$ d. i. die Zahlen 0, 1, 2, 3, je nachdem

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $[x^0]$ | gerade, | ungerade, | ungerade, | gerade |
| $[y^0]$ | gerade, | gerade, | ungerade, | ungerade |

So ist der gesuchte Decident $= \Sigma \pm t^0$; wo das obere Zeichen für gerade $P^0$, das untere für die ungeraden zu nehmen ist.

Dies ist die *erste* Methode.

2.

Wir wollen nun die einzelnen $P^0$ nach den Werthen von $Y^0$ zusammenordnen. Indem wir uns auf den Fall einschränken, wo $a$, $b$, $A$, $B$ positiv sind, ist der kleinste Werth von $Y^0$ .. $+1$, der grösste $\frac{1}{2}(A+B-1)$. Für jeden bestimmten Werth von $Y^0$ müssen die Werthe von $X^0$ zwischen bestimmten Grenzen liegen, nemlich

I. wenn $A-B$ positiv ist

| wenn | zwischen | und |
|---|---|---|
| $Y < \frac{1}{2}B$ | $-\frac{BY^0}{A}$ | $\frac{AY^0}{B}$ |
| $Y = \frac{1}{2}B$ | $-\frac{BB}{2A}$ | $\frac{1}{2}A$ |
| $Y > \frac{1}{2}B$ und $< \frac{1}{2}A$ | $-\frac{BY^0}{A}$ | $-\frac{BY^0}{A} + \frac{D}{2A}$ |
| $Y > \frac{1}{2}A$ | $\frac{AY^0}{B} - \frac{D}{2B^0}$ | $-\frac{BY^0}{A} + \frac{D}{2A}$ |

II. Wenn $A-B$ negativ ist,

| wenn | zwischen | und |
|---|---|---|
| $Y<\frac{1}{2}A$ | $-\frac{BY^0}{A}$ | $\frac{AY^0}{B}$ |
| $Y>\frac{1}{2}A$ und $<\frac{1}{2}B$ | $\frac{AY^0}{B}-\frac{D}{2B}$ | $\frac{AY^0}{B}$ |
| $Y=\frac{1}{2}B$ | $\frac{AB-D}{2B}$ | $\frac{1}{2}A$ |
| $Y>\frac{1}{2}B$ | $\frac{AY^0}{B}-\frac{D}{2B}$ | $-\frac{BY^0}{A}+\frac{D}{2A}$ |

In den kleinern Grenzen ist entweder $\xi=0$ oder $\eta=\frac{1}{2}$, in den grössern Grenzen hingegen entweder $\eta=0$ oder $\xi=\frac{1}{2}$. Es lässt sich leicht beweisen, dass nie die Grenzen von $x$ ganze Zahlen sind.

3.

Wir wollen nun die Partialsummen für jedes bestimmte $Y^0$ auf eine andere Weise darstellen. Auf den Grenzen wird $p$ bestimmte Werthe haben, die durch $p^*, p^{**}$ bezeichnet werden mögen, und während $X$ stetig von der einen Grenze zur andern sich ändert, wird $p$ stetig von $p^*$ zu $p^{**}$ übergehen. Allein die in $[p]$ enthaltene ganze Zahl wird hiebei sprungsweise geändert, indem immer entweder der reelle oder der imaginäre Theil sich um eine Einheit ändert. Es geschehen die Aenderungen bei den Werthen von $X$

$$X', X'', X''' \ldots X^{\mu}$$

die bereits nach ihrer Grösse geordnet sind und denen die Werthe von $p$

$$p', p'', p''' \ldots$$

entsprechen.

Das letzte $X^{\mu}$ kann auch mit $X^{**}$ identisch sein, wenn $\sigma$ positiv, oder $X'$ mit $X^*$ identisch etc.

Die $x$ sind hier zunehmend, also wenn $x^{**}$ eine ganze Zahl, wird sie für $x^{\mu}$ gezählt.

Die $y$ sind zunehmend bei positiven $\sigma$, da wird $y^{**}$ ganz mitgezählt
abnehmend bei negativen $\sigma$, da wird $y^*$ mitgezählt.

Die Intensoren von $p^*$, $p^{**}$ seien $\lambda^*$ und $\lambda^{**}$

der Intensor von $p'$ an bis $p''$ . . $\lambda^*+\delta'$
$p''$ bis $p'''$ . . $\lambda^*+\delta'+\delta''$
$p^\mu$ bis $p^{**}$ . . $\lambda^*+\delta'+\delta''$ . . $+\delta^\mu=\lambda^{**}$

so wird die Partialsumme, in sofern $Y^0$ gerade,

$$=\lambda^*(g-h)+(\lambda^*+\delta')(g'-h')+(\lambda^*+\delta'+\delta'')(g''-h'')+\text{etc.}+\lambda^{**}(g^\mu-h^\mu)$$

wo $g$ die Anzahl der geraden $X^0$ von $X^*$ bis $X'$, $h$ die der ungeraden bedeutet.

4.

Diese Formel lässt sich auch so darstellen:

$$\begin{aligned}&\lambda^*\{[\tfrac{1}{2}X^*-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X^*]\}\\ &+\delta'\{[\tfrac{1}{2}X'-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X']\}\\ &+\delta''\{[\tfrac{1}{2}X''-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X'']\}\\ &+\text{etc.}\\ &+\delta^\mu\{[\tfrac{1}{2}X^\mu-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X^\mu]\}\\ &-\lambda^{**}\{[\tfrac{1}{2}X^{**}-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X^{**}]\}\end{aligned}$$

oder durch $\lambda^*\varepsilon^*+\delta'\varepsilon'+\delta''\varepsilon''+\text{etc.}+\delta^\mu\varepsilon^\mu-\lambda^{**}\varepsilon^{**}$

wo allgemein $\varepsilon=0$ wenn $[X]$ ungerade
und $=-1$ wenn $[X]$ gerade ist und $Y$ gerade
$+1$ wenn $[X]$ gerade und $Y$ ungerade.

Für $\delta$ hingegen hat man die Werthe

| | | | $\mathfrak{G}$ positiv | negativ |
|---|---|---|---|---|
| wenn $x$ eine ganze gerade Zahl, | $[y]$ | gerade | $-1$ | $-1$ |
| | $[y]$ | ungerade | $+1$ | $+1$ |
| $x$ eine ganze ungerade Zahl, | $[y]$ | gerade | $+1$ | $+1$ |
| | $[y]$ | ungerade | $-1$ | $-1$ |
| $y$ eine ganze gerade Zahl, | $[x]$ | gerade | $-3$ | $+3$ |
| | $[x]$ | ungerade | $-1$ | $+1$ |
| $y$ eine ganze ungerade Zahl, | $[x]$ | gerade | $+3$ | $-3$ |
| | $[x]$ | ungerade | $+1$ | $-1$ |

5.

Hieraus leiten wir folgende zweite Methode den Decidenten zu bestimmen ab.

I. Man sammle alle Combinationen von ganzen Werthen von $Y$ und $x$, die folgende Eigenschaften haben

1. dass $\xi = \frac{Ax+bY}{a}$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ falle, wobei die zweite Grenze inclusive genommen wird
2. dass $\eta = \frac{-Bx+aY}{a}$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ falle, die erste Grenze inclusive genommen.

II Man berechne dafür

$$X = \frac{Dx+6Y}{a}$$
$$y = \frac{6x+dY}{a}$$

III. Man lasse alle diejenigen weg, wo $[X]$ eine nngerade Zahl ist, und theile die übrigen, wo $[X]$ gerade ist, in zwei Classen;

in die erste Classe setze man diejenigen, wo zugleich

$Y$ gerade, $x$ gerade, $[y]$ gerade

oder wo eine dieser Bedingungen Statt findet;

in die zweite Classe diejenigen, wo zwei dieser Bedingungen oder gar keine Statt hat,

oder in I. wo $[Y+x+y]$ gerade

II. wo $[Y+x+y]$ ungerade

und nenne den Ueberschuss der Anzahl in der ersten Classe über die in der zweiten $c$.

IV. Man sammle alle Combinationen von ganzen Werthen von $Y$ und $y$, die folgende Eigenschaften haben:

1. dass $\xi = \frac{Ay-aY}{6}$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ falle, die erste Grenze inclusive, wenn $6$ negativ, die zweite inclusive, wenn $6$ positiv;
2. dass $\eta = \frac{-By+bY}{6}$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ falle, die erste Grenze inclusive bei positivem $6$, die zweite bei negativem.

[V.]

[1.]

Modulus $M = A + Bi, \quad AA + BB = D$

Rest $m = a + bi, \quad aa + bb = d$

$$\frac{mD}{M} = \mu = \alpha + \beta i = aA + bB + (Ab - Ba)i$$

$$\xi + \eta i = \pi, \quad \pi m = p = x + yi; \quad \pi M = P = X + Yi$$

$\omega$ eine unbestimmte unendlich kleine reelle positive Grösse.

[2.]

*Vorbereitung.*

I. Man sammle alle $\pi$, wo

$\xi$ nicht negativ und nicht grösser als $\frac{1}{2}$
$\eta$ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$
Entweder $x$ oder $y$ eine Ganze
Entweder $X$ oder $Y$ eine Ganze

und bestimme für jedes $\pi$ die Grösse $\varepsilon$ nach folgender Regel:

Es sei $p^0$ die nächste Ganze durch $1+i$ theilbare bei $p$
$P^0$ die nächste Ganze durch $1+i$ theilbare bei $P$

und setze $\varepsilon = \pm 1$, wo das Zeichen immer dasselbe ist wie das Zeichen des imaginären Theils der Grösse

$$\frac{p-p^0}{P-P^0}(\alpha - \beta i)$$

folgendes sind die Specialregeln: Erste Classe, $x$ und $X$ Ganze

$$\begin{aligned}\beta\xi &= -Bx + bX\\ \beta\eta &= -Ax + aX\\ \beta y &= -\alpha x + dX\\ \beta Y &= -Dx + \alpha X\end{aligned}$$

$\varepsilon = -1$, wenn $\sigma$ positiv, $x$ gerade, $[y]$ gerade, $X$ gerade, $[Y]$ gerade oder wenn nur eine ungerade Anzahl dieser Bedingungen gilt.

$\varepsilon = +1$, wenn keine oder eine gerade Anzahl dieser Bedingungen gilt.

Zweite Classe, $y$ und $Y$ Ganze

$$\begin{aligned} \sigma\xi &= +Ay - aY \\ \sigma\eta &= -By + bY \\ \sigma x &= +\alpha y - dY \\ \sigma X &= +Dy - \alpha Y \end{aligned}$$

$\varepsilon = -1$, wenn $\sigma$ positiv, $[x]$ gerade, $y$ gerade, $[X]$ gerade, $Y$ gerade oder wenn eine ungerade Anzahl dieser Bedingungen gilt.

$\varepsilon = +1$, wenn keine oder eine gerade Anzahl gilt.

Dritte Classe, $y$ und $X$ Ganze

$$\begin{aligned} \alpha\xi &= +By + aX \\ \alpha\eta &= +Ay - bX \\ \alpha x &= -\sigma y + dX \\ \alpha Y &= +Dy - \sigma X \end{aligned}$$

$\varepsilon = -1$, wenn $\alpha$ positiv, $[x]$, $y$, $X$, $[Y]$ alle Gerade oder wenn eine ungerade Anzahl dieser Bedingungen gilt.

$\varepsilon = +1$, wenn keine oder eine gerade Anzahl Statt hat.

Vierte Classe, $x$ und $Y$ Ganze

$$\begin{aligned} \alpha\xi &= +Ax + bY \\ \alpha\eta &= -Bx + aY \\ \alpha y &= +\sigma x + dY \\ \alpha X &= +Dx + \sigma Y \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn $\alpha$ positiv, $x$, $[y]$, $[X]$, $Y$ alle Gerade oder bei einer ungeraden Anzahl dieser Bedingungen.

$\varepsilon = -1$, bei keiner oder einer geraden Anzahl derselben.

[3.]

II. Man sammle alle $\pi$, wo

$\xi$ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$
$\eta = \omega$
und entweder $X$ oder $Y$ eine Ganze,

und setze $\varepsilon = \pm 1$ so dass das Zeichen des imaginären Theils von

$$\frac{M}{P-P^0}$$

zu nehmen ist.

Specialregel: Erste Classe, $X$ ganz

$$\begin{aligned} A\xi &= + \ X + B\omega \\ Ax &= + aX - \mathfrak{b}\omega \\ Ay &= + bX - \alpha\omega \\ AY &= + BX + D\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = -1$, wenn $A$ positiv, $X$ und $[Y]$ gerade oder wenn nur eine Bedingung gilt.

$\varepsilon = +1$, wenn keine oder zwei gelten.

Zweite Classe, $Y$ ganz

$$\begin{aligned} B\xi &= + \ Y - A\omega \\ Bx &= + aY - \alpha\omega \\ By &= + bY - \mathfrak{b}\omega \\ BX &= + AY - D\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn $B$ positiv, $[X]$ und $Y$ gerade oder wenn nur eine Bedingung gilt.

$\varepsilon = -1$, wenn keine oder zwei gelten.

[4.]

III. Man sammle alle $\pi$, wo

$\xi$ und $\eta$ denselben Bedingungen unterworfen sind wie in II.
entweder $x$ oder $y$ Ganze,

und setze $\varepsilon = \pm 1$ mit dem Zeichen des imaginären Theils von

$$\frac{m}{p-p^0}.$$

Specialregeln: Erste Classe, $x$ ganz

$$\begin{aligned} a\xi &= +\,x\; + b\omega \\ ay &= +\,bx + d\omega \\ aX &= +Ax + \beta\omega \\ aY &= +Bx + \alpha\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = -1$, wenn $a$ positiv, $x$, [$y$] beide gerade oder wenn nur eine Bedingung gilt.

$\varepsilon = +1$, wenn keine oder zwei gelten.

Zweite Classe, $y$ ganz

$$\begin{aligned} b\xi &= +\,y\; - a\omega \\ bx &= +ay - d\omega \\ bX &= +Ay - \alpha\omega \\ bY &= +By + \beta\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn $b$ positiv, [$x$] und $y$ gerade oder wenn nur eine Bedingung gilt.

$\varepsilon = -1$, wenn keine gilt.

[5.]

IV. Man sammle alle $\pi$, wo

$\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\omega$

$\eta$ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$

$X$ oder $Y$ ganz,

und setze $\varepsilon = \pm 1$ mit dem Zeichen des imaginären Theils von

$$\frac{iM}{P - P^0}$$

Specialregeln: Erste Classe $X$ eine Ganze,

$$\begin{aligned} 2B\eta &= +A - \;\;2X + A\omega \\ 2Bx &= -\beta + 2bX - \beta\omega \\ 2By &= +\alpha - 2aX + \alpha\omega \\ 2BY &= +D - 2AX + D\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn $B$ positiv, $X$, [$Y$] gerade oder bei einer Bedingung.

$\varepsilon = -1$, bei keiner oder zwei Bedingungen.

Zweite Classe, $Y$ eine Ganze

$$\begin{aligned} 2A\eta &= -B + 2Y - B\omega \\ 2Ax &= +\alpha - 2bY + \alpha\omega \\ 2Ay &= +\beta + 2aY + \beta\omega \\ 2AX &= +D - 2BY + D\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn $A$ positiv, $[X]$, $Y$ gerade, oder bei einer
$\varepsilon = -1$ bei keiner oder zwei Bedingungen.

[6.]

V. Man sammle alle $\pi$, wo

$\xi$, $\eta$ denselben Bedingungen unterworfen sind wie in IV,
und wo $x$ oder $y$ eine ganze Zahl,

und setze $\varepsilon = \pm 1$ mit dem Zeichen des imaginären Theils von

$$\frac{im}{p-p'}$$

Specialregeln: Erste Classe, $x$ eine Ganze

$$\begin{aligned} 2b\eta &= +a - 2x + a\omega \\ 2by &= +d - 2ax + d\omega \\ 2bX &= +\beta + 2Bx + \beta\omega \\ 2bY &= +\alpha - 2Ax + \alpha\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn $b$ positiv, $x$, $[y]$ gerade oder bei einer Bedingung,
$\varepsilon = -1$, bei keiner oder zwei Bedingungen.

Zweite Classe, $y$ eine Ganze

$$\begin{aligned} 2a\eta &= -b + 2y - b\omega \\ 2ax &= +d - 2by + d\omega \\ 2aX &= +\alpha - 2By + \alpha\omega \\ 2aY &= -\beta + 2Ay - \beta\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn $a$ positiv, $[x]$, $y$ gerade, oder bei einer Bedingung,
$\varepsilon = -1$, bei keiner oder zwei Bedingungen.

[7.]

Die erste Methode gibt nun folgendes Resultat:

4 Decident = I. $\Sigma\varepsilon$ von allen
$-4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo $y$ ganz [$x$] gerade

II. — $\Sigma\varepsilon$ von allen
$+4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo [$x$] gerade [$y$] ungerade

IV. $+4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo nicht zugleich [$x$] und [$y$] gerade
$+Q$

Hier ist

| für $A$ $B$ | $Q =$ |
|---|---|
| $+\ +$ | $-$Intens. $+\mu\omega i$ $+$Int. $\frac{1}{4}m$ $-\mu\omega$ |
| $+\ -$ | $-$Intens. $+\mu\omega$ $+$Int. $\frac{1}{4}mi-\mu\omega i$ |
| $-\ -$ | $-$Intens. $-\mu\omega i$ $-$Int. $\frac{1}{4}m$ $+\mu\omega$ |
| $-\ +$ | $-$Intens. $-\mu\omega$ $-$Int. $\frac{1}{4}mi+\mu\omega i$ |

folgende Tabelle stellt dies dar

| $\alpha$ $\beta$ | $A$ $B$ | | $A$ $B$ | | $A$ $B$ | | $A$ $B$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $+\ +$ | | $+\ -$ | | $-\ -$ | | $-\ +$ | |
| $+\ +$ | $+2$ | $0$ | $0$ | $+2$ | $-3$ | $-5$ | $-3$ | $-5$ |
| $+\ -$ | $0$ | $+2$ | $-2$ | $0$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $-3$ |
| $-\ -$ | $-3$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $-2$ |
| $-\ +$ | $+1$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | $0$ | $-2$ | $-4$ | $-6$ |

$\frac{m-1}{2}$ par, impar

Pars prior ipsius

$$2Q\,..\,-3-(\alpha\beta AB)+(A\alpha)+(A\beta)+(B\alpha)-(B\beta)$$

Das ganze $2Q$ für

$\frac{m-1}{2}$ impar $\quad -3+4(A)-(B)-(\beta)+(\alpha A)+(\alpha B)+(\beta A)-(\beta B)-(\alpha\beta AB)$

$\frac{m-1}{2}$ par $\quad -3+2(A)+(B)+(\beta)+(\alpha A)+(\alpha B)+(\beta A)-(\beta B)+2(\beta AB)$
$-(\alpha\beta AB)$

Beispiel

$$m = +3-2i \mid 13 \qquad (1+i)M+(-2+i)m = 1$$
$$M = -1-6i \mid 37 \qquad mM = -15-16i$$
$$\mu = +9+20i$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $+4+13i$ | $+38+31i$ | $+1$ | $-1$ | |
| $+5+7i$ | $+29+11i$ | $0$ | $+0$ | |
| $+6+i$ | $+20-9i$ | $0-i$ | $-3$ | |
| $+10+14i$ | $+58+22i$ | $+1$ | $+1$ | I . . $+1$ 0 |
| $+11+8i$ | $+49+2i$ | $+1$ | $-1$ | II . . 0 $-4$ |
| $+12+2i$ | $+40-18i$ | $+1-i$ | $+2$ | IV . . 0 |
| $+16+15i$ | $+78+13i$ | $+2$ | $-0$ | $Q = -5$ |
| $+17+9i$ | $+69-7i$ | $+1-i$ | $+2$ | $-8$ |
| $+18+3i$ | $+60-27i$ | $+1-i$ | $-2$ | Gut. |

Decident $= -2$

I

| $x$ | $X$ | $20\xi$ | $20\eta$ | $20y$ | $20Y$ | $\varepsilon$ | $y$ | $Y$ | $20\xi$ | $20\eta$ | $20x$ | $20X$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $+1$ | $0$ | 6 | 1 | $-9$ | $-37$ | $-1$ | $0$ | $-1$ | 3 | 2 | $+13$ | $+9$ | $+1^{\circ}$ |
| | $+1$ | 4 | 4 | $+4$ | $-28$ | $-1$ | | $-2$ | 6 | 4 | $+26$ | $+18$ | $+1$ |
| | $+2$ | 2 | 7 | $+17$ | $-19$ | $-1$ | | $-3$ | 9 | 6 | $+39$ | $+27$ | $+1$ |
| $+2$ | $+1$ | 10 | 5 | $-5$ | $-65$ | $-1$ | $+1$ | $-1$ | 2 | 8 | $+22$ | $+46$ | $+1$ |
| | $+2$ | 8 | 8 | $+8$ | $-56$ | $+1$ | | | | | | | $+4$ |
| | | | | | | $-3$ | | | | | | | $(+1)$ |

| $y$ | $X$ | $9\xi$ | $9\eta$ | $9x$ | $9Y$ | $\varepsilon$ | $x$ | $Y$ | $9\xi$ | $9\eta$ | $9y$ | $9X$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $+1$ | 3 | 2 | $+13$ | $-20$ | $+1$ | $+1$ | $-1$ | 1 | 3 | $+7$ | $+17$ | $-1$ |
| $+1$ | $+2$ | 0 | 3 | $+6$ | $-3$ | $-1^{\circ}$ | $+2$ | $-3$ | 4 | 3 | $+1$ | $+14$ | $+1$ |
| | | | | | | $0\ (-1)$ | | I . . . $+1$ (0) | | | | | $0$ |

II

| $Y$ | $6\xi$ | $6x$ | $6y$ | $6X$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $+1$ | $+3+9\omega$ | $-2$ | $-1$ | $-1^{\circ}$ |
| $-2$ | $+2$ | $+6+9\omega$ | $-4$ | $-2$ | $+1$ |
| | | | | | $0(-1)$ |

III

| $x$ | $3\xi$ | $3y$ | $3X$ | $3Y$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $+1$ | 1 | $-2$ | $-1$ | $-6+9\omega$ | $-1$ |

IV

| $X$ | $12\eta$ | $12x$ | $12y$ | $12Y$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $+1$ | $+20+20\omega$ | $-9$ | $-37$ | $-1^{\circ}$ |
| $+1$ | $+3$ | $+24+20\omega$ | $-3$ | $-39$ | $+1^{\circ}$ |
| $+2$ | $+5$ | $+28+20\omega$ | $+3$ | $-41$ | $-1$ |
| | | | | | $-1\ (0)$ |

V

| $x$ | $4\eta$ | $4y$ | $4X$ | $4Y$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $+2$ | $+1$ | $-1$ | $+4-20\omega$ | $-13$ | $+1$ |

| $y$ | $6\eta$ | $6x$ | $6X$ | $6Y$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $+2$ | $+13$ | $+9$ | $-20$ | $+1$ |

[8.]

Wir wollen nunmehro das Resultat von I näher betrachten. Es sind vier Combinationen

$1^0$, wenn $x$ und X Ganze sind. Man hat hier

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}\xi &= -Bx+bX\\ \mathfrak{G}\eta &= -Ax+aX\\ \mathfrak{G}y &= -\alpha x+dX\\ \mathfrak{G}Y &= -Dx+\alpha X\end{aligned}$$

Es seien $y^0$ und $Y^0$ die absolut kleinsten Reste von $-\alpha x+dX$, $-Dx+\alpha X$ nach dem Modulus $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}y=\mathfrak{G}y'+y^0$, $\mathfrak{G}Y=\mathfrak{G}Y'+Y^0$ und man setze

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}u &= -By^0+bY^0 \qquad & y^0 &= +au-bt\\ \mathfrak{G}t &= -Ay^0+aY^0 \qquad & Y^0 &= +Au-Bt\end{aligned}$$

so werden $t$, $u$ ganze Zahlen sein, nemlich

$$\begin{aligned}-u+ti &= M(x+y'i)-m(X+Y'i)\\ i(t+ui) &= Mi(y'-y)-mi(Y'-Y)\end{aligned}$$

und man hat dann $\varepsilon=-1$, wenn

$t+u$ gerade, $\mathfrak{G}$, $y^0$, $Y^0$ positiv, oder wenn zwei oder keine Bedingung gilt, sonst $\varepsilon=+1$

Wir setzen

| | | |
|---|---|---|
| $t+ui=+\theta$ | wenn | $y^0$ und $Y^0$ beide positiv |
| $-\theta$ | | $y^0$ und $Y^0$ beide negativ |
| $+\theta'$ | | $y^0$ positiv $Y^0$ negativ |
| $-\theta'$ | | $y^0$ negativ $Y^0$ positiv |

| | | | |
|---|---|---|---|
| jedem durch $1+i$ theilbaren | $\theta$ | entspricht dann ein | $\varepsilon=-1$ |
| jedem durch $1+i$ theilbaren | $\theta'$ | | $\varepsilon=+1$ |
| jedem durch $1+i$ untheilbaren | $\theta$ | | $\varepsilon=+1$ |
| jedem durch $1+i$ untheilbaren | $\theta'$ | | $\varepsilon=-1$ |

insofern $\mathfrak{G}$ positiv.

Für negative $\mathfrak{G}$ ist es umgekehrt.

| $x$ | $X$ | $y^0$ | $Y^0$ | $t+ui$ | $\theta$ | $\theta'$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $+1$ | $0$ | $-9$ | $+3$ | $0-3i$ | | $0+3i$ | $-1$ |
| | $+1$ | $+4$ | $-8$ | $-1+2i$ | | $-1+2i$ | $-1$ |
| | $+2$ | $-3$ | $+1$ | $0-i$ | | $0+i$ | $-1$ |
| $+2$ | $+1$ | $-5$ | $-5$ | $-1-i$ | $+1+i$ | | $-1$ |
| | $+2$ | $+8$ | $+4$ | $+1+2i$ | $+1+2i$ | | $+1$ |

[9.]

$2^0$, wenn $y$ und $Y$ Ganze. Es seien hier $x'$, $X'$ die nächsten Ganzen bei $x$ und $X$, und

$$x-x' = \frac{x^0}{6}, \quad X-X' = \frac{X^0}{6}$$

und man setze

$$6(t+ui) = -Mx^0+mX^0 = -Mp^0+mP^0, \quad t+ui = Mp'-mP'$$

d. i.

$$6t = -Ax^0+aX^0 \qquad x^0 = -bt+au$$
$$6u = -Bx^0+bX^0 \qquad X^0 = -Bt+Au$$

Man hat dann

$\varepsilon = -1$, wenn $6$ positiv, $x^0$ positiv, $X^0$ positiv, $t+u$ gerade etc.

Wir setzen

| | | besser |
|---|---|---|
| $t+ui = +\theta$ | wenn $x^0$ und $X^0$ positiv | $+\theta''$ |
| $= -\theta$ | wenn beide negativ | $-\theta''$ |
| $= +\theta'$ | wenn $x^0$ positiv, $X^0$ negativ | $-\theta$ |
| $= -\theta'$ | wenn $x^0$ negativ, $X^0$ positiv | $+\theta$ |

wo für $\varepsilon$ dieselbe Regel gelten wird wie oben

| $y$ | $Y$ | $x^0$ | $X^0$ | $t+ui$ | $\theta$ | $\theta'$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $-1$ | $-7$ | $+9$ | $+1-3i$ | | $-1+3i$ | $+1$ |
| | $-2$ | $+6$ | $-2$ | $0+2i$ | | $0+2i$ | $+1$ |
| | $-3$ | $-1$ | $+7$ | $+1-i$ | | $-1+i$ | $+1$ |
| $+1$ | $-1$ | $+2$ | $+6$ | $+1$ | $+1$ | | $+1$ |

Man kann nun beweisen

1) Dass alle $\theta$, die aus (1) und aus (2) hervorgegangen sind, unter einander verschieden sind. Ihr Complexus heisse $\Theta$.

2) Dass alle $\theta = T + Ui$ die Eigenschaft haben, dass

$$-bT + aU$$
$$-BT + AU$$

positive Zahlen kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ sind

3) Dass wenn $T$, $U$ zwei der eben genannten Bedingung unterworfene ganze Zahlen sind, $T + Ui$ sich gewiss in $\Theta$ findet.
(wie denn? es wird auf obige Gleichung* gegründet.)

4) Auf ähnliche Weise verhält es sich mit $\theta'$, deren Complexus $\Theta'$ aus denjenigen Zahlen $T' + U'i$ bestehen wird, für welche

$$-bT' + aU'$$
$$-(-BT' + AU')$$

positive Zahlen kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$.

In unserm Falle ist

| $\theta$ | $\varepsilon$ | $\theta'$ | $\varepsilon$ | $\theta''$ | $\varepsilon$ | $\theta'''$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $+1$ | $+1$ | $0+i$ | $-1$ | $+2-i$ | $+1$ | $+1$ | $-1$ |
| $+1+i$ | $-1$ | $0+2i$ | $+1$ | $+3-i$ | $-1$ | $+2$ | $+1$ |
| $+1+2i$ | $+1$ | $0+3i$ | $-1$ | | | | |
| | | $-1+i$ | $+1$ | | | | |
| | | $-1+2i$ | $-1$ | | | | |
| | | $-1+3i$ | $+1$ | | | | |

Hier ist

$$\Theta = -\cdot M + \cdot m$$
$$\Theta' = -\cdot M - \cdot m$$
$$\Theta'' = +\cdot Mi + \cdot m$$
$$\Theta''' = +\cdot Mi - \cdot m$$

[10.]

3°. $y$ und $X$ Ganze. Es seien $x'$, $Y'$ die nächsten Ganzen bei $x$ und $Y$, und

$$x'+yi=p', \quad X+Y'i=P'; \quad p-p'=\tfrac{p^0}{a}, \quad P-P'=\tfrac{P^0}{a}$$

und man setze

$$i(t+ui)=Mp'-mP'=-\tfrac{Mp^0}{a}+\tfrac{mP^0}{a}=-\tfrac{Mx^0}{a}+\tfrac{miY^0}{a} \quad \text{d. i.}$$

$$\begin{aligned} at &= -Bx^0+aY^0 \quad \text{so ist} \quad & x^0 &= -bt+au \\ au &= +Ax^0+bY^0 & Y^0 &= +At+Bu \end{aligned}$$

Man hat dann

$\varepsilon=-1$, wenn $a$ positiv, $x^0$ positiv, $Y^0$ positiv, $t+u$ gerade etc.

Wir setzen

| | | | besser |
|---|---|---|---|
| $t+ui=+\theta''$ | wenn $x^0$ positiv, | $Y^0$ positiv | $+\theta'$ |
| $=+\theta'''$ | wenn $x^0$ positiv, | $Y^0$ negativ. | $-\theta'''$ |
| $-\theta''$ | wenn $x^0$ negativ, | $Y^0$ negativ | $-\theta'$ |
| $-\theta'''$ | wenn $x^0$ negativ, | $Y^0$ positiv | $+\theta'''$ |

Es wird also für jedes $\theta'' \ldots \varepsilon=-1$

$\theta''' \ldots \varepsilon=+1$

insofern $\theta''$ oder $\theta'''$ durch $1+i$ theilbar und $a$ positiv.

| $y$ | $X$ | $x^0$ | $Y^0$ | $t+ui$ | $\theta''$ | $\theta'''$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | +1 | +4 | −2 | +2 | | +2 | +1 |
| +1 | +2 | −3 | −3 | $-3+i$ | $+3-i$ | | −1 |

[11.]

4te Classe $x$ und $Y$ Ganze. Nach ähnlichen Praemissen wie in 3 setze man

$$-(t+ui)=Mp'-mP'=-\tfrac{Mp^0}{a}+\tfrac{mP^0}{a}=-\tfrac{Miy^0}{a}+\tfrac{mX^0}{a}$$

$$\begin{aligned} at &= -By^0-aX^0 \qquad & y^0 &= -bt+au \\ au &= +Ay^0-bX^0 & X^0 &= -At-Bu \end{aligned}$$

Man hat dann

$\varepsilon=+1$ wenn $a$ positiv, $y^0$ positiv, $X^0$ positiv, $t+u$ gerade etc.

Wir setzen

$$
\begin{aligned}
t+ui = &+\theta'' \text{ wenn } y^0 \text{ positiv } X^0 \text{ negativ}\\
&+\theta''' \text{ wenn } y^0 \text{ positiv } X^0 \text{ positiv}\\
&-\theta'' \text{ wenn } y^0 \text{ negativ } X^0 \text{ positiv}\\
&-\theta''' \text{ wenn } y^0 \text{ negativ } X^0 \text{ negativ}
\end{aligned}
$$

für $\varepsilon$ gilt dann die Regel, dass (wie oben in 3), insofern $\alpha$ positiv

$$\varepsilon = -1 \text{ für jedes durch } 1+i \begin{cases}\text{theilbare } \theta''\\ \text{untheilbare } \theta'''\end{cases}$$

$$\varepsilon = +1 \text{ für jedes durch } 1-i \begin{cases}\text{theilbare } \theta'''\\ \text{untheilbare } \theta''\end{cases}$$

| $x$ | $Y$ | $y^0$ | $X^0$ | $t+ui$ | $\theta''$ | $\theta'''$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $+1$ | $-1$ | $-2$ | $-1$ | $-1$ | | $+1$ | $-1$ |
| $+2$ | $-3$ | $+1$ | $-4$ | $+2\ -i$ | $+2\ -i$ | | $+1$ |

Der Complexus aller $\theta''$ aus 3 und 4, den wir durch $\Theta''$ bezeichnen, besteht also aus allen Zahlen $T+Ui$, wofür

$$\left.\begin{aligned}&-bT+aU\\ \text{und } &+AT+BU\end{aligned}\right\} \text{positiv und kleiner als } \tfrac{1}{2}\alpha$$

der Complexus aller $\theta''' \ldots (\Theta''')$ aus denen, wo

$$\left.\begin{aligned}&-bT+aU\\ &-AT-BU\end{aligned}\right\} \text{positiv und kleiner als } \tfrac{1}{2}\alpha$$

[12.]

Nach obiger Verbesserung heisst also die Regel so.

Es enthalte

$\Theta$ alle Zahlen $T+Ui$, wo $+bT-aU$ positiv $-BT+AU$ positiv und $<\frac{1}{2}$ б

$\Theta'$ alle Zahlen $T+Ui$, wo $-bT+aU$ positiv $+AT+BU$ positiv und $<\frac{1}{2}\alpha$

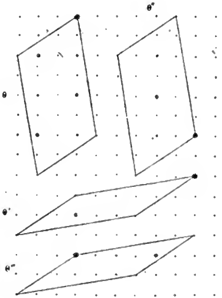
$\Theta''$ alle Zahlen $T+Ui$, wo $-bT+aU$ positiv $-BT+AU$ positiv und $<\frac{1}{2}$ б

$\Theta'''$ alle Zahlen $T+Ui$, wo $+bT-aU$ positiv $+AT+BU$ positiv und $<\frac{1}{2}\alpha$

insofern resp. б oder $\alpha$ positiv.

| Für alle durch $1+i$ theilbaren | ist dann $\varepsilon =$ | wenn |
|---|---|---|
| $\theta$ | $+1$ | $\beta$ positiv |
| $\theta'$ | $-1$ | $\alpha$ positiv |
| $\theta''$ | $-1$ | $\beta$ positiv |
| $\theta'''$ | $+1$ | $\alpha$ positiv |

| $\theta$ | | $\theta'$ | | $\theta''$ | | $\theta'''$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0-i$ | $-1$ | $+2-i$ | $+1$ | $+1$ | $+1$ | $-1$ | $-1$ |
| $0-2i$ | $+1$ | $+3-i$ | $-1$ | $+1+i$ | $-1$ | $-2$ | $+1$ |
| $0-3i$ | $-1$ | | | $+1+2i$ | $+1$ | | |
| $+1-i$ | $+1$ | | | | | | |
| $+1-2i$ | $-1$ | | | | | | |
| $+1-3i$ | $+1$ | | | | | | |



[13.]

Hieraus fliesst folgende Regel. Es sei das Resultat aus den Vorschriften

$$\text{II} \ldots G, \quad \text{III} \ldots g, \quad \text{IV} \ldots H, \quad \text{V} \ldots h$$

So ist

$$\begin{aligned}
4\theta &= R = 0 \\
4\theta' &= -\ g + \ G - h - H + R' \\
4\theta'' &= -2g + 2G \qquad\quad + R'' \\
4\theta''' &= -\ g + \ G + h + H + R'''
\end{aligned}$$

In unserm Beispiele ist

$$G = 0, \quad g = -1, \quad H = -1, \quad h = +2, \quad R' = 0, \quad R'' = +2, \quad R''' = -2$$

$$4\theta = 0, \quad 4\theta' = +1 - 1 + 0 = 0, \quad 4\theta'' = +2 + 2 = +4, \quad 4\theta''' = +1 + 1 - 2 = 0$$

und die Correctionen $R$, $R'$ etc. werden so bestimmt: Es ist

$$R = \left\{ \begin{array}{l}
-(\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta abAB) \\
-\tfrac{1}{2}(b) - \tfrac{1}{2}(B) \\
+(\beta) - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta) - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta abAB) \\
+\tfrac{1}{2}(b) + \tfrac{1}{2}(B)
\end{array} \right.$$

$$R' = \left\{ \begin{array}{l}
+(\alpha) - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta abAB) \\
-\tfrac{1}{2}(b) - \tfrac{1}{2}(A) \\
\quad 0 \\
-\tfrac{1}{2}(a) + \tfrac{1}{2}(B)
\end{array} \right.$$

$$R'' = \left\{ \begin{array}{l}
+(\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta abAB) \\
-\tfrac{1}{2}(b) + \tfrac{1}{2}(B) \\
+(\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta abAB) \\
-\tfrac{1}{2}(b) + \tfrac{1}{2}(B)
\end{array} \right.$$

$$R''' = \left\{ \begin{array}{l}
-(\alpha) - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta abAB) \\
-\tfrac{1}{2}(b) + \tfrac{1}{2}(A) \\
\quad 0 \\
+\tfrac{1}{2}(a) + \tfrac{1}{2}(B)
\end{array} \right.$$

wo die in Paranthese stehenden Grössen bloss die Zeichen hergeben.

Es ist also

$$R+R'+R''+R'''=2(\alpha б a b A B)-2(b)+2(B)+2(б)$$

folglich

$$\theta+\theta'+\theta''+\theta'''=-g+G+\tfrac{1}{2}(\alpha б a b A B)+\tfrac{1}{2}(б)-\tfrac{1}{2}(b)+\tfrac{1}{2}(B)$$
$$=-g+G+S$$

| ab | | + | + | | − | + | | − | − | | + | − | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | α | б | S | α | б | S | α | б | S | α | б | S |
| + | + | + | + | +1 | − | + | +1 | − | − | +1 | + | − | +1 |
| | | + | − | −1 | + | + | 0 | − | + | +1 | − | − | 0 |
| − | + | + | − | 0 | + | + | +1 | − | + | +2 | − | − | +1 |
| | | − | − | −1 | + | − | −1 | + | + | +1 | − | + | +1 |
| − | − | − | − | −1 | + | − | −1 | + | + | +1 | − | + | +1 |
| | | − | + | −1 | − | − | −2 | + | − | −1 | + | + | 0 |
| + | − | − | + | 0 | − | − | −1 | + | − | 0 | + | + | +1 |
| | | + | + | −1 | − | + | −1 | − | − | −1 | + | − | −1 |

[14.]

Hiernach bekommt nun die erste Regel folgende Gestalt:

4 Dec. = I. $-4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo $y$ ganz, $[x]$ gerade
II. $+4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo $[x]$ gerade, $[y]$ ungerade
III. $-\Sigma\varepsilon$ von allen
IV. $+4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo nicht zugleich $[x]$ und $[y]$ gerade
$+Q+S$

In unserm Beispiel

| | |
|---|---|
| I . . . . | 0 |
| II . . . . | −4 |
| III | +1 |
| IV | 0 |
| $Q$ | −5 |
| $S$ | 0 |
| | −8 |

Man denke sich nun in III diejenigen besonders bemerkt, wo $y$ ganz, $[x]$ gerade, so ist

III. $\left.\begin{array}{r}\Sigma\varepsilon \text{ von allen} \\ -4\Sigma\varepsilon \text{ der besonderen}\end{array}\right\} = \text{Intensor } (\tfrac{1}{2}-\omega)m - \text{Intens.}\,\omega m = -W$

Hier ist $W =$

| a b | | |
|---|---|---|
| + + | −3 | −1 |
| − + | −2 | 0 |
| − − | +2 | 0 |
| − + | +3 | +1 |
| | $\frac{m-1}{2}$ | $\frac{m-1}{2}$ |
| | par | impar |

Also

4 Deoident = I. $-4\Sigma\varepsilon$ $y$ ganz, $[x]$ gerade

II. $+4\Sigma\varepsilon$ $[x]$ gerade, $[y]$ ungerade

III. $-4\Sigma\varepsilon$ $y$ ganz, $[x]$ gerade

IV. $+4\Sigma\varepsilon$ alle wo nicht zugleich $[x]$, $[y]$ gerade

$+Q+S+W$

Tabelle für $\tfrac{1}{4}(Q+S+W)$

| $a$ $b$ | $A$ $B$ | $\alpha$ б | | | $a$ $b$ | $A$ $B$ | $\alpha$ б | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + + | + + | + + | 0 | 0 | − − | + + | − − | 0 | 0 |
| | | + − | −1 | 0 | | | − + | +1 | 0 |
| | − + | + − | −1 | −1 | | − + | − + | 0 | −1 |
| | | − − | −1 | −1 | | | + + | 0 | −1 |
| | − − | − − | −2 | −1 | | − − | + + | 0 | −1 |
| | | − + | −1 | −1 | | | + − | −1 | −1 |
| | + − | − + | −1 | 0 | | + − | + − | 0 | 0 |
| | | + + | −1 | 0 | | | − − | 0 | 0 |
| − + | + + | − + | 0 | 0 | + − | + + | + − | +1 | +1 |
| | | + + | 0 | 0 | | | − − | 0 | 0 |
| | − + | + + | −1 | −1 | | − + | − − | +1 | 0 |
| | | + − | −1 | −1 | | | − + | 0 | −1 |
| | − − | + − | −2 | −1 | | − − | − + | +1 | 0 |
| | | − − | −2 | −1 | | | + + | 0 | −1 |
| | + − | − − | −1 | 0 | | + − | + + | +1 | +1 |
| | | − + | −1 | 0 | | | + − | 0 | 0 |

[15.]

Die zweite Methode ist folgende:

Decident $=$ I. $+\ \Sigma\varepsilon$, wo $Y$ ganz, $[X]$ gerade

$-4\Sigma\varepsilon$, unter diesen, wo noch $y$ ganz, $[x]$ gerade

II. $+\ \Sigma\lambda\varepsilon$, wo $Y$ ganz, $[X]$ gerade; $\lambda$ ist der Intensor von $p$

II. $-\ \Sigma\lambda'\varepsilon$, wo $X$ ganz, $[Y]$ ungerade

$\lambda'$ der Intensor von $ip$ $= 1, 2, 3, 0$

wenn $\lambda$ $= 0, 1, 2, 3$

IV. $+\ \Sigma\lambda\varepsilon$, wo $Y$ ganz, $[X]$ gerade, $\lambda$ der Intensor von $p$

IV. $+\ \Sigma\lambda'\varepsilon$, wo $X$ ganz, $[Y]$ gerade

$\lambda'$ der Intensor von $im - ip$ $= 0\ 3\ 2\ 1$

wenn Int. $p$ $= 0\ 1\ 2\ 3$

$+q$

Hier ist $q = 0$, wenn $\frac{M-1}{2}$ ungerade i.e. nur durch $1+i$, nicht durch 2 theilbar, und nicht zugleich $AB+-$, hingegen übrigens

| $A\ B$ | | $\alpha\ \beta$ $++$ | $\alpha\ \beta$ $-+$ | $\alpha\ \beta$ $--$ | $\alpha\ \beta$ $+-$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $++$ | Int. $\frac{1}{2}(m-\omega\mu)$ | $+3\ +1$ | $+3\ +1$ | $+0\ +2$ | $+0\ +2$ |
| $-+$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $--$ | $-$ Int. $\frac{1}{2}(m+\omega\mu)$ | $-0\ -2$ | $-0\ -2$ | $-3\ -1$ | $-3\ -1$ |
| $+-$ | $-$ Int. $\omega\mu$ | $-0$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ |

wo doppelte Zahlen stehen, gilt die erste für gerade $\frac{m-1}{2}$, die andere für ungerade.

In unserm Beispiele: I.

| $y$ | $Y$ | $20x$ | $20Y$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $-1$ | $+13$ | $+9$ | $+1$ |
| 0 | $-2$ | $+26$ | $+18$ | $+1$ |
| $+1$ | $-1$ | $+22$ | $+46$ | $+1$ |
| | | | | $+3(+1)$ |

$+3$
$-4$
$-1$
Dec. $= -2$

II. desunt. IV.

| $X$ | $12x$ | | $12y$ | $12Y$ | $\varepsilon$ | $\lambda$ | $\lambda'$ | $\lambda'\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $+20$ | $+20\omega$ | $-9$ | $-37$ | $-1$ | 2 | 2 | $-2$ |
| $+1$ | $+24$ | $+20\omega$ | $-3$ | $-39$ | $+1$ | 3 | 1 | $+1$ |
| $+2$ | $+28$ | $+20\omega$ | $+3$ | $-41$ | $-1$ | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | $-1$ |

Was aus II genommen ist, vereinigt sich in folgendes Resultat

II. $-\ \Sigma\varepsilon$, wo $Y$ ganz, $[X]$ gerade
$+4\Sigma\varepsilon$ von eben diesen, wenn zugleich $[x]$ gerade, $[y]$ ungerade
II. $+\ \Sigma\lambda'\varepsilon$, wo $Y$ ganz, $[X]$ gerade
$-\ \Sigma\lambda'\varepsilon$, wo $X$ ganz, $[Y]$ ungerade, $\lambda'$ der Intensor von $ip$

Die beiden letzten Theile vereinigen sich wiederum in

III. $+\ \Sigma\varepsilon$, wo $[X]$ gerade, $[Y]$ ungerade
$-4\Sigma\varepsilon$, wenn zugleich $x$ eine Ganze, $[y]$ ungerade
$+r+s$

wo $r=0$, wenn $A\,B \ldots\ldots \begin{cases} + + \\ - + \\ - - \end{cases}$

und $r = \text{Int.}\,\omega m i$, wenn $AB \ldots + -$
$s = -\text{Int.}(\tfrac{1}{2}-\omega)mi$, wenn $\frac{M-1}{2}$ gerade und $B$ positiv, in allen andern Fällen $=0$

In unserm Beispiele

III. Fällt aus, $r=0$, $s=0$

Was aus IV genommen ist, vereinigt sich in folgende Resultate

IV. $+4\Sigma\varepsilon$, wo $Y$ ganz, $[X]$ gerade und nicht zugleich $[x]$ gerade, $[y]$ gerade
$-\Sigma\lambda'\varepsilon$, wo $Y$ ganz, $[X]$ gerade
$+\Sigma\lambda'\varepsilon$, wo $X$ ganz, $[Y]$ gerade
wo $\lambda'$ Int. von $im - ip$

Die zwei letzten Theile vereinigen sich wiederum zu

V. $+\ \Sigma\varepsilon$, wo nicht zugleich $[X]$ und $[Y]$ gerade
$-4\Sigma\varepsilon$, wo zugleich $x$ eine Ganze, $[y]$ gerade
$+w$

Hier ist $w=0$, wenn $\frac{M-1}{2}$ gerade und $A$ positiv; in allen übrigen Fällen $= -\text{Intensor}\ (\tfrac{1}{2}i+\omega)m$

In unserm Beispiele

V.

| $y$ | $6x$ | $6X$ | $6Y$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $+13$ | $+9$ | $-20$ | $+1$ |

$$w = -2$$

Tafel für $q, r, s, w$ und deren Summe.

| $a\ b$ | $A\ B$ | $\alpha\ \beta$ | $\frac{M-1}{2}$ ger. $\frac{m-1}{2}$ ger. | | | | | $\frac{M-1}{2}$ ung. $\frac{m-1}{2}$ ger. | | | | | $\frac{M-1}{2}$ ger. $\frac{m-1}{2}$ ung. | | | | | $\frac{M-1}{2}$ ung. $\frac{m-1}{2}$ ung. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + + | + + | + + | +3 | 0 | 0 | 0 | +3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | 0 | −2 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | | + − | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +2 | 0 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | − + | + − | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 | −4 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | | − − | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 | −4 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | − − | − − | −3 | 0 | 0 | 0 | −3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | −2 | −3 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | | − + | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | 0 | 0 | −2 | −4 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | + − | − + | −1 | +1 | 0 | 0 | 0 | −1 | +1 | 0 | 0 | 0 | −1 | +1 | 0 | 0 | 0 | −1 | +1 | 0 | −2 | −2 |
| | | + + | 0 | +1 | 0 | 0 | +1 | 0 | +1 | 0 | 0 | +1 | 0 | +1 | 0 | 0 | +1 | 0 | +1 | 0 | −2 | −1 |
| − + | + + | − + | +3 | 0 | 0 | 0 | +3 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | +1 | 0 | −2 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | | + + | +3 | 0 | 0 | 0 | +3 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | +1 | 0 | −2 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | − + | + + | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | 0 | 0 | −2 | −3 | −5 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | | + − | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | 0 | 0 | −2 | −3 | −5 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | − − | + − | −3 | 0 | 0 | −1 | −4 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | −1 | 0 | 0 | −3 | −4 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | | − − | −3 | 0 | 0 | −1 | −4 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | −1 | 0 | 0 | −3 | −4 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | + − | − − | −2 | +2 | 0 | 0 | 0 | −2 | +2 | 0 | −1 | −1 | −2 | +2 | 0 | 0 | 0 | −2 | +2 | 0 | −3 | −3 |
| | | − + | −1 | +2 | 0 | 0 | +1 | −1 | +2 | 0 | −1 | 0 | −1 | +2 | 0 | 0 | +1 | −1 | +2 | 0 | −3 | −2 |
| − − | + + | − − | 0 | 0 | −1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | +2 | 0 | −3 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | | − + | +3 | 0 | −1 | 0 | +2 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | +1 | 0 | −3 | 0 | −2 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | − + | − + | 0 | 0 | −1 | −1 | −2 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | 0 | 0 | −3 | −3 | −6 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | | + + | 0 | 0 | −1 | −1 | −2 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | 0 | 0 | −3 | −3 | −6 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | − − | + + | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | −2 | 0 | 0 | −3 | −5 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | | + − | −3 | 0 | 0 | −1 | −4 | 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | −1 | 0 | 0 | −3 | −4 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 |
| | + − | + − | −3 | +3 | 0 | 0 | 0 | −3 | +3 | 0 | −1 | −1 | −3 | +3 | 0 | 0 | 0 | 3 | +3 | 0 | −3 | −3 |
| | | − − | −2 | +3 | 0 | 0 | +1 | −2 | +3 | 0 | −1 | 0 | −2 | +3 | 0 | 0 | +1 | −2 | +3 | 0 | −3 | −2 |
| + − | + + | + − | 0 | 0 | −1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +2 | 0 | −3 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | | − − | 0 | 0 | −1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +2 | 0 | −3 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | − + | − − | 0 | 0 | −1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −3 | −2 | −5 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | | − + | 0 | 0 | −1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −3 | −2 | −5 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | − − | − + | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | 0 | 0 | −2 | −4 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | | + + | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | 0 | 0 | −2 | −4 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | + − | + + | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 | −2 |
| | | + − | −3 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 | 0 | 0 | 0 | −3 | −3 | 0 | 0 | −2 | −5 |

[16.]

Es ist folglich

$$\text{Dec.}\,\frac{m}{M} - \text{Dec.}\,\frac{M}{m} =$$

I. $-4\Sigma\varepsilon$, wo $y$, $Y$ ganz, $[x]$, $[X]$ gerade
II. $+4\Sigma\varepsilon$, $Y$ ganz, $[X]$ gerade, $[x]$ gerade, $[y]$ ungerade
III. $-4\Sigma\varepsilon$, $x$ ganz, $[X]$ gerade, $[Y]$ ungerade, $[y]$ ungerade
IV. $+4\Sigma\varepsilon$, $Y$ ganz, $[X]$ gerade, und nicht zugleich $[x]$, $[y]$ gerade
V. $-4\Sigma\varepsilon$, $x$ ganz, $[y]$ gerade und nicht zugleich $[X]$, $[Y]$ gerade
$+\psi$

Hier ist $\psi$ in folgender Tabelle dargestellt.

| $a\,b$ | $A\,B$ | $\alpha\,\varrho$ | $\psi$ | | | | $a\,b$ | $A\,B$ | $\alpha\,\varrho$ | $\psi$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $++$ | $++$ | $++$ | $+4$ | $0$ | $0$ | $-2$ | $--$ | $++$ | $--$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ |
| | $++$ | $+-$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ | | $++$ | $-+$ | $+4$ | $0$ | $0$ | $-2$ |
| | $-+$ | $+-$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | | $-+$ | $-+$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ |
| | $-+$ | $--$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | | $-+$ | $++$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ |
| | $--$ | $--$ | $-4$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | | $--$ | $++$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ |
| | $--$ | $-+$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | | $--$ | $+-$ | $-4$ | $-4$ | $0$ | $-2$ |
| | $+-$ | $-+$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ | | $+-$ | $+-$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ |
| | $+-$ | $++$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ | | $+-$ | $--$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ |
| $-+$ | $++$ | $-+$ | $+4$ | $0$ | $0$ | $-2$ | $+-$ | $++$ | $+-$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ |
| | $++$ | $++$ | $+4$ | $0$ | $0$ | $-2$ | | $++$ | $--$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ |
| | $-+$ | $++$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | | $-+$ | $--$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ |
| | $-+$ | $+-$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | | $-+$ | $-+$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ |
| | $--$ | $+-$ | $-4$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | | $--$ | $-+$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ |
| | $--$ | $--$ | $-4$ | $-4$ | $0$ | $-2$ | | $--$ | $++$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $-2$ |
| | $+-$ | $--$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ | | $+-$ | $++$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ |
| | $+-$ | $-+$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-2$ | | $+-$ | $+-$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-6$ |

Hier gelten die ersten beiden Columnen für $\frac{1}{2}(M-1)$ gerade
letzten beiden für $\frac{1}{2}(M-1)$ ungerade
die erste und dritte für $\frac{1}{2}(m-1)$ gerade
zweite und vierte für $\frac{1}{2}(m-1)$ ungerade

[17.]

Die 128 Fälle, welche in obiger Tafel bei der Bestimmung von $\psi$ unterschieden sind, lassen sich viel kürzer auf folgende Weise umfassen:

$\psi = k + l$

$k = -4$, wenn zugleich $a, A, \alpha, b, B, \beta$ die Zeichen $+ + + - - -$ haben, sonst immer

$k = 0$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}(M-1)$ gerade | $\frac{1}{2}(m-1)$ gerade | $l = +4$, wenn $AB\beta$ positiv<br>$-4$, wenn $AB\beta$ negativ<br>$0$ in allen übrigen Fällen |
| $\frac{1}{2}(M-1)$ gerade | $\frac{1}{2}(m-1)$ ungerade | $l = -4$, wenn $A$ negativ<br>$0$, wenn $A$ positiv |
| $\frac{1}{2}(M-1)$ ungerade | $\frac{1}{2}(m-1)$ gerade | $l = 0$ |
| $\frac{1}{2}(M-1)$ ungerade | $\frac{1}{2}(m-1)$ ungerade | $l = -2$ |

Zu versuchen ist noch, ob es vortheilhafter ist, $A$ und $a$ positiv, dagegen aber $m \equiv 1$, $M \equiv 1$ nur nach mod. 2 (nicht nach Modulus $2+2i$) zu nehmen. Das Endresultat muss werden

$$\text{Dec.}\ \frac{m}{M} - \text{Dec.}\ \frac{M}{m} \equiv$$

| | $M \equiv$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $m \equiv$ | $1$ | $1+2i$ | $3$ | $3+2i$ |
| $1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $1+2i$ | 0 | 2 | 2 | 0 |
| $3$ | 0 | 2 | 0 | 2 |
| $3+2i$ | 0 | 0 | 2 | 2 |

Alles nach Mod. 4.

# [VI.]

## THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE.

1.

Eine Reihe ganzer complexer Zahlen $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$ u. s. w. sei so beschaffen, dass erstlich sie unter einander alle incongruent sind nach dem Modulus $\mu = \alpha + 6i$, $\alpha$ und $6$ ganze reelle Zahlen bezeichnend, zweitens dass jede ganze complexe Zahl einer von jenen nach dem Modulus $\mu$ congruent ist. Unter dieser Voraussetzung heisst der Inbegriff der Zahlen $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$ u. s. w. ein vollständiges Restsystem für den Modulus $\mu$. Es ist bewiesen, dass die Anzahl der darin begriffenen Zahlen der Norm von $\mu$, d. i. der Zahl $\alpha\alpha + 66$ gleich ist, welche mit $\nu$ bezeichnet werden soll.

2.

Unter den Zahlen $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$ u. s. w ist Eine durch $\mu$ theilbare; wird dieselbe ausgeschlossen und der Inbegriff der übrigen mit $\chi$ bezeichnet, so bildet $\chi$ ein vollständiges System der durch den Modulus untheilbaren Reste, deren Anzahl $= \nu - 1$. Beschränken wir die Untersuchung auf ungerade Modulen, so ist $\nu - 1$ durch 4 theilbar. Es werden dann ferner $f, if, -f, -if$ unter sich incongruent sein, folglich diejenigen Zahlen in $\chi$, welche resp. denen $if$, $-f$, $-if$ congruent sind, unter sich und von $f$ verschieden. (Associirte und zusammengesetzte Zahlen.)

Hieraus ergibt sich eine Zerlegung von $\chi$ in vier Gruppen oder partielle Systeme $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$. Man setzt eine beliebige Zahl aus $\chi$, z. B. $\varphi$ in die Gruppe $\varkappa$, und die drei den Zahlen $i\varphi, -\varphi, -i\varphi$ congruenten Glieder von $\chi$, der Reihe nach in die Gruppen $\varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$. Nachdem diese vier Zahlen aus $\chi$ gestrichen sind, setzt man eine beliebige der übrigen wieder in $\varkappa$, und die drei auf ähnliche Art davon abhängigen in $\varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$. So fährt man fort, bis das ganze System $\chi$ vertheilt ist. Die Gruppen $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ sollen zusammengehörige Viertelsysteme heissen. Es ist klar, dass sie folgende Eigenschaften haben:

1) Jedes Viertelsystem besteht aus $\frac{1}{4}(\nu-1) = \frac{1}{4}(\alpha\alpha + 6 6 - 1)$ Zahlen.
2) Das Charakteristische eines Viertelsystems ist, dass keine der darin befindlichen Zahlen weder selbst, noch ihr Product in $i$, $-1$, oder $-i$, einer andern aus demselben Viertelsystem congruent ist, jede durch $\mu$ nicht theilbare Zahl aber, entweder selbst oder ihr Product durch $i$, $-1$, oder $-i$ sich darin findet, oder einer daraus congruent ist.
3) So wie aus der Multiplication der Zahlen in $\varkappa$ mit $i$, $-1$ und $-i$, resp. die Zahlen in $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ entstehen, oder ihnen congruente, so reproducirt die Multiplication der Zahlen in $\varkappa'$, mit jenen Factoren, resp. die Zahlen in $\varkappa''$, $\varkappa'''$, $\varkappa$; die Multiplication der Zahlen $\varkappa''$ reproducirt auf ähnliche Weise die Zahlen $\varkappa'''$, $\varkappa$, $\varkappa'$; endlich die Multiplication der Zahlen $\varkappa'''$ reproducirt $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$. Kürze halber kann diese gegenseitige Abhängigkeit der vier Viertelsysteme so ausgedrückt werden $\varkappa' \equiv i\varkappa$, $\varkappa'' \equiv -\varkappa \equiv i\varkappa'$, $\varkappa''' \equiv i\varkappa'' \equiv -\varkappa' \equiv -i\varkappa$.

3.

Wenn $m$ eine complexe ganze Zahl bedeutet, die mit $\mu$ keinen gemeinschaftlichen Divisor hat, und die sämmtlichen Zahlen eines Viertelsystems $\varkappa$ mit $m$ multiplicirt werden, so bilden die Producte, oder beliebige ihnen congruente Zahlen ihrerseits auch ein Viertelsystem; und ebenso entstehen durch Multiplication der Zahlen der Systeme $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ noch drei Viertelsysteme, die mit jenem zusammengehören werden. Der Beweis ist leicht zu führen. Diese vier neuen Systeme mögen mit $m\varkappa$, $m\varkappa'$, $m\varkappa''$, $m\varkappa'''$ bezeichnet werden, gleichviel, ob die Producte selbst oder nur ihnen congruente Zahlen gewählt werden. Im letztern Fall kann dies so geschehen, dass man immer nur solche wählt, die sich in einem der Systeme $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ befindet. Auf diese Art ist also das System $\chi$, wenigstens allgemein zu reden, auf zwei verschiedene Arten in Viertelsysteme zerlegt. Nehmen wir an, dass $m\varkappa$ gemeinschaftlich hat

mit $\varkappa$ . . . . . $\lambda$ Zahlen
$\varkappa'$ . . . . . $\lambda'$ Zahlen
$\varkappa''$ . . . . . $\lambda''$ Zahlen
$\varkappa'''$ . . . . . $\lambda'''$ Zahlen

so wird auch $\varkappa'$ mit $m\varkappa'$; $\varkappa''$ mit $m\varkappa''$, $\varkappa'''$ mit $m\varkappa'''$ gemein haben $\lambda$ Glieder;

$\varkappa''$ mit $m\varkappa'$, $\varkappa'''$ mit $m\varkappa''$, $\varkappa$ mit $m\varkappa'''$, $\lambda'$ Glieder u. s. w. Es sei $\varepsilon$ der kleinste Rest von $\lambda'+2\lambda''+3\lambda'''$ nach dem Modulus 4, oder $\varepsilon$ eine der vier Zahlen 0, 1, 2, 3, je nachdem $\lambda'+2\lambda''+3\lambda'''$ von der Form $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ ist. Ich behaupte nun, dass $\varepsilon$ von der Anordnung des Viertelsystems $\varkappa$ unabhängig ist.

Um die Beweisführung zu erleichtern, bediene ich mich folgender Bezeichnung. $\Pi\psi$ soll die Zahl 0, 1, 2, 3 bezeichnen, je nachdem die durch $\mu$ nicht theilbare Zahl $\psi$ sich (selbst oder durch Congruenz Repräsentation) in der Gruppe $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ befindet. Von selbst hat man daher die Folge

I. $\Pi(i\psi) \equiv 1+\Pi\psi$ (mod. 4)

II. Die Zahl $i^{-\Pi\psi}.\psi$ findet sich, entweder selbst oder durch Congruenz Repräsentation in der Gruppe $\varkappa$.

III. $\Sigma\Pi m\varphi \equiv \varepsilon$, (mod. 4), wenn die Summation über alle in $\varkappa$ befindliche Glieder $\varphi$ erstreckt wird.

Es sei nun $k$ ein anderes Viertelsystem, bestehend aus $f, f', f''$ u. s. w., während $\varkappa$ aus $\varphi, \varphi', \varphi''$ u. s. w. besteht. Ich setze voraus, was erlaubt ist, da die *Ordnung* der Glieder in $\varkappa$ willkürlich, dass $f$ mit $\varphi$ identisch oder zusammenhängend ist, $f'$ mit $\varphi'$, $f''$ mit $\varphi''$ u. s. w. Die mit $k$ zusammenhängenden Viertelsgruppen seien $k'(\equiv ik)$, $k''(\equiv -k)$, $k'''(\equiv -ik)$. Es habe ferner die Charakteristik P in Beziehung auf die Gruppen $k, k', k'', k'''$ dieselbe Bedeutung wie $\Pi$ in Beziehung auf $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$, so dass $\mathrm{P}\psi = 0, 1, 2, 3$, je nachdem $\psi$ zu $k, k', k'', k'''$ gehört.

Es wird demnach, wenn man von der Vertheilung der $\chi$ in die Viertelsysteme $k, k', k'', k'''$ anstatt von $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ ausgeht, an die Stelle von $\varepsilon$ treten der kleinste Rest von $\mathrm{P}mf+\mathrm{P}mf'+\mathrm{P}mf''+\mathrm{P}mf'''$ u.s.w. u.s.w. oder von $\Sigma \mathrm{P}mf$ nach dem Modulus 4 und es handelt sich, zu beweisen, dass $\Sigma\mathrm{P}mf-\Sigma\Pi m\varphi$ durch 4 theilbar ist.

Wir schreiben diese Grösse so

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}mf+\mathrm{P}mf'+\mathrm{P}mf''+\mathrm{P}mf'''+ \text{u. s. w.}\\ &-\mathrm{P}m\varphi-\mathrm{P}m\varphi'-\mathrm{P}m\varphi''-\mathrm{P}m\varphi'''-\\ &+\mathrm{P}m\varphi+\mathrm{P}m\varphi'+\mathrm{P}m\varphi''+\mathrm{P}m\varphi'''+\\ &-\Pi m\varphi-\Pi m\varphi'-\Pi m\varphi''-\Pi m\varphi'''-\end{aligned}$$

Da der Voraussetzung nach $f$ und $\varphi$ congruent sind oder zusammengehören, so gilt dasselbe auch von $mf$ und $m\varphi$ und man hat

$$\left.\begin{array}{r} f \equiv i^{-P\varphi}\varphi \\ i^{-Pmf}mf \equiv i^{-Pm\varphi}m\varphi \end{array}\right\} \text{mod.}\ \mu$$

woraus leicht folgt $Pmf - Pm\varphi \equiv -P\varphi (\text{mod.}\ 4)$ nnd das Aggregat der beiden obersten Reihen $\equiv -\Sigma P\varphi$. Da nun ferner $Pm\varphi - \Pi m\varphi \equiv P(i^{-\Pi m\varphi}m\varphi)$ ist, $m\varphi . i^{-\Pi m\varphi}$ zu $x$ gehört und der Inbegriff *aller* $m\varphi . i^{-\Pi m\varphi}$ ohne Rücksicht auf die Ordnung mit allen $\varphi$ übereinkommt, so wird das Aggregat *aller* $P(m\varphi . i^{-\Pi m\varphi})$ aequal sein dem Aggregat aller $P\varphi$; folglich das Aggregat der dritten und vierten Reihe $\equiv \Sigma P\varphi$ (mod. 4), also das Aggregat aller vier Reihen $\equiv 0$ (mod. 4) W. Z. B. W.

Da also $\varepsilon$, unabhängig von der Wahl der Viertelsysteme bloss von $m$ und $\mu$ abhängt, so werden wir $\varepsilon$ den Character der Zahl $m$ in Beziehung auf den Modulus $\mu$ nennen und mit Ch. $m$ (mod. $\mu$) bezcichnen. Man sieht leicht, dass dies nur eine Generalisirung derjenigen Definition ist, die (Art. . . .) für den Fall, wo $\mu$ eine Primzahl ist, gegeben ist, oder sie unter sich begreift.

4.

Ich gehe jetzt zu *bestimmten* Anordnungen der Viertelsysteme über, und werde den mit $m$ zu bezeichnenden Modulus $= ea + ebi$ setzen, so dass die positive ganze Zahl $e$ den grössten reellen Divisor, oder den grössten Divisor, welchen die beiden Bestandtheile von $m$ haben, bedeutet, oder $a$, $b$ Primzahlen unter sich. Das am einfachsten angeordnete Viertelsystem wird das sein, dessen Glieder $x+iy$ so beschaffen sind, dass $ax+by$ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}e(aa+bb)$, $ay-bx$ nicht negativ, und gleichfalls kleiner als $\frac{1}{2}e(aa+bb)$ wird; die letztere Bedingung wird geflissentlich so ausgedrückt, dass auch die Fälle, wo $ay-bx=0$ wird, darunter begriffen sind. Man sieht leicht, dass solcher Fälle zusammen $\frac{1}{2}(e-1)$ sein werden, nemlich

$$\begin{array}{ll} x = a, & y = b \\ x = 2a, & y = 2b \\ x = 3a, & y = 3b \\ \text{u. s. w. bis} & \\ x = \frac{1}{2}(e-1)a, & y = \frac{1}{2}(e-1)b \end{array}$$

also gar keine, wenn die Bestandtheile von $m$ keinen gemeinschaftlichen Divisor

haben. Nennen wir dieses Viertelsystem $k$, und $k'$, $k''$, $k'''$ diejenigen, welche entstehen, indem man die zu $k$ gehörigen Zahlen mit $i$, $-1$, $-i$ multiplicirt, oder man mag auch setzen

$$k' = m + ik, \quad k'' = (1+i)m - k, \quad k''' = im - ik$$

Auf diese Art erhält man folgende Regel, um zu beurtheilen, ob eine beliebige vorgegebene durch $m$ nicht theilbare ganze Zahl $x+iy$ congruent sei einem Gliede von $k$, $k'$, $k''$ oder $k'''$, nemlich indem man kann $2(ax+by)$ in die Form $Pe(aa+bb)+Q$, $2(ay-bx)$ in die Form $Re(aa+bb)+S$ bringen, so dass $P, Q, R, S$ ganze reelle Zahlen und zwar

| so dass | wenn $x+iy$ congruent ist einer Zahl aus $k$ | $k'$ | $k''$ | $k'''$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | gerade | ungerade | ungerade | gerade |
| $R$ | gerade | gerade | ungerade | ungerade |
| $Q$ | positiv | positiv | positiv | nicht negativ |
| $e(aa+bb)-Q$ | positiv | nicht negativ | positiv | positiv |
| $S$ | nicht negativ | positiv | positiv | positiv |
| $e(aa+bb)-S$ | positiv | positiv | nicht negativ | positiv |

Man erleichtert sich die Uebersicht, wenn man die Fälle, wo keine der Zahlen $ax+by$, $ay-bx$ durch $e(aa+bb)$ theilbar ist, von den übrigen unterscheidet.

I. Im ersten Falle hat man für $P$ schlechthin die (algebraisch) kleinere der beiden ganzen Zahlen zu nehmen, zwischen welche (ausschliesslich) $\frac{2(ax+by)}{e(aa+bb)}$ fallen wird, und eben so für $R$ die kleinere der beiden, zwischen welche $\frac{2(ay-bx)}{e(aa+bb)}$ fällt.

II. Ist $ax+by$ durch $e(aa+bb)$ theilbar, so wird $ay-bx$ zwar durch $aa+bb$, nicht aber durch $e(aa+bb)$ theilbar sein (weil sonst $x+iy$ durch $ea+ebi$ theilbar sein würde). Ist nun $R$, d.i. die Zahl, welche zunächst kleiner ist als $\frac{2(ay-bx)}{e(aa+bb)}$, gerade, so wird $x+iy$ einer Zahl aus $k'$ congruent sein nach dem Mod. $ea+ebi$, einer aus $k'''$ hingegen, wenn $R$ ungerade ist.

III. Ist $ay-bx$ durch $e(aa+bb)$ theilbar, nicht aber $ax+by$, so wird $x+iy$ einer Zahl aus $k$, oder aus $k''$ congruent sein, je nachdem die ganze Zahl, welche algebraisch zunächst kleiner ist als $\frac{2(ax+by)}{e(aa+bb)}$, gerade oder ungerade ist.

5.

Man leitet aus obigem ohne Mühe folgende Methode ab zur Bestimmung des Characters einer gegebenen ganzen Zahl $M = A + Bi$ in Beziehung auf den ungeraden sie nicht messenden Modulus $m = ea + ebi$.

Zur Abkürzung bedienen wir uns folgender Bezeichnung.. Wenn $p$ irgend eine gebrochene reelle Zahl vorstellt, soll durch $[p]$ diejenige ganze Zahl bezeichnet werden, die zugleich $p - [p]$ und $1 + [p] - p$ positiv macht. Bei dieser Definition ist also die Anwendung der Bezeichnung auf ganze Zahlen ausgeschlossen. Fasste man die Definition so, dass weder $p - [p]$ noch $1 + [p] - p$ negativ sein soll, so würde das Zeichen $[p]$ für den Fall, wo $p$ ganze Zahl ist, zweideutig sein. Man könnte auch, wie in einer früheren Abhandlung geschehen ist, die Bedingung so stellen, dass $1 + [p] - p$ positiv und $p - [p]$ nur nicht negativ sein soll. Für unsern Zweck ist es etwas bequemer, sich an die erste Begriffsbestimmung zu halten.

Das Viertelsystem $k$ bilden hienach alle ganzen Zahlen $f$, wofür wenn man $\frac{2f}{m} = \xi + \eta i$ setzt, $\xi$ zwischen 0 und 1 ausschliesslich, $\eta$ zwischen 0 und 1, die 0 eingeschlossen, liegt, oder

$$[\xi] = 0, \quad [\eta] = 0$$
$$\text{oder} \quad [\xi] = 0, \quad \eta = 0$$

Setzt man nun für jedes $f$, $\frac{2fM}{m} = \xi + i\eta$ und nimmt

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Psi f = 0$ | wenn zugleich $[\xi]$ gerade und entweder | $[\eta]$ gerade oder | $\eta$ ganz |
| 1 | $[\eta]$ gerade und entweder | $[\xi]$ ungerade oder | $\xi$ ganz |
| 2 | $[\xi]$ ungerade und entweder | $[\eta]$ ungerade oder | $\eta$ ganz |
| 3 | $[\eta]$ ungerade und entweder | $[\xi]$ gerade oder | $\xi$ ganz |

tabellarisch so

| | $[\eta]$ gerade | $[\eta]$ ungerade | $\eta$ ganz |
|---|---|---|---|
| $[\xi]$ gerade | 0 | 3 | 0 |
| $[\xi]$ ungerade | 1 | 2 | 2 |
| $\xi$ ganz | 1 | 3 | — |

was man durch $\nabla(\xi + i\eta)$ bezeichnen mag, so wird der gesuchte Character der Zahl $M$ in Beziehung auf den Modulus $m$ aequal dem kleinsten Reste von $\Sigma \Psi f$ nach dem Modulus 4.

6.

Die im vorhergehenden Art. gegebene Vorschrift ist allgemein: für den Fall, wo $M$ ungerade ist, werden wir ihr aber eine andere Gestalt geben. Wir werden zugleich annehmen, dass die reellen Theile von $m$ und $M$ ungerade, also die imaginären gerade sind.

Wir lassen jeder zu dem Viertelsysteme $k$ gehörenden Zahl $f$ eine andere $g$ correspondiren, die aus $f$ auf folgende Art abgeleitet wird. Indem man $\frac{2f}{m} = \xi + i\eta$ setzt, unterscheidet man vier Fälle

I. Wenn $[2\xi] = 0$ und entweder $[2\eta] = 0$ oder $\eta = 0$
II. Wenn $[2\xi] = 1$ und entweder $[2\eta] = 0$ oder $\eta = 0$
III. Wenn $[2\xi] = 0$ und $[2\eta] = 1$
IV. Wenn $[2\xi] = 1$ und $[2\eta] = 1$

Im ersten Falle wird man $g = 2f$, im zweiten $g = im - 2if$, im dritten $g = m + 2if$, im vierten $g = (1+i)m - 2f$ setzen. Man sieht leicht, dass der Inbegriff aller $g$ ein vollständiges Viertelsystem $l$ bildet; ihre Characteristik ist, dass zugleich, wenn man $\frac{g}{m} = \xi + i\eta$ setzt

entweder $[\xi] = 0$, $[\eta] = 0$
oder $\eta = 0$, $[\xi] = 0$ und $g$ durch $1+i$ theilbar
oder $\xi = 0$, $[\eta] = 0$ und $g$ durch $1+i$ nicht theilbar

Daraus folgt, dass $l$ sich von $k$ nur dadurch unterscheidet, dass diejenigen Zahlen in $k$, für welche $\eta = 0$, und die durch $1+i$ untheilbar sind, nemlich

$$a+bi,\quad 3(a+bi),\quad 5(a+bi)\ldots\frac{e-3}{2}(a+bi) \text{ oder bis } \frac{e-1}{2}(a+bi)$$

je nachdem $e$ von der Form $4n+1$ oder $4n+3$, in $l$ fehlen und dagegen in letzterm Complex die Producte jener Zahlen in $i$ auftreten. Zugleich sieht man, dass für $e = 1$, d. i. wenn $m$ durch keine reelle ganze Zahl theilbar ist, $k$ und $l$ ganz gleich sind.

Es kommt nun darauf an, $\Psi f$ unmittelbar aus dem dem $f$ entsprechenden $g$ abzuleiten. Das Resultat ist, dass für obige 4 Fälle

I. $\Psi f = \nabla \frac{gM}{m}$

II. $\Psi f = \begin{cases} -\nabla \frac{gM}{m} & \text{wenn weder reeller noch imaginärer Th. von } \frac{gM}{m} \text{ ganz} \\ 1-\nabla \frac{gM}{m} & \text{wenn einer von beiden ganz} \end{cases}$

III. wie II. IV. wie I.

# BEMERKUNGEN.

Die Bruchstücke, die hier im Druck mit I und II bezeichnet sind, gehören nach dem Orte zu urtheilen, den die betreffenden Handschriften in einem Notizbuche einnehmen, dem Jahre 1811 oder der zunächst folgenden Zeit an. Von den vorangehenden Versuchen, den Beweis des Fundamentaltheorems für biquadratische Reste nach den hier für den Rest $1+i$ angewandten Methoden durchzuführen, ist eine Aufzeichnung vorhanden, welche den speciellen Fall des Restes $1+2i$ erledigt und von derjenigen Bestimmung des biquadratischen Characters ausgeht, die man als Note dem Art. 6 des Bruchstücks III beigefügt hat. Im übrigen lassen sich die historischen Angaben, die Gauss in den Anzeigen seiner arithmetischen Abhandlungen veröffentlicht hat, mit Hülfe des Nachlasses dahin ergänzen, dass die in den Artt. 15 bis 20 der *Theoria residuorum biquadrat.* aufgenommenen Lehrsätze schon vor der Ausarbeitung der *Theoria motus corporum coel.* niedergeschrieben sind. Die in den Anzeigen erwähnten Untersuchungen über cubische Reste werden wohl nicht zur Ausarbeitung gelangt sein; aufgezeichnet finden sich davon die mit den Hülfsmitteln, welche die Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* bietet, durchgeführten Beweise der Reciprocitätssätze für zwei Primzahlen, von denen die eine reell ist.

Die Bruchstücke III bis VI bilden in der Handschrift besondere Hefte und für die drei ersten derselben weist die Form der Schriftzüge auf eine Zeit, die der für die Bruchstücke I und II nicht fern liegt, während für das letzte, Nr. VI, ein bedeutend späterer Zeitpunkt angenommen werden muss.

[I.] Art. 10. Die Bestimmung der Anzahl der Ganzepunkte in $(z, z', z'+\zeta, z+\zeta)$ ergibt sich aus dem Satze: hedeuten $a$ und $b$ relative Primzahlen, so geht die von $\xi+\eta i$ nach $\xi+\eta i+a+bi$ gezogene Gerade durch Einen Ganzepunkt, wenn der imaginäre Theil von $(\xi+\eta i).(-a+bi)$ eine ganze Zahl ist.

[I.] Art. 17. Die erste Umformung des letzten $S$ in dem Ausdrucke für $\triangle S$ erhält man, wenn man das betreffende Flächenstück in solche drei Theile zerlegt, dass jenes $S$ in

$$\begin{aligned} &S(\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i,\ \ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ \ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i,\ \ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(+)})\\ -&S(\tfrac{1}{2}m,\ \ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(+)},\ \ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i)\\ -&S((\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ \ \tfrac{1}{2}m,\ \ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i)\end{aligned}$$

übergeht, und wenn man dann die Ganzepunkte in dem ersten Flächentheile mit Hülfe des Satzes in Art. 10 auszählt und ferner berücksichtigt, dass in dem zweiten Flächentheile sich kein Ganzepunkt befindet.

Die zweite Umformung erhält man, wenn man die den Eckpunkten des dritten Flächentheils entsprechenden Grössen mit $i$ multiplicirt und um die ganze Zahl $(1-i)\frac{m-1}{2}$ vermehrt, endlich die dritte Umformung, wenn man mit der zuletzt entstandenen Figur nach Vorschrift des Art. 16 diejenige vergleicht, die gegen jene die Ortsverschiedenheit $\frac{-1}{1+i}$ hat.

[I.] Art. [18.] Eine Erläuterung zum ersten Schema findet man in dem später niedergeschriebenen hier mit [II.] bezeichneten Bruchstücke Art. 1 bis 6.

[I.] Art. [18.] (2.) Die geometrische Deutung ergibt mit Zuhülfenahme der beiden Systeme von Ganzepunkten

$$[-2iQ-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ iQ]=[-2iQ+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ iQ]=\mathrm{IV}^{*} \text{ und } -[-2iQ+\tfrac{1}{2}i,\ -\tfrac{1}{2}i,\ iQ]=-[-2iQ-\tfrac{1}{2}i,\ -\tfrac{1}{2}i,\ iQ]=\mathrm{X}^{*}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{IV}-\mathrm{IV}^{*}\ &+[-2iQ,\ \tfrac{1}{2}i,\ -\tfrac{1}{2}]=-\mathrm{X}+\mathrm{X}^{*}+[-iQ,\ \tfrac{1}{2}i,\ -\tfrac{1}{2}]\\ \mathrm{XIII}+\mathrm{IV}^{*}\ &=[-2iQ,\ 1,\ iQ]\ \ =-I(-2iQ)+I(-iQ)\\ \mathrm{V}+\mathrm{X}^{*}\ &=-[-2iQ,-i,iQ]=R(-2iQ)-R(-iQ)\end{aligned}$$

wenn allgemein $Rx$ und $Ix$ die grössten Ganzen des reellen Theils und des Coëfficienten des imaginären Theils von $x$ bedeuten.

$[-2iQ,\ \tfrac{1}{2}i,\ -\tfrac{1}{2}]$ ist aber die Anzahl der Ganzepunkte in dem Quadrate, dessen Mittelpunkt sich in $-2iQ-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i$ befindet und zwischen dessen Eckpunkten die Ortsunterschiede $\tfrac{1}{2}$ und $\tfrac{1}{2}i$ Statt haben.

$[-iQ,\ \tfrac{1}{2}i,\ -\tfrac{1}{2}]$ oder $[-2iQ,\ -\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{1}{2}]$ ist die Anzahl der Ganzepunkte in einem gleichen Quadrate mit dem Mittelpunkte $-2iQ+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i$.

[I.] Art. [18.] (3.) Mit Zuhülfenahme der Ganzepunkte $[0,\ \tfrac{1}{2}i,\ -iQ]=-[-\tfrac{1}{2}i,\ -\tfrac{1}{2}i,\ -iQ]=\mathrm{I}^{*}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{VII}-\mathrm{XII} &= \mathrm{I}-\mathrm{I}^{\circ}+[-iQ,\ \tfrac12,\ \tfrac12 i]-[0,\ \tfrac12,\ \tfrac12 i] = \mathrm{I}-\mathrm{I}^{\circ}+[-2iQ,\ \tfrac12,\ \tfrac12 i]\\
\mathrm{II}-\mathrm{I}^{\circ} &= [0,\ -i,\ -iQ] = -R0+R(-iQ)\\
\mathrm{IX}-\mathrm{I} &= [0,\ -1,\ -iQ] = I0-I(-iQ)\\
\mathrm{VI}-\mathrm{XII} &= -[\tfrac12 i,\ -1,\ -iQ] = -I(\tfrac12 i)+I(-iQ+\tfrac12 i)\\
\mathrm{VIII}-\mathrm{XIV} &= -[\tfrac12,\ -1-i,\ \tfrac12 im_{(-)}] = \frac{a-1}{2}+\frac{b}{2}
\end{aligned}$$

[II.] Art. 10. Es ist

$$\Upsilon P' \equiv -\Upsilon(-iP'+\tfrac12 im),\quad \Upsilon P'' \equiv -1-\Upsilon(P''-\tfrac12 im),\quad \Upsilon P''' \equiv 1+\Upsilon(-iP''')\ (\text{mod. } 4)$$

und $-iP'+\frac12 im$, $P''-\frac12 im$ sind die um $\frac12 i$ vermehrten Ganzepunkte resp. in I, VI.

[III.] Art. 6. Die in der Note angegebenen Regeln für die Bestimmung des Dec. $\frac{M}{m}$ hat man der vorliegenden Abhandlung aus einem andern Orte der Handschriften beigefügt. Die erste dieser beiden Regeln, die wie leicht zu sehen mit der zweiten übereinstimmt, folgt aus der des Art. 6, weil

$$k \equiv f.i^{-n}\ (\text{mod. } m),\quad n = \theta\frac{2fM}{m},\quad p = mm',\quad \left[\frac{4km'}{p}\right]^2 \equiv \theta\frac{2km'}{p}\ (\text{mod. } 2+2i)$$

ist.

[III.] Art. 8 enthält in der Handschrift ein Beispiel zu Art. 7, nemlich die Bestimmung des Decidenten von $-1+2i$ für den Modulus $-11+4i$.

[III.] Art. 10. In Bezug auf die Bemerkung 'anders auszudrücken' kann man Art. 2 des folgenden Bruchstücks [IV] vergleichen.

[IV.] Die Art. 1. 2. 4 enthalten in der Handschrift ausser dem hier Abgedruckten noch die Anwendung auf die beiden Beispiele für $m = 5+8i$, $M = 9+4i$ und für $m = 9+4i$, $M = 5+8i$.

[V.] Art. [7.] Es bezeichnet hier Dec. $\frac{m}{M}$ wie in Art. 1 des vorhergehenden Bruchstücks [IV] den Werth von

$$\Sigma(-1)^X\Sigma(-1)^Y\ \text{Int.}\ p$$

worin die Summation über alle ganze Zahlen $X$ und $Y$ auszudehnen ist, für welche die zugehörigen $\xi$ und $\eta$ innerhalb der Grenzen $0$ und $\frac12$ liegen.

Die Formeln für den Decidenten in Art. 7 und 15 sind nach der Angabe des Textes auf zwei be-

sondern Wegen gefunden, um aber diese Erläuterungen nicht zu sehr auszudehnen, werden sie hier aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet.

Indem $X$ irgend einen bestimmten ganzzahligen Werth annimmt, sei $Y^*$ das kleinere, $Y^{**}$ das grössere der beiden $Y$, welche den Grenzwerthen von $\xi$, $\eta$ entsprechen. Die zu $Y^*$ und $Y^{**}$ zugehörigen Werthe von $p$ seien $p^*$ und $p^{**}$, die ebenso wie $Y^*$ und $Y^{**}$ einander nicht gleich werden können, weil die Summe $\Sigma$ sich nicht über die Grenzwerthe von $\xi$ und $\eta$ erstreckt.

Führt man auf dieselbe Weise wie in den beiden vorhergehenden Aufsätzen [III] und [IV] die Summation über alle bei demselben $X$ Statt habenden Werthe von $Y$ aus, setzt dabei für die Anzahl der zwischen $Y'$ und $Y''$ liegenden ungeraden Zahlen $[\tfrac{1}{2}Y''-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}Y'-\tfrac{1}{2}]$ und fügt die Intensoren, die sich auf die Grenzen $\xi=0$ und $=\tfrac{1}{2}$ beziehen, zwei Mal aber mit entgegengesetzten Zeichen hinzu, so erhält man für $\Sigma(-1)^X\,\mathrm{Int.}\,p$ den aus sieben Theilen bestehenden Ausdruck

$$-\Sigma[-\mathrm{Int.}(p-\mu\varpi i)+\mathrm{Int.}(p+\mu\varpi i)] \text{ worin alle } p \text{ aufzunehmen, für welche } [Y] \text{ gerade, } x \text{ oder } y \text{ ganz, incl. } \xi=0 \text{ und } \tfrac{1}{2}, \text{ excl. } \eta=0 \text{ und } \tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}-\mathrm{Int.}(p^*-\mu\varpi i) \text{ wenn } [Y^*] \text{ gerade}\\ +\mathrm{Int.}(p^{**}+\mu\varpi i) \text{ wenn } [Y^{**}] \text{ gerade}\end{array}\right\}\ \xi=0 \text{ oder } \tfrac{1}{2},\quad 0<\eta<\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}-\mathrm{Int.}(p^*+\mu\varpi i) \text{ wenn } [Y^*] \text{ gerade}\\ +\mathrm{Int.}(p^{**}-\mu\varpi i) \text{ wenn } [Y^{**}] \text{ gerade}\end{array}\right\}\ 0<\xi<\tfrac{1}{2},\quad \eta=0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}-\mathrm{Int.}(p^*+\mu\varpi i) \text{ wenn } [Y^*] \text{ gerade}\\ +\mathrm{Int.}(p^{**}-\mu\varpi i) \text{ wenn } [Y^{**}-\varpi] \text{ gerade}\end{array}\right\}\ \xi=0 \text{ oder } \tfrac{1}{2},\quad \eta=0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$

welcher mit $(-1)^X$ multiplicirt und über alle ganzzahligen $X$ summirt den Decidenten $\frac{m}{M}$ ergibt.

Aus dem ersten Theil des Ausdrucks entsteht auf diese Weise von den nach Art. 2 Vorschrift I gebildeten $\varepsilon$

$$\Sigma\varepsilon \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade}$$
$$-\tfrac{1}{4}\Sigma\varepsilon \text{ wo ausserdem } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade}$$

Für die folgenden Theile kann

$$\left.\begin{array}{l}-(B)\,\mathrm{Int.}(p-B\mu\varpi i) \text{ wenn } \xi=0\\ +(B)\,\mathrm{Int.}(p+B\mu\varpi i) \text{ wenn } \xi=\tfrac{1}{2}\end{array}\right\}\ X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } 0<\eta<\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}-(A)\,\mathrm{Int.}(p+A\mu\varpi i) \text{ wenn } \eta=0\\ +(A)\,\mathrm{Int.}(p-A\mu\varpi i) \text{ wenn } \eta=\tfrac{1}{2}\end{array}\right\}\ X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } 0<\xi<\tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2}[(A')+(B')]\,\mathrm{Int.}(p+A'\mu\varpi i) \text{ wenn } X \text{ ganz, } [Y+A'\varpi] \text{ gerade, } \xi \text{ und } \eta=0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$

gesetzt werden, worin $A'=+A$ oder $-A$ ist, wenn $\eta=0$ oder $\tfrac{1}{2}$, $B'=+B$ oder $-B$, wenn $\xi=0$ oder $\tfrac{1}{2}$, und worin z. B. $(A)$: $+1$ oder $-1$ bezeichnet, jenachdem $A$ positiv oder negativ ist.

Multiplicirt man mit $(-1)^X$, führt die Summation über $X$ aus, lässt dabei in diesen Ausdrücken u. zwar im

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ersten | $p-B\mu\varpi i$, | $P-BD\varpi i$, | $\pi-AB\varpi i-BB\varpi$, | $X$, | $[Y]$ bez. in | $ip$, | $iP$, | $i\pi$, | $-Y$, | $[X]$ |
| zweiten | $p+B\mu\varpi i$, | $P+BD\varpi i$, | $\pi+AB\varpi i+BB\varpi$, | $X$. | $[Y]$ . . . | $p$, | $P$, | $\pi$, | $X$, | $[Y]$ |
| dritten | $p+A\mu\varpi i$, | $P+AD\varpi i$, | $\pi+AA\varpi i+AB\varpi$, | $X$, | $[Y]$ . . . | $p$, | $P$, | $\pi$, | $X$, | $[Y]$ |
| vierten | $p-A\mu\varpi i$, | $P-AD\varpi i$, | $\pi-AA\varpi i-AB\varpi$, | $X$, | $[Y]$ . . | $im-ip$, | $iM-iP$, | $i-i\pi$, | $Y-B$, | $A-1-[X]$ |

übergehen und bezeichnet das aus dem fünften Ausdruck sich ergebende Resultat mit $Q_1$, so entsteht

$$\begin{array}{l} -\Sigma(-1)^{Y}(B)\,\mathrm{Int.}\,ip, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade, } \eta=\omega,\ 0<\xi<\tfrac{1}{2} \\ +\Sigma(-1)^{X}(B)\,\mathrm{Int.}\,p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } \xi=\tfrac{1}{2}+\omega,\ 0<\eta<\tfrac{1}{2} \\ -\Sigma(-1)^{X}(A)\,\mathrm{Int.}\,p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } \eta=\omega,\ 0<\xi<\tfrac{1}{2} \\ +\Sigma(-1)^{Y}(A)\,\mathrm{Int.}\,(im-ip), \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade, } \xi=\tfrac{1}{2}+\omega,\ 0<\eta<\tfrac{1}{2} \\ +Q_1 \end{array}$$

Die Untersuchung der einzelnen Fälle lässt erkennen, dass unter der Voraussetzung $M\equiv 1 \pmod{2+2i}$

$$\begin{array}{l} Q_1 = -\mathrm{Int.}\,\mu\omega i \text{ ist, wenn } M \text{ im 1. Quadranten liegt} \\ \quad -\mathrm{Int.}\,(\tfrac{1}{2}mi+\mu\omega i), \text{ wenn } M \text{ im 2. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade} \\ \quad +\mathrm{Int.}\,(\tfrac{1}{2}mi-\mu\omega i), \text{ wenn } M \text{ im 4. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade} \end{array}$$

indem man eine complexe Zahl gerade oder ungerade nennt, je nachdem sie durch 2 theilbar ist oder nicht.

Hiernach wird also bei Anwendung der in den Vorschriften II und IV bestimmten $\varepsilon$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Dec.}\,\frac{m}{M} = & \mathrm{I}, & \Sigma\varepsilon, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\ & & -4\Sigma\varepsilon, \text{ wo noch } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade} \\ & \mathrm{II}, & -\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,ip, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade} \\ & \mathrm{IV}, & +\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\ & \mathrm{II}, & +\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\ & \mathrm{IV}, & +\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,(im-ip), \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade} \\ & & +Q_1 \end{array}$$

In einer andern Form erhält man den Ausdruck für den Decidenten, wenn man zuerst nach $X$ summirt und dabei die Anzahl der zwischen $X'$ und $X''$ liegenden ungeraden Zahlen durch $[\tfrac{1}{2}X''+\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X'+\tfrac{1}{2}]$ darstellt, nemlich

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Dec.}\,\frac{m}{M} = & \mathrm{I}, & \Sigma\varepsilon, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\ & & -4\Sigma\varepsilon, \text{ wo noch } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade} \\ & \mathrm{II}, & -\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,ip, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\ & \mathrm{IV}, & +\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,p, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\ & \mathrm{II}, & +\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,p, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\ & \mathrm{IV}, & +\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,(im-ip), \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade} \\ & & +Q_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Q_2 = -\mathrm{Int.}\,(-\mu\omega), \text{ wenn } M \text{ im 2. Quadr.} \\ \quad +\mathrm{Int.}\,(\tfrac{1}{2}m-\mu\omega), \text{ wenn } M \text{ im 1. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade} \\ \quad -\mathrm{Int.}\,(\tfrac{1}{2}m+\mu\omega), \text{ wenn } M \text{ im 3. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade} \end{array}$$

Führt man die Summation nach $Y$ zuerst aus, wählt aber die zweite so eben angewandte Art der Bestimmung der Anzahl der zwischen zwei Werthen liegenden ungeraden Zahlen, so wird

$$\begin{aligned}
\text{Dec.}\,\frac{m}{M} = \text{I},\quad & \Sigma\varepsilon,\ \text{wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade} \\
& -4\,\Sigma\varepsilon,\ \text{wo noch } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade} \\
\text{II},\quad & -\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,ip,\ \text{wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\
\text{IV},\quad & +\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,p,\ \text{wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade} \\
\text{II},\quad & +\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,p,\ \text{wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade} \\
\text{IV},\quad & +\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,(im-ip),\ \text{wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\
& +Q_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = & -\text{Int.}\,(-\mu\omega i),\ \text{wenn } M \text{ im 3. Quadr.} \\
& -\text{Int.}\,(\tfrac{1}{2}mi+\mu\omega i),\ \text{wenn } M \text{ im 2. Quadr. und } \tfrac{M-1}{2} \text{ ungerade} \\
& +\text{Int.}\,(\tfrac{1}{2}mi-\mu\omega i),\ \text{wenn } M \text{ im 4. Quadr. und } \tfrac{M-1}{2} \text{ ungerade}
\end{aligned}$$

Summirt man zuerst noch $X$ und gebraucht dabei die erste Art der Darstellung der Anzahl der zwischen zwei Werthen liegenden ungeraden Zahlen, so erhält man die in [V.] Art. 15 angegebene Form für den Decidenten, wo die Grösse $q$ auch durch folgende Gleichung definirt werden kann

$$\begin{aligned}
q = & -\text{Int.}\,\mu\omega,\ \text{wenn } M \text{ im 4. Quadr.} \\
& +\text{Int.}\,(\tfrac{1}{2}m-\mu\omega),\ \text{wenn } M \text{ im 1. Quadr. und } \tfrac{M-1}{2} \text{ gerade} \\
& -\text{Int.}\,(\tfrac{1}{2}m+\mu\omega),\ \text{wenn } M \text{ im 3. Quadr. und } \tfrac{M-1}{2} \text{ gerade}
\end{aligned}$$

Die Vereinigung dieser vier Ausdrücke für den Decidenten bildet das in [V.] Art. 7 aufgestellte Resultat, weil $\text{Int.}\,ip - \text{Int.}\,p$ gleich 2 wird für $[x]$ gerade $[y]$ ungerade, sonst aber gleich 1, ferner $\text{Int.}\,(im-ip)+\text{Int.}\,p$ gleich 0 für $[x]$ gerade $[y]$ gerade, in den übrigen Fällen aber gleich 4.

[V.] Art. [7.] Die erste Tafel für das Beispiel gibt in der ersten Spalte die zu jedem ganzzahligen $P$ zugehörigen Werthe von $\frac{37.P}{M}$ oder $37(\xi+\eta i)$, wenn $0<\xi<1$, $0<\eta<1$ ist, in der zweiten $\frac{37.Pm}{M}$ oder $37.p$, in der dritten die in $p$ enthaltene grösste ganze Zahl, in der vierten $\pm\,\text{Int.}\,p$, wo das obere Zeichen gilt, wenn $P$ durch $1+i$ theilbar, das untere, wenn $P$ nicht durch $1+i$ theilbar ist.

[V.] Art. [9.] [12.] Die verbesserte Bezeichnungsweise der $\theta$ ist nur bei der zweiten und dritten Classe Artt. 9, 10 angedeutet, aber auch auf die erste und vierte Artt. 8, 11 auszudehnen. Hiernach wird ein $\theta^\lambda = T+Ui$ denjenigen Index $\lambda$, $=0$, 1, 2 oder 3 haben, für welchen die durch die Gleichungen

$$i^{\lambda} M = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} i, \quad i^{-\lambda} \mu = \rho + \sigma i$$
$$\sigma \varphi^{0} = - \text{Coëff. Img}\, \theta^{\lambda} (a - b i) = + b T - a U$$
$$\mathfrak{s} \Phi^{0} = + \text{Coëff. Img}\, \theta^{\lambda} (\mathfrak{A} - \mathfrak{B} i) = - \mathfrak{B} T + \mathfrak{A} U$$

bestimmten Grössen $\varphi^0$ und $\Phi^0$ zwischen 0 und ½ liegen.

Um nach den Andeutungen in Art. 8 (3) zu beweisen, dass, wenn $T$, $U$ zwei ganze reelle Zahlen sind, welche die so eben aufgestellten Bedingungen erfüllen, $T + Ui$ sich auch in dem bei einer der vier Combinationen Artt. 8..11 bestimmten Complexus $\theta^{\lambda}$ befindet, bezeichne man mit $\varphi'$, $\Phi'$ diejenigen ganzen complexen Zahlen, für welche die Gleichung

$$T + U i = \varphi' i^{\lambda} M + \Phi' m$$

Statt hat und für welche eine der vier Grössen $\pm \frac{\varphi' - \varphi^0}{m}$, $\pm i \frac{\varphi' - \varphi^0}{m}$ so beschaffen, dass der reelle Theil und der Coëfficient des imaginären Theils zwischen 0 und ½ liegen (*Theoria residuorum biquadr. artt.* 45, 46). Die betreffende Grösse ist dann, wie man aus der Untersuchung der in den vier Combinationen enthaltenen sechzehn einzelnen Fälle leicht ersieht, $\frac{p}{m}$ und die ihr entsprechende Grösse unter $\pm \frac{\Phi' - \Phi^0}{m}$, $\pm i \frac{\Phi' - \Phi^0}{M}$ ist $\frac{P}{M}$, weil $\frac{\Phi' - \Phi^0}{M} = - \frac{\varphi' - \varphi^0}{m} i^{\lambda}$ wird.

Aus dieser Art der Darstellung der Grössen $\frac{p}{m}$ oder $\frac{P}{M}$ folgt auch, dass I, $\Sigma \varepsilon$ von allen aus $\theta + \theta' + \theta'' + \theta'''$ besteht, worin $\theta^{\lambda}$ die Summe derjenigen $\varepsilon$ bedeutet, die für jeden Ganzepunkt $\theta$ innerhalb des Parallelogramms $0$, $\frac{1}{2} m$, $\frac{1}{2} m + \frac{1}{2} i^{\lambda} M$, $\frac{1}{2} i^{\lambda} M$,

$= +1$ zu setzen sind, wenn $\theta$ durch $1 + i$ theilbar und Coëff. Imag. $\mu i^{-\lambda}$ positiv oder wenn keine Bedingung gilt, dagegen

$= -1$ wenn nur eine gilt.

[V.] Art. 13. Die Bestimmung von $\Theta^{\lambda}$ kann entweder durch die oben für Dec. $\frac{m}{M}$ angewandten vier verschiedenen Summationsarten oder, was im Wesentlichen dasselbe ist, nach den in [II.] Art. 11 angedeuteten Methoden ausgeführt werden, bei welchen dann die vier Constructionen zu Grunde zu legen sind, die durch Verbindung der Punkte, deren $\theta$ ein Vielfaches von $1 + i$ ist, resp. mit den Punkten $\theta + 1$, $\theta + i$, $\theta - 1$ und $\theta - i$ entstehen.

Lässt man in der Begrenzung des zuvor erwähnten Parallelogramms allen den Punkten ein $\theta$ entsprechen, für welche der reelle oder imaginäre Theil von $\theta$ eine ganze Zahl wird, bezeichnet mit $\theta^0$ die nächste durch $1 + i$ theilbare Ganze bei $\theta$, mit $l$ die Ortsverschiebung von einem Punkte des geraden Begrenzungsstückes, das den Punkt $\theta$ enthält, bis zu irgend einem nachfolgenden Punkte derselben Geraden, also z. B. bei jenem Parallelogramm der Reihe nach die Grössen $m$, $M i^{\lambda}$, $-m$, $-M i^{\lambda}$, und setzt

$$\varepsilon = \pm 1 \text{ mit dem Zeichen des imaginären Theils von } \frac{l}{\theta - \theta^0}$$

so ergibt die Vereinigung der auf die eine oder andere Weise erhaltenen vier Resultate $4 \Theta^{\lambda} = - \Sigma \varepsilon$.

Die gesonderte Bestimmung der den Eckpunkten entsprechenden $\theta$ und $\varepsilon$ wird umgangen, wenn man dies Parallelogramm durch ein anderes ersetzt, dessen Begrenzungen den Begrenzungen des erstern

unendlich nahe sind, und welches die beiden Punkte 0 und $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}i^\lambda M$ nicht einschliesst. Die Begrenzung eines solchen Parallelogramms erhält man, wenn man sie an die positiven Seiten der Linien

$$0 \ldots\ldots \tfrac{1}{2}m, \quad \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}i^\lambda M \ldots\ldots \tfrac{1}{2}m, \quad \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}i^\lambda M \ldots\ldots \tfrac{1}{2}i^\lambda M, \quad 0 \ldots\ldots \tfrac{1}{2}i^\lambda M$$

legt. Lässt man den vier so entstandenen Geraden der Reihe nach die unendlich kleinen positiven Grössen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ entsprechen, so kann man für die auf ihnen liegenden Punkte $\theta$

$$\theta = p = m(\xi + \omega_1 i), \quad -\theta i^\lambda + \tfrac{1}{2}mi^\lambda + \tfrac{1}{2}M = P = M(\xi + \omega_2 i), \qquad -\theta + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}Mi^\lambda = p = m(\xi + \omega_3 i),$$
$$\theta i^{-\lambda} = P = M(\xi + \omega_4 i) \quad \text{wenn } \lambda \text{ gerade}$$
$$\theta = p = m(\xi + \omega_1 i), \quad \theta i^{1-\lambda} - \tfrac{1}{2}mi^{1-\lambda} + \tfrac{1}{2}M = P = M(\tfrac{1}{2} + \omega_2 + \eta i), \quad \theta i + \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}Mi^{1+\lambda} = p = m(\tfrac{1}{2} + \omega_3 + \eta i),$$
$$\theta i^{-\lambda} = P = M(\xi + \omega_4 i) \quad \text{wenn } \lambda \text{ ungerade}$$

setzen, worin $\xi$ und $\eta$ auch theilweise zur Schliessung der Figur das Gebiet der reellen Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}$ um unendlich kleine Grössen überschreiten.

Bezeichnen $G, g, H, h$ die Summen der resp. nach den Vorschriften II, III, IV, V (in Artt. 3 bis 6) gebildeten $\varepsilon$, und umfassen $G'$ oder $G_{,}$ und $g'$ oder $g_{,}$ diejenigen $\varepsilon$, welche für die beim zweiten Parallelogramm etwa auftretenden unendlich kleinen Werthe von $\xi$ Statt haben, im Uebrigen aber resp. nach den Vorschriften II und III gebildet sind, beziehen sich ferner $G''$ oder $G_{,,}$ und $g''$ oder $g_{,,}$ ebenso auf dieselben Vorschriften aber auf die unendlich kleinen Werthe von $\frac{1}{2} - \xi$, und endlich $H', h_{,}, H'', h_{,,}$ resp. auf die Vorschriften IV, V, IV, V und die unendlich kleinen Werthe resp. von $\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2} - \eta, \eta, \eta$, so wird

$$4\Theta^\lambda = -(g + g' + g'') - i^\lambda(G + G' + G'') + i^\lambda(g + g_{,} + g_{,,}) + (G + G_{,} + G_{,,}) \qquad \text{wenn } \lambda \text{ gerade}$$
$$4\Theta^\lambda = -(g + g' + g'') - i^{1-\lambda}(H + H' + H'') - i^{\lambda-1}(h + h_{,} + h_{,,}) + (G + G_{,} + G_{,,}) \quad \text{wenn } \lambda \text{ ungerade}$$

Für denjenigen Eckpunkt $\theta$ des Parallelogramms, welcher dem Punkte 0 zunächst liegt, bezeichne $\xi_1$ den zugehörigen Werth von dem $\xi$ der ersten Seite, $\xi_4$ den zugehörigen Werth von dem $\xi$ der vierten Seite, so dass

$$\theta = m(\xi_1 + \omega_1 i) = i^\lambda M(\xi_4 + \omega_4 i)$$

wird, dann ergibt sich dasjenige $\xi$, welchem auf der ersten Seite oder deren Verlängerung ein Punkt $p$ mit dem reellen Theile gleich 0 entspricht, aus der Gleichung

$$(\text{Real. } p = 0), \quad \xi - \xi_1 = \sigma a \mathfrak{A} \omega_1 - \sigma \omega_4$$

worin die positiven Factoren der unendlich kleinen positiven Grössen durch die Einheit ersetzt sind und $\sigma, \mathfrak{A}$ die durch

$$\rho + \sigma i = i^{-\lambda}(a + b i), \quad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} i = i^\lambda(A + Bi)$$

bestimmten reellen Grossen bedeuten. Dieser Punkt $p$ liegt auf der ersten Seite selbst, wenn $\xi - \xi_1$ positiv, also, indem man $\omega_1$ unendlich klein gegen $\omega_4$ annimmt, wenn $\sigma$ negativ ist. Der dem Punkte $p$ zunächst liegende Punkt $p^0$, dessen darstellende Zahl durch $1 + i$ getheilt wird, ist der Punkt 0, also hat

Imag. $\frac{m}{p-p^0}$ oder Imag. $\frac{1}{\xi+\omega_1 i}$ das Minuszeichen. Man erhält daher für Real. $p = 0$:

$$\varepsilon = -1 \text{ wenn } (\sigma) = -1; \; \varepsilon = 0 \text{ wenn } (\sigma) = +1, \text{ d. i. } \varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sigma)$$

und auf dieselbe Weise für Imag. $p = 0$

$$\xi - \xi_1 = \sigma b \mathfrak{B} \omega_1 - \sigma \omega_2, \quad \text{Imag.} \frac{m}{p-p^0} = \text{Imag.} \frac{1}{\xi+\omega_1 i}, \quad \varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sigma) \quad \text{also } g' = -1 + (\sigma)$$

In Bezug auf die vierte Seite wird $P^0 = 0$, Imag. $\frac{M}{P-P^0}$ = Imag. $\frac{1}{\xi+\omega_4 i}$

$$\text{also für Real.}\,(i^\lambda P) = 0; \quad \xi - \xi_4 = -\sigma a \mathfrak{A} \omega_4 + \sigma \omega_1, \quad \varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sigma a \mathfrak{A})$$

$$\text{und für Imag.}\,(i^\lambda P) = 0; \quad \xi - \xi_4 = -\sigma b \mathfrak{B} \omega_4 + \sigma \omega_1, \quad \varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sigma b \mathfrak{B})$$

demnach $G_1 = -1 + \frac{1}{2}(\sigma a \mathfrak{A}) + \frac{1}{2}(\sigma b \mathfrak{B})$ oder, weil $\rho = a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B}$ ist, $G_1 = -1 + \frac{1}{2}(\rho\sigma) + \frac{1}{2}(\rho\sigma a b \mathfrak{A}\mathfrak{B})$

Der Theil $R_1^\lambda$ von $4\Theta^\lambda$, der aus dem unendlich nahe bei dem Punkte $0$ liegenden Stücke der Begrenzung entsteht, ist also

$$R_1^\lambda = +G_1 - g' = -(\sigma) + \tfrac{1}{2}(\rho\sigma) + \tfrac{1}{2}(\rho\sigma a b \mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man für die Theile $R_2^\lambda$, $R_3^\lambda$, $R_4^\lambda$, welche ebensolche Beziehungen resp. zu den Punkten $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}Mi^\lambda$, $\frac{1}{2}Mi^\lambda$ haben, wie $R_1^\lambda$ zum Punkte $0$, bei geradem $\lambda$

$$R_2^\lambda = -g'' - i^\lambda G'' = -\tfrac{1}{2}(b) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}), \quad R_3^\lambda = -i^\lambda G' + i^\lambda g_1 = i^\lambda(\sigma) - \tfrac{1}{2} i^\lambda(\rho\sigma) - \tfrac{1}{2} i^\lambda(\rho\sigma a b \mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$
$$R_4^\lambda = +i^\lambda g_{,,} + G_{,,} = \tfrac{1}{2} i^\lambda(b) + \tfrac{1}{2} i^\lambda(\mathfrak{B})$$

bei ungeradem $\lambda$

$$R_2^\lambda = -g'' - i^{1-\lambda} H'' = -\tfrac{1}{2}(b) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}), \quad R_3^\lambda = -i^{1-\lambda} H' - i^{\lambda-1} h_1 = 0,$$
$$R_4^\lambda = -i^{\lambda-1} h_{,,} + G_{,,} = \tfrac{1}{2} i^{\lambda+1}(a) + \tfrac{1}{2} i^{\lambda+1}(\mathfrak{A})$$

[V.]. Art. [14.] Die Auswerthung der Summen von den nach Vorschrift III gebildeten $\varepsilon$ ergibt sich aus der durch die Definition der $\varepsilon$ leicht zu verificirenden Gleichung

$$\text{III}, \quad \Sigma\varepsilon \text{ von allen} - 4\Sigma\varepsilon \text{ von denen, wo } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade} = \text{III}, \quad \Sigma[-\text{Int.}(p - m\omega) + \text{Int.}(p + m\omega)]$$

worin $p$ alle Werthe annimmt, die den unter Vorschrift III angegebenen Bedingungen genügen. Diese Intensoren lassen sich nemlich mit Ausnahme der beiden dem kleinsten $(\xi^*)$ und dem grössten zulässigen Werthe $(\xi^{**})$ von $\xi$ entsprechenden Intensoren, welche resp. gleich

$$-\text{Int.}(p^* - m\omega) \text{ und } +\text{Int.}(p^{**} + m\omega) \text{ oder } -\text{Int.}(\omega m) \text{ und } +\text{Int.}(\tfrac{1}{2} - \omega)m$$

sind, immer zu je zweien $+\text{Int.}(p' + m\omega)$ und $-\text{Int.}(p'' - m\omega)$ so zusammen ordnen, dass zwischen $\xi'$ und $\xi''$, welche den Grössen $p'$ und $p''$ entsprechen, kein Werth von $\xi$ liegt, der den reellen oder imaginären Theil von $p$ zu einer ganzen Zahl macht, so dass also die zwei Intensoren sich stets gegenseitig annulliren.

[V.] Art. [15.] Es ist

II, $+\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,ip$ wo $Y$ ganz $[X]$ gerade, $-\Sigma\varepsilon\,\mathrm{Int.}\,ip$ wo $X$ ganz $[Y]$ ungerade

$= \Sigma[-\mathrm{Int.}\,i(p-m\omega)+\mathrm{Int.}\,i(p+m\omega)]$ für diejenigen $p$, für welche $x$ oder $y$ ganz, $[X]$ gerade

$Y$ ungerade. $0<\xi<\frac{1}{2}$, $\eta=\omega$

$+\mathrm{Int.}\,i(p^{*}-m\omega)$ wenn $[X^{*}]$ gerade $[Y^{*}]$ ungerade

$-\mathrm{Int.}\,i(p^{**}+m\omega)$ wenn $[X^{**}]$ gerade $[Y^{**}]$ ungerade

wie man sich leicht überzeugt, wenn man auf der zweiten Seite der Gleichung die Summation nach dem in der vorhergehenden Note angewandten Verfahren über jedes so kleine Intervall von $\xi_{\prime}$ bis $\xi_{\prime\prime}$ ausführt, dass es zwischen $\xi_{\prime}$ und $\xi_{\prime\prime}$ kein $\xi$ gibt, welches in dem zugehörigen $P$ den reellen oder imaginären Theil zu einer ganzen Zahl macht. Die Anwendung der nach Vorschrift III gebildeten $\varepsilon$ lässt die zweite Seite dieser Gleichung die in Art. 15. aufgestellte Form annehmen.

[V.] Art. [15.] Die Verwandlung der Summen von den nach Vorschrift IV gebildeten $\lambda$'s in die Summen der $\varepsilon$ aus V ergibt sich durch eben solche Betrachtungen wie die in der letzten Note angewandten, wenn noch die Gleichung

V, $\Sigma\varepsilon$ von allen, $-4\Sigma\varepsilon$ wo $x$ ganz $[y]$ gerade, $= +\mathrm{Int.}(\frac{1}{2}im+m\omega)-\mathrm{Int.}(\frac{1}{2}im+\frac{1}{2}-\omega m)$

zu Hülfe gezogen wird, die der zuvor ermittelten Auswerthung der Summe von den $\varepsilon$ in Vorschrift III entspricht.

[V.] Art. [17.] Bestimmt man die Hülfsgrössen $U$, $T$, $L$, $V$ durch die Gleichungen

$U = 1-2(B)-(AB)+(\mathfrak{a}a)+(\mathfrak{b}b)+(\mathfrak{a}b)-(\mathfrak{b}a)+(\mathfrak{a}\mathfrak{b}ab)-(\mathfrak{a}\mathfrak{b}abAB)$ oder

$U = (1+(A))(1-(B))(1-(a\mathfrak{b})+(b\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}\mathfrak{b}))$

weil $(aa)+(\mathfrak{b}b) = (A)+(A\mathfrak{a}\mathfrak{b}ab)$, $(\mathfrak{a}b)-(\mathfrak{b}a) = (B)-(B\mathfrak{a}\mathfrak{b}ab)$ ist,

$T = -2+(a)+(b)-(\mathfrak{b})-2(B)-(\mathfrak{a}ab)$ oder

$T = -2+(a)+(b)-(\mathfrak{b})-2(B)-(aA)+(bB)-(\mathfrak{b}AB)$

$L = (1+(A))(1+(B))(1+(\mathfrak{b}))-(1-(A))(1-(B))(1-(\mathfrak{b}))$

$V = (1+(A))(1-(B))(-2(a)+2(\mathfrak{b})+(ab)+(\mathfrak{a}\mathfrak{b}))$ oder

$V = (1+(A))(1-(B))(-(a)+(b)+(\mathfrak{b})+(ab)-(\mathfrak{b}ab)+(\mathfrak{a}\mathfrak{b}))$

weil $(a)+(b) = (\mathfrak{b})+(\mathfrak{b}ab)$ wenn $A$ positiv $B$ negativ

und bezeichnet mit $W'$, $S'$, $Q'$ die Grössen, in welche die $W$, $S$, $Q$ des Ausdrucks für den Dec. $\frac{m}{M}$ in Art. 14. übergehen, wenn man darin $m$ mit $M$ also $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i$ mit $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}i$ vertauscht, so wird

$$2W' = -5(B)-(AB) \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}$$

$$2W' = -(B)-(AB) \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}$$

$$2S' = -(\alpha\beta abAB)-(\beta)-(B)+(b)$$

$$2Q'+2S'+2W' = 2T+U \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}$$

$$2Q'+2S'+2W' = -4+4(a)+U \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}$$

$$8\psi = 8(q+r+s+w)-(2Q'+2S'+2W')$$

Ersetzt man hier $8(q+r+s+w)$ durch dessen in Art. 15 aufgestellten Werth, bringt ihn aber unter die Form

$$2T+4L+V \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade } \frac{m-1}{2} \text{ gerade}$$

$$2T-16+16(A)+V \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade } \frac{m-1}{2} \text{ ungerade}$$

$$-4+4(a)+V \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade } \frac{m-1}{2} \text{ gerade}$$

$$-20+4(a)+V \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade } \frac{m-1}{2} \text{ ungerade}$$

und beachtet, dass

$$V-U = -\tfrac{1}{4}(1+(a))(1+(A))(1+(\alpha))(1-(b))(1-(B))(1-(\beta))$$

ist, so erhält man für $\psi$ die in Art. 17 angegebene Bestimmungsart.

[VI.] Art. 3. Das unvollständige Citat kann auf Art. 4 des Bruchstücks III bezogen werden.

SCHERING.

---

# ZUR THEORIE DER COMPLEXEN ZAHLEN.

[I.]

## NEUE THEORIE DER ZERLEGUNG DER CUBEN.

1. Wir nehmen an, es gebe eine Auflösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3=0$, nemlich $x=a$, $y=b$, $z=c$. wo $a, b, c$ keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, folglich auch unter sich Primzahlen sind. Wir setzen

$$b+c=\alpha$$
$$c+a=\mathfrak{b}$$
$$a+b=\gamma$$

wo nothwendig auch $\alpha$, $\mathfrak{b}$, $\gamma$ unter sich Primzahlen sein werden. Hätten nemlich $\alpha$ und $\mathfrak{b}$ einen gemeinschaftlichen Divisor, so würde dieser auch $a^3$ und $b^3$ messen, es müssten daher auch $a$ und $b$ einen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Wir werden nun haben

$$(\mathfrak{b}+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\mathfrak{b})^3+(\alpha+\mathfrak{b}-\gamma)^3=0$$

allein es ist identisch

$$(\mathfrak{b}+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\mathfrak{b})^3+(\alpha+\mathfrak{b}-\gamma)^3=(\alpha+\mathfrak{b}+\gamma)^3-24\,\alpha\mathfrak{b}\gamma$$

Es wird folglich

$$(\alpha+\mathfrak{b}+\gamma)^3=24\,\alpha\mathfrak{b}\gamma$$

# ZUR THEORIE DER COMPLEXEN ZAHLEN.

## [I.]

### NEUE THEORIE DER ZERLEGUNG DER CUBEN.

1. Wir nehmen an, es gebe eine Auflösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3=0$, nemlich $x=a$, $y=b$, $z=c$, wo $a$, $b$, $c$ keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, folglich auch unter sich Primzahlen sind. Wir setzen

$$b+c=\alpha$$
$$c+a=\beta$$
$$a+b=\gamma$$

wo nothwendig auch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ unter sich Primzahlen sein werden. Hätten nemlich $\alpha$ und $\beta$ einen gemeinschaftlichen Divisor, so würde dieser auch $a^3$ und $b^3$ messen, es müssten daher auch $a$ und $b$ einen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Wir werden nun haben

$$(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta-\gamma)^3=0$$

allein es ist identisch

$$(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta-\gamma)^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-24\,\alpha\beta\gamma$$

Es wird folglich

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3=24\,\alpha\beta\gamma$$

Sind $\alpha, \beta, \gamma$ reelle Zahlen, so wird $\alpha+\beta+\gamma$ durch 3 theilbar sein, also $(\alpha+\beta+\gamma)^3$ durch 27, folglich $\alpha\beta\gamma$ durch 9. Es muss daher eine der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma$ z. B. $\gamma$ durch 9 theilbar sein, also $c^3$ ebenfalls, folglich $c$ durch 3.

Sind hingegen $\alpha, \beta, \gamma$ imaginäre Zahlen, so schliessen wir, dass $\alpha+\beta+\gamma$ durch $1-\varepsilon$, folglich $24\alpha\beta\gamma$ durch $(1-\varepsilon)^3$, mithin $\alpha\beta\gamma$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sein müsse. Es ist also eine der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma$ durch $1-\varepsilon$ theilbar und folglich auch eine der Zahlen $a, b, c$.

II. Wir haben allgemein die identische Gleichung

$$(p+q+r)^3+(p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon)^3+(p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon)^3$$
$$= 27pqr+3(p+q+r)(p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon)(p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon)$$

Ist folglich $p+q+r=0$, so wird

$$(p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon)^3+(p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon)^3-27pqr=0$$

Sind hier $p, q, r$ selbst Cuben, nemlich resp. $=a^3, b^3, c^3$; d. i. existirt eine Auflösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3=0$, so wird

$$\begin{aligned} a^3+b^3\varepsilon+c^3\varepsilon\varepsilon &= a' \\ a^3+b^3\varepsilon\varepsilon+c^3\varepsilon &= b' \\ -3abc &= c' \end{aligned}$$

gesetzt, auch $a'^3+b'^3+c'^3=0$ werden. Aus dieser neuen Auflösung kann man auf gleiche Weise eine dritte ableiten u. s. w. Man überzeugt sich leicht, dass wenn die erste Auflösung in reellen Zahlen ist, auch die dritte eine solche sein wird.

Es ist noch zu bemerken, dass wenn $a, b, c$ keinen Factor gemein haben, dasselbe auch von $a', b', c'$ gelten wird, den Factor $1-\varepsilon$ abgerechnet. Es ist nemlich

$$\begin{aligned} \frac{a'}{1-\varepsilon} &= -\varepsilon\varepsilon a^3+\varepsilon b^3 = a^3-\varepsilon c^3 = -b^3+\varepsilon\varepsilon c^3 \\ \frac{b'}{1-\varepsilon} &= a^3-\varepsilon b^3 = -\varepsilon\varepsilon a^3+\varepsilon c^3 = \varepsilon\varepsilon b^3-c^3 \\ \frac{c'}{1-\varepsilon} &= (\varepsilon\varepsilon-1)abc \end{aligned}$$

Die beiden ersten Zahlen haben also weder mit $a$, noch mit $b$, noch mit $c$ einen Factor gemein, können auch nicht durch $1-\varepsilon$ theilbar sein, wenn nicht $a, b, c$

zugleich durch $1-\varepsilon$ theilbar sind: daher haben jene auch keinen Factor mit der dritten gemein.

III. Aber auch der umgekehrte Weg wird offen stehen. Wir haben gesehen, dass eine der Grössen durch $1-\varepsilon$ theilbar ist: dies mag $c$ sein. Da man statt $a$ auch $a\varepsilon$ oder $a\varepsilon\varepsilon$ substituiren kann, und ebenso statt $b$ auch $b\varepsilon$ oder $b\varepsilon\varepsilon$, so dürfen wir voraussetzen, dass $a$ entweder $\equiv 1$ oder $\equiv -1$ sein wird; wir werden das erstere voraussetzen, da im andern Fall $b \equiv 1$ sein würde und nur mit $a$ vertauscht zu werden brauchte. Wir setzen demnach

$$a = 1 + 3\alpha$$
$$b = -1 + 3\beta$$

und

$$\frac{a\varepsilon + b\varepsilon\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon\varepsilon} = 1 + (\varepsilon\varepsilon - \varepsilon)(\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon\varepsilon) = A$$
$$\frac{a\varepsilon\varepsilon + b\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon\varepsilon} = -1 + (\varepsilon\varepsilon - \varepsilon)(\alpha\varepsilon\varepsilon + \beta\varepsilon) = B$$
$$\frac{a + b}{\varepsilon - \varepsilon\varepsilon} = (\varepsilon\varepsilon - \varepsilon)(\alpha + \beta) = C$$

wo $A + B + C = 0$ wird, und $ABC = \frac{a^3 + b^3}{(\varepsilon - \varepsilon\varepsilon)^3} = \pm\left(\frac{c}{\varepsilon\varepsilon - \varepsilon}\right)^3$.

Da hier

$$a = -\varepsilon A + \varepsilon\varepsilon B$$
$$b = \varepsilon\varepsilon A - \varepsilon B$$

so können $A$ und $B$ keinen Factor gemein haben, weil ein solcher sonst auch gemeinschaftlicher Factor von $a$ und $b$ sein würde. Wegen $A + B + C = 0$ kann folglich auch $C$ keinen Factor weder mit $A$ noch mit $B$ gemein haben. Hieraus folgt leicht, dass $A$ und $B$ und mithin auch $C$ Cuben sind. Denn $\left(\frac{c}{\varepsilon\varepsilon - \varepsilon}\right)^3$ wird durch $\varepsilon - \varepsilon\varepsilon$, folglich auch durch $(\varepsilon - \varepsilon\varepsilon)^3$ theilbar sein oder $\alpha + \beta$ durch 3, daher wird $A \equiv 1$, $B \equiv -1$ (mod. 3).

Setzen wir nun

$$A = a'^3$$
$$B = b'^3$$
$$C = c'^3$$

so haben wir aus der Auflösung der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = 0$

$$x = a$$
$$y = b$$
$$z = c$$

eine andere abgeleitet

$$x = a'$$
$$y = b'$$
$$z = c'$$
$$\text{wo } a'^3 b'^3 c'^3 = \frac{c^3}{(\varepsilon\varepsilon - \varepsilon)^3}$$

wo folglich $c'$ den Factor $1-\varepsilon$ einmal weniger enthalten wird, als $c$. Dies ist aber absurd, wenn $c$ nur durch eine bestimmte Potenz von $1-\varepsilon$ theilbar, d. i. wenn $c$ von $0$ verschieden ist. Denn durch Fortsetzung dieser Operationen würde man sonst am Ende auf eine Auflösung kommen, wo $z$ gar nicht durch $1-\varepsilon$ theilbar wäre gegen (I).

---

Einen ähnlichen Weg kann man für die $5^{\text{ten}}$ Potenzen nehmen. Ist nämlich $a^5+b^5+c^5=0$, so setzt man $b+c=\alpha$, $c+a=\beta$, $a+b=\gamma$, so wird

$$0 = (2a)^5+(2b)^5+(2c)^5 = (\beta+\gamma-\alpha)^5+(\gamma+\alpha-\beta)^5+(\alpha+\beta-\gamma)^5$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)^5 - 80\,\alpha\beta\gamma(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)$$

Es kann aber nicht $(\alpha+\beta+\gamma)^5 = 80\,\alpha\beta\gamma(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)$ werden, ohne dass eine der Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sei. Denn wären sie alle nicht theilbar, so müsste sowohl $\alpha+\beta+\gamma$ als $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sein, folglich auch $2(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)+2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) = (2\alpha+\beta)^2+3\beta\beta$, was unmöglich ist.

Man kann dies auch so darstellen. Ist $a^5+b^5+c^5=0$, so wird

$$4(a+b+c)^5 = 5(b+c)(c+a)(a+b)[(a+2b+3c)^2+3(a+c)^2-8(a+b+c)c]$$
$$= 5(b+c)(c+a)(a+b)[(b-c)^2+3(b+c)^2+4(a+b+c)a]$$
$$4(a+b+c)^5+5abc[(b-c)^2+3(b+c)^2] = 5(a+b+c)\{\ldots\}$$

Uebrigens würde der Beweis dem vorigen sehr ähnlich.

Versucht man aber denselben Gang bei den siebenten Potenzen, so gelingt es nicht zu beweisen, dass bei einer gegebenen Auflösung

$$a^7 + b^7 + c^7 = 0$$

nothwendig eine der Grössen $a, b, c$ durch 7 theilbar sein müsse. Es folgt nemlich nur

$$(\alpha+\beta+\gamma)^7 = 5\alpha\beta\gamma\{3(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)+10(\alpha\alpha\beta\beta+\alpha\alpha\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma)\}$$

welches bestehen kann, ohne dass $\alpha, \beta, \gamma$ durch $1-\varepsilon$ theilbar wäre.

Hoffentlich wird sich indessen dies in Zukunft aus der Natur der Determinanten und der Einheitszahlen ableiten lassen.

---

## [II.]

### BESTIMMUNG DER NÄCHSTEN GANZEN ZAHL.

Es sei $\varepsilon^3 = 1, \quad m = a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon$

$$2a - b - c = A + \alpha$$
$$2b - c - a = B + \beta$$
$$2c - a - b = C + \gamma$$

wo $A, B, C$ ganze Zahlen; $\alpha, \beta, \gamma$ positive echte Brüche sind. Man hat dann

$$A + B + C + \alpha + \beta + \gamma = 0$$

also drei Fälle zu unterscheiden:

I. $\alpha + \beta + \gamma = 0$, folglich $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$

1, $A \equiv B \equiv C$ (mod. 3). Hier ist $m$ selbst eine ganze Zahl.
2, $A - B \equiv B - C \equiv C - A \equiv \pm 1$ (mod. 3). Hier ist $m \pm \frac{\varepsilon - \varepsilon\varepsilon}{3} \cdot \varepsilon^n$ eine ganze Zahl.

II. $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Hier ist $A + B\varepsilon + C\varepsilon\varepsilon + 1$
$A + B\varepsilon + C\varepsilon\varepsilon + \varepsilon$
$A + B\varepsilon + C\varepsilon\varepsilon + \varepsilon\varepsilon$

jedes durch $1-\varepsilon$ theilbar, und eine dieser Zahlen durch 3. Der Quotient oder

$$m+\frac{\varepsilon^n-\alpha-\beta\varepsilon-\gamma\varepsilon\varepsilon}{3}$$

die gesuchte ganze Zahl.

III. $\alpha+\beta+\gamma=2$.

Hier sind
$$A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon\varepsilon$$
$$A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon\varepsilon+1$$
$$A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+1+\varepsilon,$$

durch $1-\varepsilon$ und eine dieser Zahlen durch 3 theilbar. Der Quotient, oder

$$m+\frac{\varepsilon^n(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)-\alpha-\beta\varepsilon-\gamma\varepsilon\varepsilon}{3}$$

ist die gesuchte ganze Zahl.

In allen drei Fällen hat der Rest die Form

$$x+y\varepsilon+z\varepsilon\varepsilon\cdot$$

so dass $x, y, z$ ohne Rücksicht auf das Zeichen kleiner als $\frac{2}{3}$ und $x+y+z=0$ wird. Dadurch wird aber nothwendig

$$xx+yy+zz=2xx-2yz=2yy-2xz=2zz-2xy<\tfrac{8}{9}$$

weil von den drei Grössen $x, y, z$ nothwendig zwei einerlei Zeichen haben. Folglich ist der Determinant des Restes

$$=\tfrac{1}{2}(xx+yy+zz)<\tfrac{4}{9} \qquad \text{Q. E. D.}$$

Die Bestimmung der nächsten ganzen Zahl geschieht *bequemer* auf folgende Art. Es sei vorgegeben $a+b\varepsilon+c\varepsilon\varepsilon=m$, man setze

$$b-a=C+\gamma$$
$$c-b=A+\alpha$$
$$a-c=B+\beta$$

wo $A, B, C$ die nächst kleinern ganzen Zahlen; $\alpha, \beta, \gamma$ positive Brüche sind. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

I. $\alpha+\beta+\gamma=0$, so ist $m$ selbst ganze Zahl

II. $\alpha+\beta+\gamma=1$, so ist die nächste ganze Zahl

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B+(B+C)\varepsilon$ | | wenn $\alpha$ | der grösste Bruch ist. |
| . | $C\varepsilon+(A+C)\varepsilon\varepsilon$ | $\beta$ | |
| $A+B$ | . $+A\varepsilon\varepsilon$ | $\gamma$ | |

III. $\alpha+\beta+\gamma=2$, so ist die nächste ganze Zahl

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B+1+(B+C+2)\varepsilon$ | | wenn $\alpha$ | der kleinste Bruch ist. |
| . | $(C+1)\varepsilon+(A+C+2)\varepsilon\varepsilon$ | $\beta$ | |
| $A+B+2$ | . $+(A+1)\varepsilon\varepsilon$ | $\gamma$ | |

In II, 1 ist der Rest $\beta+(\beta+\gamma)\varepsilon$, dessen Determinant

$$=\beta\beta+\beta\gamma+\gamma\gamma=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}[(\alpha-\beta)(1+3\beta)+(\alpha-\gamma)(1+3\gamma)]$$

*Noch einfacher so:*

Man ordne die Brüche $a-[a]$, $b-[b]$, $c-[c]$ nach ihrer Grösse: so heissen sie der Reihe nach $p, q, r$. Sind alle drei gleich gross, so ist $m$ eine ganze Zahl. Sind sie aber ungleich, so sei $t$ ein beliebiger Bruch zwischen

| | | |
|---|---|---|
| $p$ und $q$, | jenachdem $q-p$ | am grössten ist |
| $q$ und $r$ | $r-q$ | |
| $r$ und $1+p$ | $1+p-r$ | |

Sodann ist

$$[a-t]+[b-t]\varepsilon+[c-t]\varepsilon\varepsilon$$

die nächste ganze Zahl.

[III.]

Es sei $\varepsilon^5 = 1$

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon + d\varepsilon^3 + e\varepsilon^4 = q'$$
$$a + b\varepsilon^{-1} + c\varepsilon^{-2} + d\varepsilon^{-3} + e\varepsilon^{-4} = q''''$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-a)^2 = 2p'$$
$$(a-c)^2 + (b-d)^2 + (c-e)^2 + (d-a)^2 + (e-b)^2 = 2p''$$

$$q'q'''' = -p'\varepsilon - p''\varepsilon\varepsilon - p''\varepsilon^3 - p'\varepsilon^4 = P'$$
$$q''q''' = -p'\varepsilon\varepsilon - p''\varepsilon^4 - p''\varepsilon - p'\varepsilon^3 = P''$$

Determinant $= P'P'' = -p'p' + 3p'p'' - p''p''$

Mensura $= 2p' + 2p'' = 2P' + 2P''$

$$= 5(aa + bb + cc + dd + ee) - (a + b + c + d + e)^2$$

Multiplicando per $1 - \varepsilon$ fit mensura nova $= 8p'$

Höchste Mensur $= 2\left(\frac{\sin 72^0}{\sin 36^0} + \frac{\sin 26^0}{\sin 72^0}\right)\sqrt{D} = 4{,}472\sqrt{D}$

*Modulus* $= 1 - \varepsilon$

$$1 - \varepsilon = x$$
$$\varepsilon = 1 - x$$
$$\varepsilon\varepsilon = 1 - 2x + xx$$
$$\varepsilon^3 = 1 - 3x + 3xx - x^3$$
$$\varepsilon^4 = 1 - 4x + 6xx - 4x^3 + x^4$$
$$= -4 + 6x - 4xx + x^3$$

Also

$$\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} \equiv n \text{ mod. } (1-\varepsilon)$$
$$\varepsilon^n \equiv 1 - nx \text{ mod. } (1-\varepsilon)^2$$
$$\left(\frac{\varepsilon + \varepsilon^4}{\varepsilon\varepsilon + \varepsilon^3}\right)^n \equiv 1 + nxx \text{ mod. } (1-\varepsilon)^3$$

Also eine Zahl, welche $\equiv 1$ mod. $(1-\varepsilon)^3$ kann *nur* dann eine Einzahl sein, wenn sie zugleich $\equiv 1$ (mod. 5).

[IV.]

## EINIGES ÜBER DIE MENSUR DER ZAHLEN.

Es sei $\varepsilon^n = 1$, $n$ Primzahl

$$m = a + a'\varepsilon + a''\varepsilon\varepsilon + a'''\varepsilon^3 + \ldots + a^{(n-1)}\varepsilon^{n-1} = f\varepsilon$$

$$D = f\varepsilon . f\varepsilon\varepsilon . f\varepsilon^3 \ldots f\varepsilon^{n-1}$$

$$f\varepsilon . f\varepsilon^{n-1} = -b'(\varepsilon + \varepsilon^{n-1}) - b''(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}) - b'''(\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3}) \ldots$$

so ist

$$2b' = (a - a')^2 + (a' - a'')^2 + (a'' - a''')^2 + \text{ etc.}$$

$$2b'' = (a - a'')^2 + (a' - a''')^2 + (a'' - a'''')^2 + \text{ etc.}$$

$$\text{etc.}$$

hier sind also $b'$, $b''$, $b'''$.. lauter positive Grössen; sie heissen *Partialmensuren* von $m$, so wie ihre Summe

$$b' + b'' + b''' + \text{ etc.} = n(aa + a'a' + a''a'' + \ldots) - (a + a' + a'' + \text{ etc.})^2$$

die *Generalmensur*. Setzt man

$$f\varepsilon . f\varepsilon^{n-1} = c', \quad f\varepsilon\varepsilon . f\varepsilon^{n-2} = c'' \quad \text{etc.}$$

so ist

$$c' + c'' + c''' + \text{ etc.} + c^{\frac{1}{2}(n-1)} = b' + b'' + b''' + \text{ etc.} + b^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$$c'(\varepsilon + \varepsilon^{n-1}) + c''(\varepsilon\varepsilon + \varepsilon^{n-2}) + c'''(\varepsilon^3 + \varepsilon^{n-3}) + \text{etc.} = 2(b' + b'' + b''' + \text{etc.} + b^{\frac{1}{2}(n-1)}) - nb'$$

$$c'(2 - \varepsilon - \varepsilon^{n-1}) + c''(2 - \varepsilon\varepsilon - \varepsilon^{n-2}) + c'''(2 - \varepsilon^3 - \varepsilon^{n-3}) + \text{ etc.} = nb'$$

$$b' > \tfrac{n-1}{2n}(nD)^{\frac{2}{n-1}}, \quad b' + b'' + b''' + \text{ etc.} > \tfrac{n-1}{2} . D^{\frac{2}{n-1}}$$

Ist allgemein

$$f\varepsilon . f\varepsilon^{n-1} = A + A'\varepsilon + A''\varepsilon\varepsilon + A'''\varepsilon^3 + \ldots$$

so ist die Generalmensur $\triangle = -A - A' - A'' - \text{ etc.} + nA$
Mensur von $(1+\varepsilon)f\varepsilon \ldots \triangle' = 4\triangle - 2n(A - A') = 4\triangle - 2nb'$
Ist $a + a' + a'' + \ldots = 0$, so ist $\triangle = n(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})$
und ist $A + A' + A'' + \ldots = 0$, so ist $\triangle \doteq nA$, $\triangle' = n(2A + 2A')$

Ist also einer der Coëfficienten $A'$, $A''$ etc. negativ und absolut grösser als $\frac{1}{2}A$, so lässt sich die Mensur salvo determinante herabbringen.

---

[V.]

Sollte sich bestätigen, dass jede Einheitszahl bloss aus Factoren von der Form

$$\frac{\varepsilon^\alpha - \varepsilon^\beta}{\varepsilon^\gamma - \varepsilon^\delta}$$

zusammengesetzt wäre, so würde folgender Satz bewiesen sein:

*Ist* $f(\varepsilon)$ *eine Einheitszahl, so ist*

$$\frac{f(\varepsilon)}{f(\varepsilon^{-1})} = \varepsilon^n$$

Auch ohne *jenen* Satz *vorauszusetzen*, ist der Schlusssatz leicht zu beweisen. Es sei

$$\frac{f\varepsilon}{f\varepsilon^{-1}} = F\varepsilon$$

so ist

$$F\varepsilon . F\varepsilon^{-1} = 1$$

woraus mit Hülfe der Lehre von der Mensur leicht gefolgert wird, dass

$$F\varepsilon = \pm \varepsilon^n$$

Das untere Zeichen ist aber unmöglich, weil sonst $f\varepsilon$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sein müsste.

Dass der Determinant einer von $0$ verschiedenen Zahl nicht $= 0$ sein könne, lässt sich leicht beweisen. Wenn der Determinant durch $m$ theilbar ist, so ist die Zahl selbst durch $1-\varepsilon$ theilbar; folglich wenn der Determinant durch $m^{m-1}$ theilbar ist, muss die Zahl selbst durch $m$ theilbar sein. Welches absurd ist, da beim Det. $0$ die Zahl erst salvo Det. so oft durch $m$ dividirt werden könnte, bis sie nicht mehr theilbar wäre. Der erste Satz aber erhellt so. Es sei die vorgegebene Zahl

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon + \text{ etc. } \equiv a + b + c \,.\,. \text{ mod. } 1 - \varepsilon$$

also Determinans $\equiv (a + b + c\,.\,.)^{m-1}$ mod. $1-\varepsilon$.

[VI.]

Es sei $\varepsilon^n = 1$

$$f\varepsilon = a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon + d\varepsilon^3 + \text{ etc.}$$
$$m = \text{Determinans dieser Zahl}$$
$$\frac{m}{f\varepsilon} = f\varepsilon\varepsilon . f\varepsilon^3 \ldots f\varepsilon^{n-1} = A + B\varepsilon + C\varepsilon\varepsilon + \text{ etc.} = F\varepsilon$$

Der Zahl $f\varepsilon$ entspricht eine Wurzel der Congruenz $x^n \equiv 1$ (mod. $m$.) Es sei dieselbe $r$. Man hat

$$\begin{aligned} nA &= F1 + F\varepsilon + F\varepsilon\varepsilon + \ldots \\ nB &= F1 + \varepsilon^{-1}F\varepsilon + \varepsilon^{-2}F\varepsilon\varepsilon + \ldots \\ nC &= F1 + \varepsilon^{-2}F\varepsilon + \varepsilon^{-4}F\varepsilon\varepsilon + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

also, da $F\varepsilon\varepsilon$, $F\varepsilon^3$, $F\varepsilon^4$ etc. durch $f\varepsilon$ theilbar sind,

$$\begin{aligned} &nA - F1 - \varepsilon(nB - F1) \\ &nA - F1 - \varepsilon\varepsilon(nC - F1) \\ &nA - F1 - \varepsilon^3(nD - F1) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

alle durch $f\varepsilon$ theilbar, oder auch

$$\begin{aligned} &n(A - B) - \varepsilon n(B - C) \\ &n(B - C) - \varepsilon n(C - D) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

durch $f\varepsilon$ theilbar; folglich [wenn $f\varepsilon$ durch $1 - \varepsilon$, und $F\varepsilon$ durch eine ganze reelle Zahl nicht theilbar ist]

$$\varepsilon \equiv \frac{A-B}{B-C} \equiv \frac{B-C}{C-D} \equiv \frac{C-D}{D-E} \text{ etc. (mod. } f\varepsilon)$$

# BEMERKUNGEN.

Die hier unter der gemeinsamen Ueberschrift, zur Theorie der complexen Zahlen, zusammengestellten Untersuchungen bilden zerstreute Notizen in der Handschrift. Sie enthalten die wesentlichen Momente des Beweises vom FERMATschen Satze für die dritte und fünfte Potenz. Die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen sind in unvollständigen hier nicht abgedruckten Aufzeichnungen sowohl mit Hülfe der Theorie der binären quadratischen Formen, als auch der Kreistheilung untersucht. Bei Gelegenheit der Anwendung der letztern und zwar während der Ausarbeitung der Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* ist noch die ternäre cubische Form aufgestellt, in welche $27 \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$ für eine Primzahl $n \equiv 1 \bmod. 3$ verwandelt werden kann, und zugleich die Theorie der Composition der mit jener verwandten Form $X^3 + mY^3 + mmZ^3 - 3mXYZ$ entwickelt.

Die in den Untersuchungen des Bruchstück [I] vorausgesetzte Eigenschaft der aus dritten Wurzeln der Einheit gebildeten ganzen Zahlen, dass jede nur auf Eine Weise in Primfactoren zerlegt werden kann, ergibt sich aus dem EUCLIDischen Verfahren, die gemeinsamen Theiler zweier Zahlen zu bestimmen, wenn dabei der unter [II] abgeleitete Satz über die nächste ganze Zahl für irgend eine vorgegebene Bruchzahl in Anwendung gebracht wird.

Dass dieselbe Fundamentaleigenschaft auch den aus fünften Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen zukommt, folgt daraus, dass der nach einer ganz analogen Regel wie in [II] gebildete Bruchrest entweder von $m$ oder doch von $m$ multiplicirt in eine geeignete Einheitszahl $E$ so beschaffen ist, dass er durch Subtraction von der vorgegebenen Zahl $mE$ eine ganze Zahl entstehen lässt und dass sein Determinant die Einheit nicht übertrifft. Die Einheitszahlen lassen sich aber, wie in [III] angedeutet, aus der Theorie der binären quadratischen Formen vom Determinant 5 in Verbindung mit der Zerlegung irgend einer reellen Primzahl in vier Factoren (z. B. $11 = \text{Det.}(2 + \varepsilon)$) ableiten, nemlich als Producte der Potenzen von $\varepsilon$ und $1 + \varepsilon$.

SCHERING.

# TAFEL

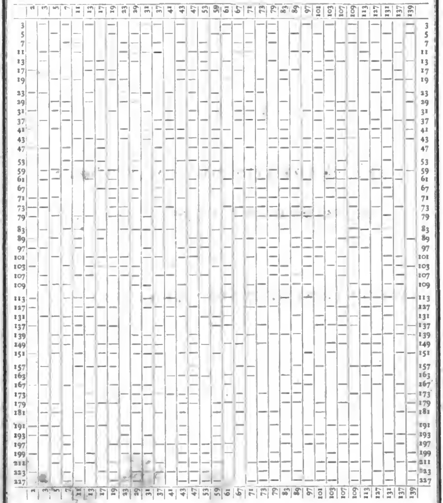
## DES QUADRATISCHEN CHARACTERS

### DER PRIMZAHLEN VON 2 BIS 997 ALS RESTE

IN BEZUG

### AUF DIE PRIMZAHLEN VON 3 BIS 503 ALS THEILER.

NACHLASS.


2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139
3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227

TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)

| |2|3|5|7|11|13|17|19|23|29|31|37|41|43|47|53|59|61|67|71|73|79|83|89|97|101|103|107|109|113|127|131|137|139| |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|229| |—|—| |—| |—|—| | | |—| |—| |—| | | |—| | |—| |—| |—| | | | | | | |229|
|233|—| | |—| |—| |—|—|—|—|—| | | | | | | |—| | | |—| |—| |—|—|—| |—| | |233|
|239|—|—|—| |—| |—| | |—|—| | | | | | |—|—|—| | |—| | |—| | |—|—|—| | | |239|
|241|—|—|—| | | | | | | | | |—| |—|—|—|—|—| | |—|—| |—| | |—| |—| | | | |241|
|251| |—|—|—| |—|—| |—| |—| |—| | | | | | | |—|—|—|—| |—|—| | |—| |—| | |251|
|257|—| | | |—|—|—| |—|—|—| | | | | |—|—|—| |—|—| |—| | | | | |—| | |—|—|257|
|263|—|—| | |—|—|—| |—| |—|—| |—| | | |—| | | | |—|—| | |—| |—| | | |—| |263|
|269| | |—| |—|—| | |—| | |—|—|—|—|—| |—|—| |—|—| |—|—| |—| | | |—|—| | |269|
|271|—| |—|—|—| |—| | | |—| |—| | |—| |—|—| | |—|—|—| | |—| | | | | | |—|271|
|277| |—| |—| |—| |—|—|—| | | | | | |—| |—|—| |—|—|—| | | | | |—| |—| | |277|
|281|—| |—|—| | |—| | |—|—| | |—| |—|—| | | | |—| | | |—| | |—| | | |—| |281|
|283| | | |—|—|—| | |—|—| | |—| | | |—|—| |—|—| |—|—|—|—|—| | |—| | |—| |283|
|293| | | | | | |—| | | |—|—| |—| |—|—|—|—|—|—| |—| |—| | |—|—| | | |—| |293|
|307| | | |—|—| |—|—| | | |—|—| | |—| | | |—| |—|—|—|—|—|—|—|—|—|—| | | |307|
|311|—|—|—|—| |—| | | | | | | | |—|—| | |—| |—|—|—|—| | | |—|—|—|—| |—|—|311|
|313|—|—| | |—|—| |—| |—| | | | | | | | | |—| |—|—| |—| |—|—| |—| | | |—|313|
|317| | | |—|—| | | |—| |—|—| |—| |—|—|—|—| |—|—|—|—| |—|—| | |—| |—| | |317|
|331| | |—| | | |—|—| | |—| | |—| |—| | |—|—| |—|—|—| | |—| |—|—|—|—| |—|331|
|337|—|—| |—| |—| | | | | |—|—|—|—| | | | | | |—| | | | |—|—| |—| |—|—| |337|
|347| |—| | |—|—| | | |—|—| | |—| |—|—|—|—|—|—| |—|—| | | |—|—|—|—|—|—| |347|
|349| |—|—| | | |—|—|—|—|—|—|—| | | | | |—| |—| |—| | | | | |—| | | | |—|349|
|353|—| | | |—| |—|—|—|—| | |—|—|—| | |—| | |—| |—| |—| | | |—|—|—|—| | |353|
|359|—|—|—| |—| |—| |—| | |—|—| |—| | | | | |—|—| | | |—| |—| | |—|—| | |359|
|367|—| | |—| |—| | |—| |—|—|—| |—|—|—|—|—| |—| |—|—| |—| |—| |—| | |—| |367|
|373| |—| |—| |—|—| | |—|—|—|—| | | |—| | |—|—| |—|—| |—|—|—|—| | | |—| |373|
|379| | |—| | | | |—|—| | |—|—| | | | |—|—| | |—|—| |—|—|—|—| | |—| |—|—|379|
|383|—|—| |—| | |—|—|—|—|—| | |—| | | | |—|—|—| | | | |—|—| | |—| | |—|—|383|
|389| | |—|—|—| |—|—| | | | |—| | | |—| |—| |—|—| | |—| | | | |—|—| |—| |389|
|397| |—| | |—| | |—|—|—|—|—| |—|—| | | |—| |—|—|—| |—| | |—| | |—|—|—| |397|
|401|—| |—|—|—| | | |—| | | |—|—|—| | | | | |—| |—|—| | |—| |—|—| | | | |401|
|409|—|—|—| | | |—| |—| | | |—| | |—| | | |—| | |—|—| |—|—| | | | |—|—|—|409|
|419| |—|—|—| | | | |—| | |—|—|—|—| |—| | | |—|—| | |—| | |—| | | |—|—|—|419|
|421| |—|—|—|—| |—| | | |—| | | | | | | |—| | |—| | | |—|—|—|—|—| |—| |—|421|
|431|—|—|—| |—| | |—|—|—| | |—| | |—|—|—| | | | | | |—| | | |—| | | | |—|431|
|433|—|—| | |—|—|—| | | | |—|—| | |—|—| | | | |—| | | | | | |—| |—| |—|—|433|
|439|—| |—|—|—|—| |—| |—| | | | | |—| |—| |—|—| |—| | | |—| |—|—|—| |—|—|439|
|443| |—| | | |—|—| | | | |—|—| |—| |—|—|—|—| |—| |—| | |—|—|—|—| |—|—|—|443|
|449|—| |—|—|—| | | |—| | | |—| | |—|—|—|—| | | | |—|—|—| | | | |—| |—| |449|
|457|—|—| |—| | |—|—| |—| | | | |—| | | |—| |—|—| | | | | |—|—| |—|—| | |457|
|461| | |—| | | |—|—| | | | |—|—| |—|—|—|—| |—| | |—| | |—|—|—|—| | |—|—|461|
|463|—| | | | | |—| | |—|—| | |—|—| | |—|—| |—|—| |—|—| |—| |—|—| |—| | |463|
|467| |—| | | |—|—| |—| | | |—|—|—|—|—| | |—| | |—|—|—| | | |—|—|—| |—|—|467|
|479|—|—|—|—|—| | | |—| | | | | | | | |—| |—|—| | |—|—| |—|—|—| | |—|—|—|479|
|487|—| | | | | | |—| |—|—| |—| | |—| |—|—|—|—| |—|—|—| |—|—| | |—| |—|—|487|
|491| |—|—| |—|—|—| | | |—|—|—|—| | | |—| |—|—|—|—| | |—| |—| | |—|—| |—|491|
|499| | |—| | | | | | |—|—| | |—|—| | | |—| |—| | | | |—|—|—|—| |—|—| |—|499|
|503|—|—| |—|—|—| | |—| | | | |—|—| |—|—|—| |—|—|—| | | | | | |—| |—| | |503|
| |2|3|5|7|11|13|17|19|23|29|31|37|41|43|47|53|59|61|67|71|73|79|83|89|97|101|103|107|109|113|127|131|137|139| |

NACHLASS.

| | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 | 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 | 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | — | — | — | | | | — | | — | | — | — | — | | — | | | — | | | | | — | — | | — | | — | | — | | — | — | 3 |
| 5 | — | — | | | | | — | — | — | | | — | — | | | — | | — | — | — | | | — | — | | — | | | | — | | | — | | 5 |
| 7 | — | — | | — | | | — | | — | — | — | | — | | | | — | — | | | | — | | | — | — | | | | | | — | — | — | 7 |
| 11 | | | — | — | | | — | — | — | | | — | | — | | — | | | | — | — | | — | | | | | | | — | — | — | — | | 11 |
| 13 | | | — | | | — | — | — | — | | | — | — | | | — | — | | | — | — | — | — | | — | | — | | | — | — | | | — | 13 |
| 17 | — | — | — | | | | — | | — | | | | | — | | — | | — | | — | — | — | | — | | — | | — | — | | | | — | | 17 |
| 19 | — | | — | — | | | | | — | | — | — | | | | — | — | — | | — | | — | | — | — | | — | | | — | — | | | | 19 |
| 23 | | — | | — | — | — | — | | | — | — | | — | — | | | — | — | | | — | | — | — | — | | | | — | — | | — | — | | 23 |
| 29 | — | — | | | — | — | — | — | | | — | — | | — | — | | — | | | | — | | | | — | — | — | | | | — | | | | 29 |
| 31 | — | | — | — | | — | | | — | — | | | — | | — | | — | | | | — | | | | | — | — | — | — | — | | — | | | 31 |
| 37 | — | — | — | | | — | | — | | | — | | — | — | | — | — | | | | | — | — | — | | | | — | — | | | — | | — | 37 |
| 41 | | | | — | | — | | | | | — | | | — | | | | | — | — | | | — | — | — | | — | | — | | | | | — | 41 |
| 43 | | | | | — | — | | — | | — | — | | | | | — | | — | | — | | | — | — | | — | — | — | — | — | | — | | — | 43 |
| 47 | — | | — | | | — | | | — | | — | | | | | | | — | — | — | | — | — | — | — | | — | | — | | | | — | — | 47 |
| 53 | — | | | — | | | | | | | — | — | — | — | — | — | | | — | | | | — | — | | — | | — | — | — | | — | — | | 53 |
| 59 | | | | — | — | | | — | | — | — | — | | — | | | | — | — | — | — | — | | — | — | — | | — | — | — | | — | — | | 59 |
| 61 | — | | | — | — | | — | | | | — | — | | | | — | | — | — | | — | — | — | — | | | — | — | | | | — | | | 61 |
| 67 | — | — | — | — | — | — | | — | | — | | — | — | — | — | | | | — | | — | — | — | | — | | — | — | — | | | — | | | 67 |
| 71 | | — | — | | — | | — | | — | | | — | | — | | — | — | | | — | | — | | — | — | | | — | | — | — | | | | 71 |
| 73 | — | | | | | — | | — | | | | | — | — | — | | | | | — | — | | — | | | | — | — | | — | | — | | | 73 |
| 79 | | — | | — | — | | — | — | | | | | | — | | | | — | — | | — | — | — | | — | — | — | | | | — | — | | — | 79 |
| 83 | | — | | | — | — | | | — | — | — | — | | | — | — | | | — | | | | | | — | | | — | | | — | — | | | 83 |
| 89 | | | — | | — | — | — | | | | | — | | — | — | | — | | | — | — | — | — | — | — | | — | | — | — | | — | — | | 89 |
| 97 | | — | | — | — | | | | — | — | — | | | | — | — | | | — | | | | — | | | | — | — | — | | — | | | | 97 |
| 101 | | | — | | | | — | — | | — | — | | — | — | — | | — | — | | — | | | | | | — | — | | — | | | — | | | 101 |
| 103 | — | | | — | — | | — | | | | | | | — | | — | | — | | | | | — | | | | | | | — | — | — | | — | 103 |
| 107 | — | — | | — | | | | | | — | — | — | | — | — | | — | — | — | — | | — | | — | | | — | — | | | — | | — | — | 107 |
| 109 | | | — | | | — | | | — | — | — | | — | — | — | | — | — | | | | — | | | | — | | — | — | — | | | — | | 109 |
| 113 | — | | — | — | | — | | | | | | | — | | — | | — | — | — | — | — | | | | — | | — | | — | — | — | — | — | — | 113 |
| 127 | — | | — | — | | | — | | — | | — | — | — | | — | | | | | — | | — | — | — | | | | | | | | | | | 127 |
| 131 | | — | | | — | | — | | — | — | | | — | | | | — | — | | | | — | — | — | — | | — | | — | — | | — | | — | 131 |
| 137 | | — | | | — | — | | — | | — | — | | — | | | | | | | | — | — | | | | — | — | — | | — | — | | | — | 137 |
| 139 | | | | — | — | — | | — | — | — | | | | | | | | — | | — | — | — | | | | | — | | — | | — | | | | 139 |
| 149 | — | | | | | — | — | | — | | | | | | | — | | | | — | | — | — | | | — | | — | — | | | — | — | — | 149 |
| 151 | | — | | | — | — | | | — | — | | | | — | — | — | | — | — | — | | | — | | | | | | — | — | — | | — | | 151 |
| 157 | | | — | | — | — | | | | — | — | — | | | | | — | — | | | — | — | | | — | — | — | | | — | — | — | — | | 157 |
| 163 | | — | | — | — | — | — | | | | — | — | | — | — | | | | | — | | — | | | | — | | | — | | — | | | | 163 |
| 167 | | | — | | — | — | — | — | — | | | — | — | — | | — | — | — | | — | | — | | | | — | — | — | | — | | — | | — | 167 |
| 173 | — | — | — | — | — | — | — | | | | — | | — | | — | — | — | | | — | — | — | — | | | | | | | — | — | — | — | — | 173 |
| 179 | — | — | | | | — | — | | — | — | | — | | | — | | | — | | | | | | | | | | | | | | — | | — | 179 |
| 181 | | | | | — | | | — | | — | — | | | — | — | — | — | | — | — | | — | | | | — | — | | — | | — | — | | — | 181 |
| 191 | — | | | — | | | | | — | — | — | — | — | — | — | | | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | | — | | | | | 191 |
| 193 | | — | — | | | | — | — | — | — | — | — | — | | | — | | — | — | | — | | | | — | | | — | | — | | — | — | — | 193 |
| 197 | | | — | — | | — | | — | — | — | — | | | — | | | — | — | | — | — | | | | | | | — | | — | — | | — | | 197 |
| 199 | | — | — | | | | | | | — | | — | | | — | | | — | | — | — | — | — | — | | | | — | | — | — | | — | | 199 |
| 211 | | — | | — | | — | — | | | — | | — | — | | — | | | | — | | — | — | — | | — | — | | — | — | — | | | — | — | 211 |
| 223 | | | | | | | — | — | | | — | — | — | — | — | | | — | — | — | — | | | | | — | — | | | | | — | | | 223 |
| 227 | | | | | — | — | | — | | | | | | | — | | | — | | | — | — | | — | | | | | | — | | — | — | — | 227 |
| | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 | 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 | 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | |

TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)

| | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 | 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 | 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 229 | — | — | | | — | — | | — | | — | | | | | | — | — | | — | | | | | — | — | | | — | — | — | | | | — | 229 |
| 233 | | | — | | — | — | | — | | | — | | | | | — | — | | — | — | | — | — | — | | | — | — | — | | | | — | — | 233 |
| 239 | | | — | — | | | | | | — | — | | — | | | | | — | — | — | — | — | — | — | | | — | — | — | — | | | | — | 239 |
| 241 | | — | | | | | | — | — | — | | | — | — | | — | — | — | — | — | — | | | — | — | — | | | | | — | | — | — | 241 |
| 251 | — | | | | | — | — | — | | | — | | | | — | | — | | — | — | | | | — | | | | | | — | | — | — | — | 251 |
| 257 | | | — | | | — | | | | — | — | — | — | — | — | | | — | — | | — | | | | | | — | — | — | | | — | | | 257 |
| 263 | — | — | — | | | — | — | — | | | | | | — | | | — | | | | | — | — | — | | — | | | — | — | — | — | — | — | 263 |
| 269 | — | — | | | | — | | | — | | | — | — | | | | — | — | | | | — | — | | | | — | — | — | | — | | — | | 269 |
| 271 | | — | | — | — | | — | | | | | | — | — | | — | — | | — | | | | | — | | — | | — | — | — | | | | | 271 |
| 277 | | | — | | | | | | — | — | | | — | | | — | | | — | | | | | | — | — | | | — | — | — | — | | | 277 |
| 281 | — | | — | — | — | | | — | — | | | | — | — | | | | | — | | | — | | — | — | — | — | | | | — | — | — | — | 281 |
| 283 | | — | — | — | | | — | — | | | | — | — | | — | | — | | | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | | — | | — | 283 |
| 293 | | | | | — | | | | — | — | — | — | — | | | — | — | — | | | — | | — | — | — | | — | — | — | | | — | — | | 293 |
| 307 | — | | | | — | | — | — | — | | | — | | — | — | — | — | | | — | — | | — | | — | | | — | — | — | — | — | — | | 307 |
| 311 | | | — | — | | — | — | | | — | — | | | — | | — | | | | | | | | | — | | | | | — | — | — | — | — | 311 |
| 313 | | — | — | — | | — | | — | | | — | — | | | | | | | — | | | — | — | | — | — | | | — | — | — | — | — | — | 313 |
| 317 | — | | — | | — | — | — | — | | — | | | | — | — | | | | | — | — | — | | | — | — | — | — | — | — | — | — | | | 317 |
| 331 | — | | — | — | — | — | — | | — | — | — | | | — | | | — | — | — | | | | — | — | | — | — | — | | | — | | — | — | 331 |
| 337 | — | | | | — | — | — | — | | — | | | — | | — | | — | — | — | — | | — | | | | — | — | | | — | — | | — | — | 337 |
| 347 | — | | — | | — | — | | — | | | — | — | | | | — | | | — | — | | — | — | — | — | — | | — | | | | | | | 347 |
| 349 | | — | — | | | | | — | — | | | | | — | — | | — | — | — | | — | — | — | — | | — | — | — | — | | — | | | — | 349 |
| 353 | | | — | | — | | | — | — | | — | | | — | | | — | | | | | | — | — | — | — | — | — | — | — | | — | — | — | 353 |
| 359 | — | — | | | | — | | — | — | — | | | | | | — | — | | — | | | | | | | — | — | | — | | | — | — | | 359 |
| 367 | — | — | | | | — | | — | — | | | — | — | | — | — | | | | — | | | | — | — | — | — | | | | — | | | | 367 |
| 373 | | | | — | | | — | — | | | | | | | | — | | — | | — | — | | | | | | — | | — | | | | | — | 373 |
| 379 | — | — | | | — | — | — | | — | — | — | | — | | — | | | — | | — | — | — | | — | — | — | | | — | — | — | | — | — | 379 |
| 383 | — | | | | | — | | | | — | — | | | — | — | — | | | | — | | — | | | — | | | — | | | — | — | — | | 383 |
| 389 | | | — | | | — | — | — | | — | | | — | — | | | | — | | | | | — | | — | | — | — | | — | — | | — | — | 389 |
| 397 | | — | | — | — | — | — | | — | | | | | | | — | | | | | — | | | — | — | — | | — | — | | | | | | 397 |
| 401 | — | — | | | | — | — | — | | | — | | | — | | — | | — | — | | — | — | | | | | | | — | — | — | | — | — | 401 |
| 409 | | | | — | — | | — | | — | — | — | | | | — | — | | — | | | | | | — | | — | | | — | — | — | — | | — | 409 |
| 419 | — | — | — | | | — | | | — | | — | — | | | | | | | | — | — | | — | | | — | | — | | | | | | — | 419 |
| 421 | — | | | | — | | | — | — | | | — | | | | — | | — | — | | | | — | | — | — | — | | — | | — | — | | — | 421 |
| 431 | — | — | — | — | | — | — | | | | — | | | — | — | — | | | | | | — | | | — | | — | | — | | | | | — | 431 |
| 433 | | | | | — | | — | | — | | — | — | — | — | | — | — | | — | | — | | — | — | — | | — | — | | | | | — | — | 433 |
| 439 | | | | | — | | | | — | | | — | — | — | | — | | | | — | | | — | — | | — | — | | — | | | | — | | 439 |
| 443 | — | — | | — | — | | | — | — | | — | | | | — | — | — | | | | | — | | — | | — | | — | — | — | | | — | | 443 |
| 449 | | | | | — | | | — | — | — | — | — | | | — | — | | | | — | | — | — | — | | | | — | | | | | — | — | 449 |
| 457 | | — | — | — | | | | | — | | — | | | | — | — | — | — | — | | — | | | | | | — | | — | — | — | | — | | 457 |
| 461 | | — | — | — | — | | | — | | — | | — | | — | — | — | | | | | | — | | | | — | | | | — | | — | — | | 461 |
| 463 | — | | | — | — | — | — | — | | | | | — | | | — | | — | | — | | | | — | — | | — | — | | — | — | | | — | 463 |
| 467 | — | — | — | — | | — | — | | | — | | — | | — | — | — | — | — | — | — | | | | | — | | — | | | | | — | — | | 467 |
| 479 | | — | | — | — | — | | — | | — | — | | — | | | | — | | — | — | — | | | — | — | | | — | — | | — | | — | | 479 |
| 487 | | | — | | — | | | — | — | — | — | | | | | | | | — | — | | — | — | — | — | | | | — | — | | | | — | 487 |
| 491 | | | | — | | | — | — | | | — | — | | — | — | — | — | — | | | — | — | — | | — | | | — | | | | | — | | 491 |
| 499 | | — | | | — | | | — | | | — | — | — | | — | | — | — | | — | — | — | | | — | — | | — | — | | | — | — | — | 499 |
| 503 | | | | | | — | | | | | — | — | | — | | — | — | | | | — | — | | — | | — | — | | | | | — | | | 503 |
| | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 | 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 | 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | |

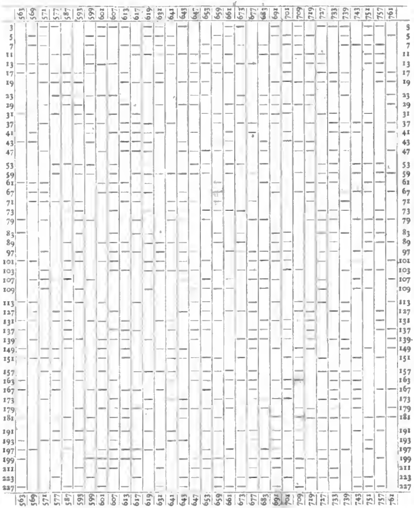
NACHLASS.

| | 347 | 349 | 353 | 359 | 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 | 409 | 419 | 421 | 431 | 433 | 439 | 443 | 449 | 457 | 461 | 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 | 509 | 521 | 523 | 541 | 547 | 557 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | — | | | — | — | — | | | — | | — | | — | | — | — | | | — | | — | | | — | | — | | | | — | — | — | |
| 5 | | — | | — | | | — | | — | | — | — | — | — | — | | — | | — | | — | | | — | | — | — | | — | — | | — | | |
| 7 | — | | | — | | — | — | | — | | — | | | — | — | | | — | — | — | | — | | | — | — | — | | | | | — | — | — |
| 11 | | | — | | — | | — | — | — | — | — | | — | — | | — | | — | — | | | — | — | | — | | — | | — | — | | | | |
| 13 | — | | | | — | — | | | — | | | | — | | | — | — | — | | | | | — | | | — | | — | | — | — | | — | |
| 17 | | — | — | — | | — | | — | — | | | — | | — | | — | | — | | — | — | — | — | | | — | | | — | | — | | | — |
| 19 | — | — | — | — | — | | | | — | — | | | — | | | | | — | | — | — | — | — | — | | — | — | — | | | | — | | — |
| 23 | — | — | — | | | | | | | — | | — | | | | | — | — | — | | — | — | | | — | — | — | | — | | | — | — | |
| 29 | — | — | — | | | — | | — | | — | — | | — | | — | | — | | | — | | — | | | — | | — | | — | — | — | | — | — |
| 31 | | — | | — | | — | — | | | — | | | — | — | — | | — | — | | | | | — | — | | | | — | | — | | — | — | |
| 37 | | — | | — | — | — | — | | | — | | | — | | | — | | — | | | | | | | | — | | | — | — | | | | |
| 41 | | — | — | — | — | — | — | | — | | — | — | — | | — | — | | — | — | | — | | — | | — | — | | | | | — | — | | |
| 43 | | | — | — | — | | — | | | — | — | | | | — | | — | — | | | — | | | — | — | | | | — | | | — | — | — |
| 47 | — | | — | | | | — | — | | — | — | | | | — | | — | | | — | | | | — | — | — | | | | — | — | — | | |
| 53 | — | | | | — | | | | | | | — | | | — | — | — | | — | | — | | — | | — | | | | | — | — | — | — | |
| 59 | | | | — | | — | — | — | — | | | | | | | — | — | | — | | — | | | — | — | — | — | | | — | — | | — | — |
| 61 | — | | — | | — | | — | | | | | | | | — | | — | — | — | | — | — | | — | — | — | | — | | | | | | |
| 67 | | — | | — | | | | | — | — | | | — | — | — | | — | | — | — | — | | — | — | | — | | | — | | — | | | — |
| 71 | | | | — | — | — | — | | | | | — | — | | — | | | | | | | — | | | | | — | — | — | — | | | — | — |
| 73 | — | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | | — | | | | — | | | — | — | — | | — | — | | — | — | — | | — | | — | — |
| 79 | — | | | | — | | | — | — | — | | | | — | — | — | — | | | — | | | — | — | — | | — | | | | — | — | — | — |
| 83 | | — | — | — | | — | | — | | — | — | — | — | | — | | | — | | | | — | | — | | | — | | — | — | — | | — | — |
| 89 | — | | | | — | — | | | | | — | — | | | | | | — | — | | — | — | — | — | — | | | | — | | — | | | |
| 97 | | | — | | | | — | | — | — | | | — | — | — | | | | — | | — | — | — | — | — | — | | — | — | — | | | — | — |
| 101 | | | | — | | — | — | — | | — | | — | | — | | | | | — | | | | | | | — | — | | — | — | | — | | — |
| 103 | — | | | — | — | — | | | | | — | — | — | — | — | | | | | | — | | — | | | — | | — | — | | — | — | — | |
| 107 | | | | | | — | | — | | — | | | | — | — | | — | | | — | — | — | — | | | | | — | — | | | | — | |
| 109 | — | — | — | | | — | | | | | — | — | | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | | | — | | — | | — | — | | — |
| 113 | — | | — | | — | | | — | — | | — | | | — | | | — | — | | | — | — | — | | | | | — | — | — | | | — | — |
| 127 | | | — | | — | | | — | — | — | | | — | | — | — | | — | — | — | | — | | — | | | | — | — | — | — | | | — |
| 131 | | | — | | — | | — | — | | — | | — | | — | — | | — | | | — | | | — | | — | | | | | | | | | — |
| 137 | — | | | | — | — | — | — | — | — | | — | — | | | — | — | — | — | | | | — | — | — | | — | | — | | — | — | — | — |
| 139 | — | — | | — | — | | | | | | | — | | — | | — | | | | | — | — | | | | | | — | | | — | — | | — |
| 149 | — | | | — | | — | — | — | | — | | | — | — | — | | | — | | | | — | — | | | | | | | | — | | — | — |
| 151 | — | — | | | | | | — | | — | — | | | | | | — | | | — | — | — | | | — | — | | — | | — | | — | — | |
| 157 | — | — | — | | | | | | — | | | — | | | — | | | | | — | — | | — | | — | | | | | | — | | — | — |
| 163 | — | | | — | — | — | — | — | | — | | — | — | — | | | — | | | — | — | | | | — | | — | — | | | — | | — | |
| 167 | | | — | — | — | | | — | | — | | — | — | — | — | — | | | — | | — | | — | | | — | | — | — | | — | | | — |
| 173 | — | | | — | — | | — | — | — | — | — | | — | | — | | | | | | | — | — | — | | | | — | — | | — | — | | — |
| 179 | — | | | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | | | — | — | — | | | | | | — | — | | — | — | — | | | — | | — |
| 181 | — | — | — | — | — | — | | | — | | — | | | — | | | | — | — | | — | — | | — | — | — | — | | — | | — | | — | — |
| 191 | — | — | — | | | | | — | | — | | — | | — | — | — | | | — | — | — | — | — | — | | — | — | — | | | | | | |
| 193 | | | | — | | | — | — | — | | | — | | | | | | | — | | — | | — | — | — | | | | | | — | | — | |
| 197 | — | | — | | | | — | | | | — | — | — | | — | — | | — | — | — | | | | — | — | — | — | — | | — | | | | — |
| 199 | | | | — | | | — | — | | | | | | — | — | — | | — | — | | — | — | | — | — | | | | — | — | — | | | |
| 211 | — | | | — | | — | | — | — | | | — | — | | — | — | | — | | | | | — | | — | — | | — | — | — | — | — | — | |
| 223 | — | — | — | — | — | | — | | — | | — | | — | | | — | | — | | | — | — | | — | — | | — | | — | | | | — | |
| 227 | — | — | | — | | | | | | | | — | — | | | | — | | — | — | — | — | | — | — | | | — | | | — | — | | — |

TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)

| | 347 | 349 | 353 | 359 | 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 | 409 | 419 | 421 | 431 | 433 | 439 | 443 | 449 | 457 | 461 | 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 | 509 | 521 | 523 | 541 | 547 | 557 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 229 | — | | | — | — | — | | — | | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | | | — | | — | — | | | — | | — | 229 |
| 233 | | — | — | — | | | | | | | | | | | | — | | — | | — | | | — | — | | — | — | — | | — | | | — | — | 233 |
| 239 | — | — | | — | — | — | | — | — | | — | — | — | — | — | | — | — | | — | | | | — | — | | | — | — | | — | | | | 239 |
| 241 | — | — | | — | | | | | | | — | | | — | | — | | | | — | | | — | — | — | — | | | — | | — | — | | — | 241 |
| 251 | | | | — | | — | | | | | | | | | — | | | — | — | | | | | | | — | | — | — | | — | — | — | | 251 |
| 257 | | — | | | | — | — | | | — | — | | — | | | — | | | | — | | | | — | | — | — | — | | | — | | | | 257 |
| 263 | | — | | — | — | | | | | | — | | — | | | | — | | — | | — | — | — | — | | | | | | — | | | | — | 263 |
| 269 | — | — | — | | | | | | — | | | | | — | | — | — | | — | — | | | | | — | — | | | | | | | — | | 269 |
| 271 | | — | — | — | | | | — | | — | | — | — | | — | — | | | — | | | | — | | | — | — | | — | — | — | | — | | 271 |
| 277 | — | | — | | — | | — | — | — | — | | | | — | — | — | | | | | | | — | — | — | — | — | | | | | — | — | — | 277 |
| 281 | — | — | — | — | — | | — | | | — | | — | — | — | | | — | — | | | — | | | | | | — | — | — | | — | | | — | 281 |
| 283 | — | — | — | | | — | — | — | — | | | | — | — | | — | | — | | — | | | | — | — | — | — | | | | | | — | | 283 |
| 293 | — | — | — | | | | | — | — | — | | | — | | | — | | — | — | | | — | | — | | — | — | — | — | — | | | — | | 293 |
| 307 | — | — | — | | — | — | | — | | — | — | — | — | — | | | | | | — | | — | — | | | — | | — | | | — | — | — | — | 307 |
| 311 | — | | — | — | — | | | — | — | | — | — | — | | — | | — | | | — | — | | — | — | | — | — | — | | — | — | | | | 311 |
| 313 | | — | | | — | | — | — | — | | — | — | | — | | | | | | — | | — | | — | — | | | | — | — | — | — | — | | 313 |
| 317 | | | — | — | | | | — | | | | — | | — | | | | | | | — | | — | | | | — | — | | — | | | — | — | 317 |
| 331 | — | | — | | — | | | | — | | — | | — | | — | — | | | — | — | — | — | | | — | | | — | | | | | — | | 331 |
| 337 | | — | — | | | — | — | | — | | — | — | — | — | — | — | | | — | | | — | | | — | | — | | — | | | | | — | 337 |
| 347 | — | | | — | | | | — | — | | | | | — | | | | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | | | — | — | | | 347 |
| 349 | | — | — | | | | | | | — | | — | — | | | | | — | — | — | | | — | — | | — | | | | | | — | — | | 349 |
| 353 | | — | — | | | | | — | — | — | | | | — | — | | — | | | | | | | | | | — | | — | — | | — | — | | 353 |
| 359 | | | | — | — | | — | — | — | | | — | — | | — | — | — | | — | — | — | | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | 359 |
| 367 | — | | | | — | | | — | | — | | | — | | — | — | — | | — | | — | | — | — | — | — | — | | | | | — | | — | 367 |
| 373 | | | | | | — | | — | — | | — | — | — | — | | | — | — | | — | — | — | — | — | — | | | — | | — | | | | — | 373 |
| 379 | — | | | | — | | — | — | | | — | — | | | | — | | — | — | | | — | — | — | | | — | | — | — | — | | | — | 379 |
| 383 | | | — | | | — | | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | | | | | | — | — | | — | — | | — | — | | | | — | 383 |
| 389 | — | | — | — | | — | | | — | | | — | — | | — | — | | — | | — | | — | — | | | — | | — | — | | | | | — | 389 |
| 397 | | — | — | | — | | | — | | — | — | — | | | — | — | — | | | | — | | | — | — | | — | — | | — | — | — | | — | 397 |
| 401 | | | | | | — | — | — | | — | — | — | — | — | | — | | | | — | | | | — | — | — | — | — | | | | — | — | — | 401 |
| 409 | | — | | — | | — | — | | — | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | | — | | | | — | — | | — | | | | — | | 409 |
| 419 | — | — | | | | — | — | | — | | — | — | — | | — | | — | | | — | | | — | — | | | — | — | | — | | — | | | 419 |
| 421 | — | | — | | | — | | | | | — | — | | — | | — | | | — | — | | | — | — | | | — | — | | — | | | | | 421 |
| 431 | — | | — | | | | — | | — | — | | | | | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | | — | | — | | — | — | — | — | | 431 |
| 433 | | | | — | — | | — | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | | — | — | | | — | | — | | — | — | | — | | — | | | 433 |
| 439 | — | | — | | | — | — | | | — | | — | | | | — | — | — | — | — | — | | — | — | | — | | — | — | | | — | | | 439 |
| 443 | — | — | | — | — | — | | — | — | | | — | — | | | | | — | | — | | | | — | | — | — | | — | | | | | — | 443 |
| 449 | — | — | | — | — | | — | | | | | — | | — | — | — | — | | — | — | | — | — | | | | — | | | — | | — | — | | 449 |
| 457 | — | — | | — | | — | | | — | | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | | | | — | — | | | — | | — | | — | 457 |
| 461 | — | | | — | — | — | | | | — | | | | | — | | — | | | — | — | | — | | — | — | | | | | — | — | | — | 461 |
| 463 | | | | — | — | — | | — | — | | | — | — | | | | — | — | — | — | | — | — | — | | | — | | | | — | — | — | — | 463 |
| 467 | | — | | | | — | | | — | | | | | — | | — | | — | — | | — | | — | — | | | | — | | | | — | | — | 467 |
| 479 | | — | | | | — | | | | — | — | | | — | | | | | | | | | | — | — | — | — | — | — | — | — | | | | 479 |
| 487 | | | | | | — | — | — | | — | — | | — | | — | — | — | — | | | — | — | — | | — | — | | — | | | — | | — | — | 487 |
| 491 | | — | | | | | — | | — | | — | — | — | | | | | | | — | — | — | — | | | — | | — | | | | | — | | 491 |
| 499 | | | — | — | | | | | | — | — | — | | — | — | — | — | | — | — | | | — | | — | — | — | — | | — | — | | | | 499 |
| 503 | | | | | — | — | — | — | — | — | — | | | — | | — | | — | | | | — | | | | | | — | — | — | | | — | — | 503 |
| | 347 | 349 | 353 | 359 | 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 | 409 | 419 | 421 | 431 | 433 | 439 | 443 | 449 | 457 | 461 | 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 | 509 | 521 | 523 | 541 | 547 | 557 | |

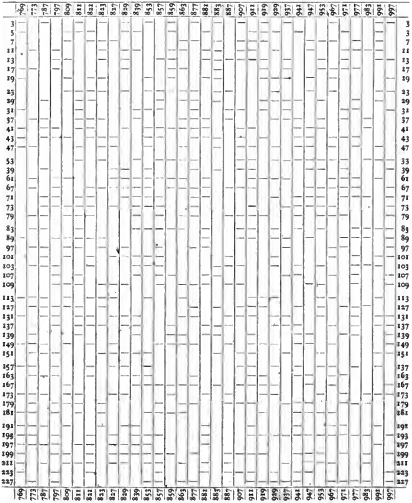
NACHLASS.



TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)

| | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 | 599 | 601 | 607 | 613 | 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 | 659 | 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 | 727 | 733 | 739 | 743 | 751 | 757 | 761 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 229 | | — | | | — | — | | | — | | — | — | — | — | — | | | | — | — | | — | — | — | | | | — | | — | — | — | | 229 |
| 233 | | | — | | — | | — | — | — | | | | | — | — | — | — | | — | | | | | — | | | — | | | | — | — | — | 233 |
| 239 | | | — | | — | | — | | | — | | | — | — | — | | | | | | | | — | | | — | — | — | — | | — | — | — | 239 |
| 241 | — | — | | | | | | — | — | | — | | | — | — | | | | | — | | — | — | | | — | | — | — | — | | | | 241 |
| 251 | | — | | | | | | | — | | — | — | | | | | | | | | — | | — | | — | — | — | | — | — | — | — | | 251 |
| 257 | — | | — | | — | — | | | | — | | | — | | — | — | — | | | — | | — | | — | — | — | — | | — | | | | | 257 |
| 263 | — | — | | — | — | | | — | — | | | — | — | | — | — | | — | | — | — | — | | | — | | | — | | | — | | — | 263 |
| 269 | — | | | | — | — | — | | | | — | — | — | — | — | | — | — | | | | | | | | | — | | | | — | | | 269 |
| 271 | | | | — | — | | — | | | | | — | — | — | | | | | — | | | — | | | — | — | — | | | | | | — | 271 |
| 277 | — | | | — | | — | | — | | — | — | | | — | — | | | | | | — | | | — | — | — | | | — | — | | — | — | 277 |
| 281 | — | — | — | | — | — | | — | — | | | — | — | — | — | — | | | | — | | — | | | | — | — | | | — | | — | | 281 |
| 283 | — | | | — | | | | | — | | | | | | — | — | | — | — | | — | — | | — | — | | — | | | | — | | — | 283 |
| 293 | — | — | — | — | — | | | — | — | | — | — | | — | — | — | — | — | | — | — | — | | — | — | — | — | | — | | | | | 293 |
| 307 | | | | | — | | | — | | | | | — | | | | — | | | | | | | — | | — | | | | | | | | 307 |
| 311 | — | | — | | | — | — | | | | | | — | | — | — | | | — | | | | | — | | | — | | — | — | | — | — | 311 |
| 313 | | — | | — | — | | — | — | — | — | — | | | | | | — | — | — | | | — | | — | — | | | — | — | — | | | | 313 |
| 317 | | — | — | — | | | | | | | | — | | — | — | | | — | | | — | — | — | — | | — | | — | — | | | | | 317 |
| 331 | — | — | | | — | | — | | — | | | | | | | | | — | | | | — | | — | | | | — | | — | — | — | | 331 |
| 337 | — | | — | | | — | — | | | | | — | — | | | | — | | — | — | — | — | | — | | | | | | | | | | 337 |
| 347 | | — | — | | | — | | | | | — | | — | | — | — | — | | | — | — | | | | | — | — | — | | — | | | — | 347 |
| 349 | — | | | — | — | | | | | — | — | | — | — | | — | — | | — | — | | — | | — | | | — | | — | — | | | | 349 |
| 353 | | | — | | | — | | | — | — | | | | — | | | | — | | | — | — | — | | | | — | | | | | | | 353 |
| 359 | — | | | | | | — | — | | — | | | — | — | | — | — | — | — | | | — | | | | — | | — | | — | — | | | 359 |
| 367 | — | — | — | — | — | — | | — | — | | | — | — | — | | | | — | | | | | — | | | | | | | — | | — | | 367 |
| 373 | | — | — | — | | — | — | | | | | | — | | — | | — | — | | — | | — | — | | — | — | | — | — | — | | | | 373 |
| 379 | | | | — | | | | — | | — | | | | — | | — | | — | | — | | | | — | | | — | | | — | | | | 379 |
| 383 | | — | | | — | | — | | — | | | | — | — | — | | | — | — | | — | | | | | — | — | — | | | | | — | 383 |
| 389 | | — | | | | | — | | — | | | — | | — | | | — | — | — | | | — | — | — | — | — | | — | | — | | | | 389 |
| 397 | | — | | | — | — | — | | | | | | — | | — | — | — | | | — | | — | | — | — | — | — | | | | — | — | — | 397 |
| 401 | — | | | — | — | | — | — | — | | | — | | | — | | — | | | | — | | — | | — | — | | — | — | | — | — | — | 401 |
| 409 | — | — | | | — | — | | — | | — | | | | | | | | — | | | | — | | | — | | — | | | — | | | | 409 |
| 419 | | | | | | | — | | — | | — | | | | | | | | | — | | — | | | | — | | | — | — | | | — | 419 |
| 421 | — | | | | — | | — | — | | — | — | | | — | | — | — | | — | — | — | | | | | | | — | — | — | | — | — | 421 |
| 431 | — | — | | | | — | | | — | — | | | — | | — | — | | — | — | — | — | | | — | — | — | | — | | | — | — | — | 431 |
| 433 | | — | | — | | | | | | | | | — | — | — | | | | | | | | | | | — | — | — | — | — | — | — | — | 433 |
| 439 | | — | | — | | — | — | — | | | | — | | | — | — | | — | — | — | | — | — | | | — | — | | | — | | | | 439 |
| 443 | | — | | | — | | — | | — | — | — | | — | — | | — | | | | | | | — | — | | | — | | | — | — | — | — | 443 |
| 449 | — | | — | — | | — | | | | — | | | | | — | — | — | | — | — | — | | — | — | | | | | | | | — | — | 449 |
| 457 | | — | — | | — | — | | — | — | | | — | — | | | | — | | — | — | — | | | | — | — | | | — | — | — | — | — | 457 |
| 461 | — | | — | | — | — | — | | | | — | — | | — | | | | — | | — | — | | | | — | — | — | — | | | — | — | | 461 |
| 463 | — | | | — | — | — | — | — | | | — | — | — | — | | | — | — | | | | | — | | — | — | — | — | — | — | — | | — | 463 |
| 467 | | | | | — | | | — | | — | | — | — | — | | | — | — | | — | — | | | | | — | | — | | — | — | | | 467 |
| 479 | — | — | — | — | — | | — | — | — | | — | — | | — | | — | | — | | — | — | | | | — | — | | | | — | | — | | 479 |
| 487 | | — | — | | — | — | | | — | | — | — | — | — | — | | — | | | | | — | — | — | — | — | | | | — | — | — | — | 487 |
| 491 | | | | | | | — | | | | | | | | — | — | | — | | — | | — | | — | — | | | | | | — | | | 491 |
| 499 | — | | | | — | | | | | | | | — | — | — | | | | | | — | — | | | | | — | — | | | | — | | 499 |
| 503 | | — | | | — | | — | — | — | | | | — | — | | — | — | — | — | — | | | — | — | | — | — | | — | | | | — | 503 |
| | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 | 599 | 601 | 607 | 613 | 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 | 659 | 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 | 727 | 733 | 739 | 743 | 751 | 757 | 761 | |

NACHLASS.



769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997
3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227

TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)

| | 769 | 773 | 787 | 797 | 809 | 811 | 821 | 823 | 827 | 829 | 839 | 853 | 857 | 859 | 863 | 877 | 881 | 883 | 887 | 907 | 911 | 919 | 929 | 937 | 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 997 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 229 | — | | — | | | | — | | | | | | | — | — | | | — | | — | — | — | | | — | | — | — | — | — | | — | — | 229 |
| 233 | | — | | — | — | — | | — | — | | | | | | | — | — | — | | — | | — | | | — | — | | | | | — | | | 233 |
| 239 | | | | — | | | | | — | | — | — | | — | | — | | — | — | | | — | | — | | | | — | — | | — | | | 239 |
| 241 | | — | — | | | | — | — | | — | — | | — | | | — | — | — | — | | — | — | | — | | | | — | | | | — | | 241 |
| 251 | — | — | | | | — | — | | — | | — | — | | — | — | — | | | | — | | | | | | — | | — | — | | | | | 251 |
| 257 | — | — | — | — | | | — | — | | — | — | | | — | — | | | | — | — | — | | — | | | — | | — | — | | | | — | 257 |
| 263 | — | | | — | | — | — | — | | | — | — | — | — | — | — | — | | — | | — | | — | — | | | | — | | | | | — | 263 |
| 269 | — | — | — | | | — | — | — | — | | | | | — | — | — | | | — | — | | | | | | | | | — | — | — | | — | 269 |
| 271 | | | — | | | | — | — | — | — | | — | — | | — | — | — | — | | | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | | 271 |
| 277 | — | | | — | — | | — | | — | | | — | | — | | | | — | | — | | — | | — | | — | — | — | | — | | — | | 277 |
| 281 | | — | — | | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | | — | | — | — | | — | | — | | | — | — | | — | | | 281 |
| 283 | — | — | | | | | | — | — | — | | — | | — | | — | | — | — | | — | — | | | — | | | | | | — | | | 283 |
| 293 | | | | — | | — | — | — | | | — | — | — | | — | | | — | | | | — | | — | | — | | — | | | — | | | 293 |
| 307 | — | | | — | | | | — | | — | — | | | | | | | | — | — | | — | | — | | — | | — | | | — | — | — | 307 |
| 311 | — | | | — | — | — | | — | | | | | — | — | | | | | — | | — | | | — | — | — | — | | | | — | | — | 311 |
| 313 | — | — | — | — | | — | | — | | | — | | | | — | | — | | — | — | — | | | — | — | — | | | — | — | — | — | — | 313 |
| 317 | — | | | | — | | | | — | | — | | — | — | | | — | | — | — | — | | | | — | — | | — | | — | | — | | 317 |
| 331 | | — | — | | | — | | — | — | — | — | — | — | — | | — | — | | — | | | | | | — | | — | | | | | — | — | 331 |
| 337 | — | | — | — | | — | — | — | | — | — | — | | | — | — | | — | | — | — | | — | — | | — | | | | | — | | — | 337 |
| 347 | — | | — | | — | — | — | — | — | | | — | | | — | — | | | | — | | — | — | — | | | — | | — | | — | — | | 347 |
| 349 | | — | | | — | | — | — | | | | — | | | | | | — | | — | | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | | 349 |
| 353 | | | — | — | | | | | — | | | | | — | — | — | | — | — | — | | — | — | — | | | | — | — | — | — | — | | 353 |
| 359 | — | — | — | — | — | | | | | — | — | — | | — | | — | | — | — | | | | | — | | — | — | | | | | — | | 359 |
| 367 | | | — | — | | | — | — | | — | — | | | | — | | | — | | — | | | — | | — | — | | | — | | | | | 367 |
| 373 | | — | — | — | — | | — | | — | — | — | — | — | | — | — | | — | | | — | | | | | | | — | — | | | | — | 373 |
| 379 | | | | — | — | | | | | | — | — | | — | — | — | | — | — | — | | | — | — | | — | — | | — | — | — | | — | 379 |
| 383 | — | — | — | — | — | | — | — | | — | — | — | | — | | | | — | — | | | — | | — | — | | | — | — | | — | — | | 383 |
| 389 | — | — | — | — | | | | — | — | | | | — | — | — | — | | | | — | — | — | | — | | — | — | | — | | — | — | | 389 |
| 397 | — | | | — | | | — | — | — | — | | | | — | — | — | — | | — | | | | | | — | | | — | | | | | | 397 |
| 401 | | — | | — | — | — | | | — | | | — | — | — | | | | — | | | — | | | | | — | — | | — | — | — | | — | 401 |
| 409 | — | — | | | — | | — | — | — | | | | | — | — | | | | — | — | | — | | | — | | — | | — | — | | | — | 409 |
| 419 | | | — | | | | — | | — | | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | | | | — | — | | — | — | | | 419 |
| 421 | | | — | — | — | — | — | | — | | — | — | — | — | — | — | | | — | | | — | | | — | — | | — | | — | | — | — | 421 |
| 431 | — | — | | — | | — | | — | — | | | | | | — | — | — | | — | — | — | — | | — | | | — | | — | — | — | | — | 431 |
| 433 | | — | | | | | | | — | — | — | — | — | | — | — | | — | | — | | — | | | — | — | | — | — | — | — | | | 433 |
| 439 | | — | | | | — | — | | | | — | | — | | — | | | — | — | — | | | — | | — | — | | | — | — | | — | | 439 |
| 443 | | | — | | | | — | — | | — | | — | — | | — | | — | | — | | — | | | — | — | — | — | — | | | | — | — | 443 |
| 449 | — | — | — | — | — | — | — | | | | — | — | — | — | — | | | | — | — | | | | — | — | — | — | | | | | — | — | 449 |
| 457 | | — | — | | | | | | — | | — | | — | — | — | | | | — | — | — | | | | — | | | | — | — | | | | 457 |
| 461 | — | | | — | — | — | | | — | — | | | | | — | — | — | — | | | | | | | — | — | | — | — | | — | | | 461 |
| 463 | — | | — | — | — | | — | | — | | — | | | | — | | — | | | — | | — | | | — | — | | | | | — | — | | 463 |
| 467 | | | | | — | | | — | — | — | | | — | | | — | | | | | | — | — | — | — | — | | | | — | — | | — | 467 |
| 479 | | — | — | | — | | | | | — | — | | — | | — | | | | | — | — | — | — | | — | | | — | | | — | — | | 479 |
| 487 | — | — | | | — | — | — | — | — | — | | | — | | | | — | | — | | — | — | — | — | | — | | — | — | | — | | | 487 |
| 491 | | — | | | — | — | | — | | | | | | | — | — | | | — | | | — | — | | | — | — | | | | — | — | — | 491 |
| 499 | — | | | — | | | | — | — | | | | — | | — | | — | — | | | — | — | | — | | | | | — | | — | — | | 499 |
| 503 | | | | — | | — | | | — | | — | — | — | | | | — | — | — | | | — | | | — | | — | | — | — | | — | | 503 |

769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997

# TAFEL

ZUR VERWANDLUNG

GEMEINER BRÜCHE MIT NENNERN AUS DEM ERSTEN TAUSEND

IN DECIMALBRÜCHE.

## NACHLASS.

| | |
|---|---|
| 3 | (1)..6; (0)..3 |
| 7 | (0)..428571 |
| 9 | (1)..2; (2)..4; (3)..8; (4)..7; (5)..5; (0)..1 |
| 11 | (1)..81; (2)..63; (3)..27; (4)..54; (0)..90 |
| 13 | (1)..615384; (0)..769230 |
| 17 | (0)..5882352941 176470 |
| 19 | (0)..5263157894 73684210 |
| 23 | (0)..4347826086 9565217391 30 |
| 27 | (1)..740; (2)..481; (3)..962; (4)..925; (5)..851; (0)..370 |
| 29 | (0)..3448275862 0689655172 41379310 |
| 31 | (1)..4838709677 41935; (0)..3225806451 61290 |
| 37 | (1)..351; (2)..756; (3)..783; (4)..918; (5)..594; (6)..972; (7)..864; (8)..324; (9)..621; |
| | (10)..108; (11)..540; (0)..270 |
| 41 | (1)..46341; (2)..78048; (3)..68292; (4)..09756; (5)..58536; (6)..51219; (7)..07317; (0)..24390 |
| 43 | (1)..5116279069 7674418604 6; (0)..2325581395 3488372093 0 |
| 47 | (1)..2127659574 4680851063 8297872340 4255319148 936170 |
| 49 | (0)..2040816326 5306122448 9795918367 3469387755 10 |
| 53 | (1)..9056603773 584; (2)..5471698113 207; (3)..2264150943 396; (0)..1886792452 830 |
| 59 | (0)..1694915254 2372881355 9322033898 3050847457 6271186440 67796610 |
| 61 | (0)..1639344262 2950819672 1311475409 8360655737 7049180327 8688524590 |
| 67 | (1)..7910447761 1940298507 4626865671 641; (0)..1492537313 4328358208 9552238805 970 |
| 71 | (1)..7323943661 9718309859 1549295774 64788; (0)..1408450704 2253521126 7605633802 81690 |
| 73 | (1)..68493150; (2)..42465753; (3)..12328767; (4)..61643835; (5)..08219178; (6)..41095890 |
| | (7)..05479452; (8)..27397260; (0)..13698630 |
| 79 | (1)..6708860759 493; (2)..4556962025 316; (3)..2151898734 177; (4)..2405063291 139; |
| | (5)..9746835443 037; (0)..1265822784 810 |
| 81 | (1)..358024691; (2)..938271604; (3)..320987654; (4)..530864197; (5)..839506172; (0)..123456790 |
| 83 | (1)..0240963855 4216867469 8795180722 8915662650 6; |
| | (0)..1204819277 1084337349 3975903614 4578313253 0 |
| 89 | (1)..3707865168 5393258426 9662921348 3146067415 7303; |
| | (0)..1123595505 6179775280 8988764044 9438202247 1910 |
| 97 | (0)..1030927835 0515463917 5257731958 7628865979 3814432989 6907216494 8453608247 4226804123 |
| | 7113402061 855670 |
| 101 | (1)..1980; (2)..3960; (3)..7920; (4)..5841; (5)..1683; (6)..3366; (7)..6732; (8)..3465; (9)..6930; |
| | (10)..3861; (11)..7722; (12)..5445; (13)..0891; (14)..1782; (15)..3564; (16)..7128; |
| | (17)..4257; (18)..8514; (19)..7029; (20)..4059; (21)..8118; (22)..6237; (23)..2475; |
| | (24)..4950; (0)..0990 |
| 103 | (1)..5825242718 4466019417 4757281553 3980; (2)..4951456310 6796116504 8543689320 3883 |
| | (0)..0970873786 4077669902 9126213592 2330 |

## VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | |
|---|---|
| 107 | (1)..8878504672 8971962616 8124299063 4205607476 6353140186 913 |
| | (0)..0934579439 2523364485 9813084112 1495327102 8037383177 370 |
| 109 | (0)..0917431192 6605504587 1559633027 5229357798 1651376146 7889908256 8807339449 5412844036 |
| | 6972477064 2201834862 38532110 |
| 113 | (0)..0884955752 2123893805 3097345132 7433628318 5840707964 6017699115 0442477876 1061946902 |
| | 6548672566 3716814159 2920353982 30 |
| 121 | (1)..8925619834 7107438016 52; (2)..2396694214 8760330578 51; (3)..3884297520 6611570247 93; |
| | (4)..5930413223 1404958677 68; (0)..0826446280 9917355371 90; |
| 127 | (1)..3464566929 1338582677 1653543307 0866141732 28; (2)..7244094488 1889763779 5275590551 |
| | 1811023622 04; (0)..0787401574 8031496062 9921259842 5196850393 70 |
| 131 | (0)..0763358778 6259541984 7328244274 8091603053 4351145038 1679389312 9770992366 4122137404 |
| | 5801526717 5572519083 9694656488 5496183206 1068702290 |
| 137 | (1)..87591240; (2)..31094890; (3)..13138686; (4)..37664233; (5)..91970802; (6)..03649635; |
| | (7)..43795620; (8)..25547445; (9)..06569343; (10)..78832116; (11)..45985401; (12)..31824817; |
| | (13)..21897810; (14)..62773722; (15)..33284671; (16)..39416058; (0)..07299270 |
| 139 | (1)..6187050359 7122302158 2733812949 6402877697 841726; (2)..9208633093 5251798561 1510791366 |
| | 9064748201 438848; (0)..0719424460 4316546762 5899280575 5395683453 237410 |
| 149 | (0)..0671140939 5973154362 4161073825 5033557046 9798657718 1208053691 2751677852 3489932885 |
| | 9060402684 5637583892 6174496644 2953020134 2281879194 6308724832 21476510 |
| 151 | (1)..5496688741 7218543046 3576158940 3973509933 7748344370 8609271523 1788079470 19867 |
| | (0)..0662251655 6291390728 4768211920 5298013245 0331125827 8145695364 2384105960 26490 |
| 157 | (1)..1464968152 8662420382 1656050955 4140127388 5350318471 3375796178 3439490445 85987261 |
| | (0)..0636942675 1592356687 8980891719 7452229299 3630573248 4076433121 0191082802 54777070 |
| 163 | (1)..2944785276 0736196319 0184049079 7546012269 9386503067 4846625766 8711656441 7177914110 4 |
| | (0)..0613496932 5153374233 1288343558 2822085889 5705521472 3926380368 0981595092 0245398773 0 |
| 167 | (0)..0598802395 2095808383 2335329341 3173652694 6107784431 1377245508 9820359281 4371257485 |
| | 0299401197 6047904191 6167664670 6586826347 3053892215 5688622754 4910179640 7185628742 |
| | 514970 |
| 169 | (1)..1065088757 3964497041 4201183431 9526627218 9349112426 0355029585 7988165680 47337278 |
| | (0)..0591715976 3313609467 4556213017 7514792899 4082840236 6863905325 4437869822 48520710 |
| 173 | (1)..7398843930 6358381502 8901734104 0462427745 664; (2)..6705202312 1387283236 9942196531 |
| | 7919075144 508; (3)..9826589595 3757225433 5260115606 9364161849 710; (0)..0578034682 |
| | 0809248554 9132947976 8786127167 630 |
| 179 | (0)..0558659217 8770949720 6703910614 5251396648 0446927374 3016759776 5363128491 6201117318 |
| | 4357541899 4413407821 2290502793 2960893854 7486033519 5530726256 9832402234 6368715083 |
| | 7988826815 64245810 |
| 181 | (0)..0552486187 8453038674 0331491712 7071823204 4198895027 6243093922 6519337016 5745856353 |
| | 5911602209 9447513812 1546961325 9668508287 2928176795 5801104972 3756906077 3480662983 |
| | 4254143646 4088397790 |

191 (1)..2198952879 5811518324 6073298429 3193717277 4869109947 6439790575 9162303664 9214659685
8638743455 49738; (0)..0523560209 4240837696 3350785340 3141361256 5445026178 0104712041
8848167539 2670157068 0628272251 30890

193 (0)..0518134715 0259067357 5129533678 7564766839 3782383419 6891191709 8445595854 9222797927
4611398963 7305699481 8652849740 9326424870 4663212435 2331606217 6165803108 8082901554
4041450777 2020725388 6010362694 30

197 (1)..7055837563 4517766497 4619289340 1015228426 3959390862 9441624365 4822335025 3807106598
9847715736 04060913; (0)..0507614213 1979695431 4720812182 7411167512 6903553299 4923857868
0203045685 2791878172 5888324873 09644670

199 (1)..3819095477 3869346733 6683417085 4271356783 9195979899 4974874371 8592964824 1206030150
7587688442 211055276; (0)..0502512562 8140703517 5879396984 9246231155 7788944723 6180904522
6130653266 3316582914 5728643216 080402010

211 (1)..3317535545 0236966824 6445497630; (2)..3222748815 1658767772 5118483412; (3)..2559241706
1611374407 5829383886; (4)..7914691943 1279620853 0805687203; (5)..5402843601 8957345971
5639810426; (6)..7819905213 2701421800 9478672985; (0)..0473933649 2890995260 6635071090

223 (0)..0448430493 2735426008 9686098654 7085201793 7219730941 7040358744 3946188340 8071748878
9237668161 4349775784 7533632286 9955156950 6726457399 1031390134 5291479820 6278026905
8295964125 5605381165 9192825112 1076233183 8565022421 5246636771 30

227 (1)..1806167400 8810572687 2246696035 2422907488 9867841409 6916299559 4713656387 6651982378
8546255506 6079295154 1850220264 317; (0)..0440528634 3612334801 7621145374 4493392070
4845814977 9735682819 3832599118 9427312775 3303964757 7092511013 2158590308 370

229 (0)..0436681222 7074235807 8602620087 3362445414 8471615720 5240174672 4890829694 3231441048
0349344978 1659388646 2882096069 8689956331 8777292576 4192139737 9912663755 4585152838
4279475982 5327510917, 0305676855 8951965065 5021834061 2353711790 39301310

233 (0)..0429184549 3562231759 6566523605 1502145922 7467811158 7982832618 0257510729 6137339055
7959914163 0901287553 6480686695 2789799570 8154506437 7682403433 4763948497 8540772532
1888412017 1673819742 4892703862 6609442060 0858369098 7124463519 3133047210 30

239 (1)..4644351; (2)..2552301; (3)..9330543; (4)..6569037; (5)..9916317; (6)..7071129; (7)..7489539;
(8)..2133891; (9)..4686192; (10)..4016736; (11)..0585774; (12)..0502092; (13)..7573221;
(14)..5062761; (15)..7196652; (16)..1882845; (17)..5899581; (18)..6485355; (19)..6987447;
(20)..4560669; (21)..9623430; (22)..6820083; (23)..8702928; (24)..4602510; (25)..1087866;
(26)..8075313; (27)..2635983; (28)..2259414; (29)..9079497; (30)..7782426; (31)..2384937;
(32)..3472803; (33)..1548117; (0)..0418410

241 (1)..5809128630 7053941908 7136929460; (2)..1327800829 8755186721 9917012448;
(3)..8589211618 2572614107 8838174273; (4)..0248962655 6016597510 3734439834;
(5)..3485477178 4232365145 2282157676; (6)..8796680497 9253112033 1950207468;
(7)..3153526970 9543568464 7302904564; (0)..0414937759 3360995850 6224066390

243 (1)..6748971193 4156378600 8230452; (2)..8683127572 0164609053 4979423; (3)..4403292181 0699588477
3662551; (4)..6213991769 5473251028 8065843; (5)..3909465020 5761316872 4179835;
(0)..0411522633 7448559670 7818930

## VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | |
|---|---|
| 251 | (1)..4223107569 7211155378 4860557768 9243027888 4462151394; |
| | (2)..8764940239 0438247011 9521912350 5976095617 5298804780; |
| | (3)..2908366533 8645418326 6932270916 3346613545 8167330677; |
| | (4)..2828685258 9641434262 9482071713 1474103585 6573705179; |
| | (0)..0398406374 5019920318 7250996015 9362549800 7968127490 |
| 257 | (0)..0389105058 3657587548 6381322957 1984435797 6653696498 0544747081 7120622568 0933852140 |
| | 0778210116 7315175097 2762645914 3968871595 3307392996 1089494163 4241245136 1867704280 |
| | 1556420233 4630350194 5525291828 7937743190 6614785992 2178988326 8482490272 3735408560 |
| | 3112840466 926070 |
| 263 | (0)..0380228136 8821292775 6653992395 4372623574 1444866920 1520912547 5285171102 6615969581 |
| | 7490494296 5779467680 6083650190 1140684410 6463878326 9961977186 3117870722 4334600760 |
| | 4562737642 5855513307 9847908745 2471482889 7338403041 8250950570 3422053231 9391634980 |
| | 9885931558 9353612167 30 |
| 269 | (0)..0371747211 8959107806 6914498141 2639405204 4609665427 5092936802 9739776951 6728624535 |
| | 3159851301 1152416356 8773234200 7434944237 9182156133 8289962825 2788104089 2193308550 |
| | 1858736059 4795539033 4572490706 3197026022 3048327137 5464684014 8698884758 3643122676 |
| | 5799256505 5762081784 38661710 |
| 271 | (1)..22140; (2)..32841; (3)..97047; (4)..82287; (5)..93726; (6)..62361; (7)..74169; (8)..45018; |
| | (9)..70110; (10)..10664; (11)..23985; (12)..43911; (13)..63468; (14)..80811; (15)..84870; |
| | (16)..09225; (17)..55350; (18)..32103; (19)..92619; (20)..55719; (21)..34317; (22)..05904; |
| | (23)..35424; (24)..12546; (25)..75276; (26)..51660; (27)..09963; (28)..59778; (29)..58671; |
| | (30)..52029; (31)..12177; (32)..73062; (33)..38376; (34)..30258; (35)..81549; (36)..89298; |
| | (37)..35793; (38)..14760; (39)..88560; (40)..31365; (41)..88191; (42)..29151; (43)..74907; |
| | (44)..49446; (45)..96678; (46)..80073; (47)..80442; (48)..82656; (49)..95940; (50)..75645; |
| | (51)..53874; (52)..23447; (53)..39483; (0)..03690 |
| 277 | (1)..8880866425 9927797833 9350180505 4151624548 7364620938 6281588447 653429602 |
| | (2)..0469314079 4223826714 8014440433 2129963898 9169675090 2527075812 274368231 |
| | (3)..7545126353 7906137184 1155234657 0397111913 3574007220 2166064981 949458483 |
| | (0)..0361010830 3249097472 9241877256 3176895306 8592057761 7328519855 595667870 |
| 281 | (1)..9217081850 5338078291 81494661; (2)..7722419928 8256227758 00711743; |
| | (3)..7010676156 5836298932 38434163; (4)..8576512455 5160142348 75444839; |
| | (5)..3131672597 8647686832 74021352; (6)..9110320284 6975088967 97153024; |
| | (7)..1957295373 6654804270 46263345; (8)..5693950177 9359430604 98220640; |
| | (9)..7473309608 5409252669 03914590; (0)..0355871886 1209964412 81138790 |
| 283 | (1)..1519434628 9752650176 6784452296 8197879858 6572438162 5441696113 0742049469 9646643109 |
| | 5406360424 0282685512 3674911660 7773851590 1060070671 3780918727 9 |
| | (0)..0353356890 4593639575 9717314487 6325088339 2226148409 8939929328 6219081272 0848056537 |
| | 1024734982 3321554770 3180212014 1342756183 7455830388 6925795053 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 289 | (0)..0346020761 | 2456747404 | 8442906574 | 3944636678 | 2006920415 | 2249134948 | 0968858131 | 4878892733 |
| | 5640138408 | 3044982698 | 9619377162 | 6297577854 | 6712802768 | 1660899653 | 9792387543 | 2525951557 |
| | 0934256055 | 3633217993 | 0795847750 | 8650519031 | 1418685121 | 1072664359 | 8615916955 | 0173010380 |
| | 6228373702 | 4221453287 | 1972318339 | 10 | | | | |
| 293 | (1)..0375426621 | 1604095563 | 1399317406 | 1433447098 | 9761092150 | 1706484641 | 6382252559 | 7269624573 |
| | 3788395904 | 4368600682 | 5938566552 | 9010238907 | 8498293515 | 3583617747 | 440273 | |
| | (0)..0341296928 | 3276450511 | 9453924914 | 6757679180 | 8873720136 | 5187713310 | 5802047781 | 5699658703 |
| | 0716723549 | 4880546075 | 0853242320 | 8191126279 | 8634812286 | 6894197952 | 218430 | |
| 307 | (1)..4951140065 | 1465798045 | 6026058631 | 9218241042 | 3452768729 | 6416938110 | 7491856677 | 5244299674 |
| | 2671009771 | 9869706840 | 3908794788 | 2736156351 | 7915309446 | 2540716612 | 3778501628 | 664 |
| | (0)..0325732899 | 0228013029 | 3159609120 | 5211726384 | 3648208469 | 0553745928 | 3387622149 | 8371335504 |
| | 8859934853 | 4201954397 | 3941368078 | 1758957654 | 7231270358 | 3061889250 | 8143322475 | 570 |
| 311 | (1)..2958199356 | 9131832797 | 4276527331 | 1897106109 | 3247588424 | 4372990353 | 6977491961 | 4147909967 |
| | 8456591639 | 8713826366 | 5594855305 | 4662379421 | 2218649517 | 6848874598 | 0707395498 | 39228 |
| | (0)..0321543408 | 3601286173 | 6334405144 | 6945337620 | 5787781350 | 4823151125 | 4019292604 | 5016077170 |
| | 4180064308 | 6816720257 | 2347266881 | 0289389067 | 5241157556 | 2700964630 | 2250803858 | 52090 |
| 313 | (0)..0319488817 | 8913738019 | 1693290734 | 8242811501 | 5974440894 | 5686900958 | 4664536741 | 2140575079 |
| | 8722044728 | 4345047923 | 3226837060 | 7028753993 | 6102236421 | 7252396166 | 1341853035 | 1437699680 |
| | 5111821086 | 2619808306 | 7092651757 | 1884984025 | 5591054313 | 0996415335 | 4632587859 | 4249201277 |
| | 9552715654 | 9520766773 | 1629392971 | 2460063897 | 7635782747 | 6038338658 | 1469648562 | 30 |
| 317 | (1)..2397476342 | 6940063091 | 4826498422 | 7129337539 | 4321766561 | 5141955835 | 9621451104 | 100946372 |
| | (2)..0220820189 | 2744479495 | 2681388012 | 6182965299 | 6845425867 | 5078864353 | 3123028391 | 167192429 |
| | (3)..5678233438 | 4858044164 | 0378548895 | 8990536277 | 6025236593 | 0599369085 | 1735015772 | 870662460 |
| | (0)..0315457413 | 2492113564 | 6687697160 | 8832807570 | 9779179810 | 7255520504 | 7318611987 | 381703470 |
| 331 | (1)..1178247734 | 1389728096 | 6767371601 | 2084592145 | 0151057401 | 8126888217 | 5226586102 | 7190332326 |
| | 2839879154 | 0785498489 | 4259818731 | | | | | |
| | (2)..3595166163 | 1419939577 | 0392749244 | 7129909365 | 5589123867 | 0694864048 | 3383685800 | 6042296072 |
| | 5075528700 | 9063444108 | 7613293051 | | | | | |
| | (0)..0302114803 | 6253776435 | 0453172205 | 4380664652 | 5679758308 | 1570996978 | 8519637462 | 2356495468 |
| | 2779466193 | 3534743202 | 4269184290 | | | | | |
| 337 | (0)..0296735905 | 0445103857 | 5667655786 | 3501483679 | 5252225519 | 2878338278 | 9317507418 | 3976261127 |
| | 5964391691 | 3946587537 | 0919881305 | 6379821958 | 4569732937 | 6854599406 | 5281899109 | 7922848664 |
| | 6884272997 | 0326409495 | 5489614243 | 3234421364 | 9851632047 | 4777448071 | 2166172106 | 8249258160 |
| | 2373887240 | 3560830860 | 5341246290 | 8011869436 | 2017804154 | 3026706231 | 4540059347 | 1810989020 |
| | 7715133531 | 157270 | | | | | | |
| 343 | (0)..0291545189 | 5043731778 | 4256559766 | 7638483965 | 0145772594 | 7521865889 | 2128279883 | 3819241982 |
| | 5072886297 | 3760952944 | 6064139941 | 6909620991 | 2536443148 | 6880466472 | 3032069970 | 8454810495 |
| | 6268221574 | 3440233236 | 1516034985 | 4227405247 | 8134110787 | 1720116618 | 0758017492 | 7113702623 |
| | 9067055393 | 5860058309 | 0379008746 | 3556851311 | 9533527696 | 7930 | | |

VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 347 | (1)..6023054755 | 0432276657 | 0605187319 | 8847262247 | 8386167146 | 9740634005 | 7636887608 | 0691642651 |
| | 2968299711 | 8155619596 | 5417867435 | 1585014409 | 2219020172 | 9106628242 | 0749279538 | 9048991354 |
| | 4668587896 | 253 | | | | | | |
| | (0)..0288184438 | 0403458213 | 2564841498 | 5590778097 | 9827089337 | 1757925072 | 0461095100 | 8645533141 |
| | 2103746397 | 6945244956 | 7723342939 | 4812680115 | 2737752161 | 3832853025 | 9365994236 | 3112391930 |
| | 8357348703 | 170 | | | | | | |
| 349 | (1)..3037249283 | 6676217765 | 0429799426 | 9340974212 | 0343839541 | 5472779369 | 6275071633 | 2378223495 |
| | 7020057306 | 5902578796 | 5616045845 | 272206 | | | | |
| | (2)..8194842406 | 8767908309 | 4555873925 | 5014326647 | 5644699140 | 4011461318 | 0515759312 | 3209169054 |
| | 4412607449 | 8567335243 | 5530085959 | 885386 | | | | |
| | (0)..0286532951 | 2893982808 | 0229226360 | 0315186246 | 4183381088 | 8252148997 | 1346704871 | 0601719197 |
| | 7077363896 | 8481375358 | 1661891117 | 478510 | | | | |
| 353 | (1)..7932011331 | 4447592067 | 9886685552 | 40; | (2)..2096317280 | 4532577903 | 6827195467 | 42; |
| | (3)..8696883852 | 6912181303 | 1161473087 | 81; | (4)..3512747875 | 3541076487 | 2521246498 | 92; |
| | (5)..8356940509 | 9150141643 | 0594900849 | 85; | (6)..3994334277 | 6203966005 | 6657223796 | 03; |
| | (7)..1841359773 | 3711048158 | 6402266288 | 95; | (8)..1558073654 | 3909348441 | 9263456090 | 65; |
| | (9)..3626062322 | 9461756373 | 9376770538 | 24; | (10)..1529745042 | 4929178470 | 2549575070 | 82; |
| | (0)..0283286118 | 9801699716 | 7138810198 | 30; | | | | |
| 359 | (1)..3286908077 | 9944289693 | 5933147632 | 3119777158 | 7743732590 | 5292479108 | 6350974930 | 3621169916 |
| | 4345403899 | 7214484679 | 6657381615 | 5988857938 | 7186629526 | 4623955431 | 7548746518 | 1058485821 |
| | 7270194986 | 07242339$ | | | | | | |
| | (0)..0278551532 | 0334261838 | 4401114206 | 1281337047 | 3537604456 | 8245125348 | 1894150417 | 8272980501 |
| | 3927576601 | 6713091922 | 0055710306 | 4066852367 | 6880222841 | 2256267409 | 4707520891 | 3649025069 |
| | 6378830083 | 565459610 | | | | | | |
| 361 | (0)..0277008310 | 2493074792 | 2437673130 | 1939058171 | 7451523545 | 7063711911 | 3573407202 | 2160664819 |
| | 9445983379 | 5013850415 | 5124653739 | 6121883656 | 5096952908 | 9872576177 | 2853185595 | 5678670360 |
| | 1108033240 | 9972299168 | 9750698520 | 7756232686 | 9806094182 | 8254847645 | 4293628808 | 8642659279 |
| | 7783933518 | 0055401662 | 0498614958 | 4487534626 | 0387811634 | 3490304709 | 1412742382 | 2714681440 |
| | 4432132963 | 9889196675 | 90 | | | | | |
| 367 | (0)..0272479564 | 0326975476 | 8392370572 | 2070844686 | 6485013623 | 9782016348 | 7738419618 | 5286103542 |
| | 2343324250 | 6811989100 | 8174386920 | 9809264305 | 1771117166 | 2125340599 | 4550408719 | 3460490463 |
| | 2152588555 | 8583106267 | 0299727520 | 4359673024 | 5231607629 | 4277929155 | 3133514986 | 3760217983 |
| | 6512261580 | 3814713896 | 4577656675 | 7493188010 | 8991825613 | 0790190735 | 6948228882 | 8337874659 |
| | 4005449591 | 2806539509 | 5367847411 | 4441416893 | 732970 | | | |
| 373 | (1)..1983914209 | 1152815013 | 4048257372 | 6541554959 | 7855227882 | 0375335120 | 6434316353 | 8873994638 |
| | 0697050938 | 3378016085 | 7908847184 | 9865951742 | 6273458445 | 0402144772 | 1179624664 | 8793565683 |
| | 6461126005 | 3619302949 | 061662 | | | | | |
| | (0)..0268096514 | 7453083109 | 9195710455 | 7640750670 | 2412868632 | 7077747989 | 2761394101 | 8766756032 |
| | 1715817694 | 3699731903 | 4852546916 | 8900804289 | 5442359249 | 3297587131 | 3672922252 | 0107238605 |
| | 8981233243 | 9678284182 | 305630 | | | | | |

379 (0)..0263852242 7440633245 3825857519 7889182058 0474934036 9393139841 6886543535 6200527704
4854881266 4907651715 0395778364 1160949868 0738786279 6833773087 0712401055 4089709762
5329815303 4300791556 7282321899 7361477572 5593667546 1741424802 1108179419 5250659630
6068601583 1134564643 7794722955 1451187335 0923482849 6042216358 8390501319 2612137203
1662269129 2875989445 9102902374 6701846965 6992084432 71767810

383 (0)..0261096605 7441253263 7075718015 6657963446 4751958224 5430809399 4778067885 1174934725
8485639686 6840731070 4960835509 1383812010 4438642297 6501305483 0287206266 3185378590
0783289817 2323759791 1227154046 9973890339 4255874673 6292428198 4334203655 3524804177
5456919060 0522193211 4882506527 4151436031 3315926892 9503916449 0861618798 9556135770
2349869451 6971279373 3681462140 9921671018 2767624020 8877284595 30

389 (0)..0257069408 7403598971 7223650385 6041131105 3984575835 4755784061 6966580976 8637532133
6760925449 8714652956 2982005141 3881748071 9794344473 0077120822 6221079691 5167095115
6812339331 6195372750 6426735218 5089974293 0591259640 1028277634 9614395886 8894601542
4164524421 5938303341 9023136246 7866523907 4550128534 7043701799 4858611825 1928020565
5516992287 9177377892 0308483190 4884318766 0668380462 7249357326 47814910

397 (1)..3501259445 8438287153 6523929471 0327455919 3954659949 6221662468 5138539042 8211586901
7632241813 602015113; (2)..5667506297 2292191435 7682619647 3551637279 5969773299 7481108312
3425692695 2141057934 5088161209 068010075; (3)..3778337531 4861460957 1788413098 2367758186
3979848866 4987405541 5617128463 4760705289 6725440806 045340050; (0)..0251889168 7657430730
4785894206 5491183879 0931989924 4332493702 7707808564 2317380352 6448362720 303022670

401 (1)..7981546134 6633416458 8528678304 2394014962 5935162094 7630922693 2668329177 0573566084
7880299251 8703241895 2618453865 3366583541 1471321695 7605985037 4064837905 2369077306
7331670822 9426433915 2119700748 1296758104
(0)..0249376558 6034912718 2044887780 5486284289 2768079800 4987531172 0698254364 0897755610
9725685785 5361596009 9750623441 3965087281 7955112219 4513715710 7231920199 5012468827
9301745635 9102244389 0274314214 4638403990

409 (1)..2542787286 0635696821 5158924205 3789731051 3447432762 8361858190 7090464547 6772616136
9193154034 [2198288508] 5574572127 1393643031 7848410757 9462102689 4865525672 3716381418
0929095354 5232273838 6308068459 6577017114 9144
(0)..0244498777 3061124694 3765281173 5941320293 3985330073 3496332518 3374083129 5843520782
3960880195 5990220048 8997555012 2249388753 0562347188 2640586797 0660146699 2665036674
8166259168 7041564792 1760391198 0440097799 5110

419 (0)..0238663484 4868735083 5322195704 0572792362 7684964200 4773269689 7374701670 6443914081
1455847255 3699284009 5465393794 7494033412 8878281622 9116945107 3985680190 9307875894
9880668257 7565632458 2338902147 9713603818 6157517899 7613365155 1312649164 6778042959
4272076372 3150357995 2267303102 6254983293 5560859188 5441527446 3007159904 5346062052
5059665871 1217183770 8830548926 0143198090 6921241050 1183317422 4343675417 6610978520
2863961813 84248210

## VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 421 | (1)..2826603325 | 4156769596 | 1995249406 | 1757719714 | 9643705463 | 1828978622 | 3277909738 | 7173396674 |
| | 5843230403 | 8004750593 | 8242280285 | 0356294536 | 8171021377 | 6722090261 | | |
| | (2)..2636579572 | 4465558194 | 7743467933 | 4916864608 | 0760095011 | 8764845605 | 7007125890 | 7363420427 |
| | 5534441805 | 2256532066 | 5083135391 | 9139904988 | 1235154394 | 2992874109 | | |
| | (0)..0237529691 | 2114014251 | 7814726840 | 8551068883 | 6104513064 | 1330166270 | 7838479809 | 9762470308 |
| | 7885985748 | 2185273159 | 1448931116 | 3895486935 | 8669833729 | 2161520190 | | |
| 431 | (1)..4872389791 | 1832946635 | 7308584686 | 7749419953 | 5962877030 | 1624129930 | 3944315545 | 2436194895 |
| | 5916473317 | 8654292343 | 3874709976 | 7981438515 | 0812064965 | 1972197772 | 6218097447 | 7958236658 |
| | 9327146171 | 6937354988 | 3990719257 | 5406032482 | 5986078886 | 31090 | | |
| | (0)..0232018561 | 4849187935 | 0348027842 | 2273781902 | 5522041763 | 3410672853 | 8283062645 | 0116009280 |
| | 7424593967 | 5174013921 | 1136890951 | 2761020881 | 6705336426 | 9141531322 | 5058004640 | 3712296983 |
| | 7587006960 | 5568445475 | 6380510440 | 8352668213 | 4570765661 | 25290 | | |
| 433 | (0)..0230946882 | 2170900692 | 8406466512 | 7020785219 | 3995381062 | 3556581986 | 1431870669 | 7459584295 |
| | 6120092378 | 7528868360 | 2771362586 | 6050808314 | 0877598152 | 4249422632 | 7944572748 | 2678983833 |
| | 7182448036 | 9515011547 | 3441108545 | 0346420323 | 3256351039 | 2609699769 | 0531177829 | 0993071593 |
| | 5334872979 | 2147806004 | 6189376443 | 4180138568 | 1293302540 | 4157043879 | 9076212471 | 1316397228 |
| | 6374133949 | 1916859122 | 4018475750 | 5773672055 | 4272517321 | 0161662817 | 5519630484 | 9884526558 |
| | 8914549653 | 5796766743 | 6489607390 | 30 | | | | |
| 439 | (1)..4920273348 | 5193621867 | 8815489749 | 4305239179 | 9544419134 | 3963553530 | 7517084282 | 4601366742 |
| | 5968109339 | 4077448747 | 1526195899 | 7722095671 | 9817767653 | 7585421412 | 3006833712 | 9840546697 |
| | 0387243735 | 7630979498 | 8610478359 | 9088838268 | 7927107061 | 503416856 | | |
| | (0)..0227790432 | 8018223234 | 6241457858 | 7699316628 | 7015945330 | 2961275626 | 4136902050 | 1138952164 |
| | 0091116173 | 1207289293 | 8496583143 | 5079726651 | 4806378132 | 1184510250 | 5694760820 | 0455580865 |
| | 6036446469 | 2482915717 | 5398633257 | 4031890660 | 5922551252 | 847380410 | | |
| 443 | (1)..4176072234 | 7629796839 | 7291196388 | 2618510158 | 9135440180 | 5869574492 | 0993227990 | 9706546275 |
| | 3950338600 | 4514672686 | 2302483069 | 9774266365 | 6884875846 | 5011286681 | 7155756207 | 6749435665 |
| | 9142212189 | 6162528216 | 7042889390 | 5191873589 | 1647855530 | 4740406320 | 5 | |
| | (0)..0225733634 | 3115124153 | 4988713318 | 2844243792 | 3250564334 | 0857787810 | 3837471783 | 2957110609 |
| | 4808126410 | 8352144469 | 5259593679 | 4582392776 | 5237020316 | 0270880361 | 1738148984 | 1986455981 |
| | 9413092550 | 7900677200 | 9029345372 | 4604966139 | 9548532731 | 3769751693 | 0 | |
| 449 | (1)..7572383073 | 4966592427 | 6169265033 | 40; | (2)..7461024498 | 8864142538 | 9755011135 | 85; |
| | (3)..3674832962 | 1380846325 | 1670378619 | 15; | (4)..4944320712 | 6948775055 | 6792873051 | 22; |
| | (5)..8106904231 | 6258351893 | 0957683741 | 64; | (6)..5634743875 | 2783964365 | 2561247216 | 03; |
| | (7)..1581291759 | 4654788418 | 7082405345 | 21; | (8)..3763919821 | 8262806236 | 0801781737 | 19; |
| | (9)..7973273942 | 0935412026 | 7260579064 | 58; | (10)..1091314031 | 1804008908 | 6859688195 | 99; |
| | (11)..7104677060 | 1336302895 | 3229398663 | 69; | (12)..1559020044 | 5434298440 | 9799554565 | 70; |
| | (13)..3006681514 | 4766146993 | 3184855233 | 85; | (0)..0222717149 | 2204899777 | 2828507795 | 10 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 457 | (1).. | 7768052516 | 4113785557 | 9868708971 | 5536105032 | 8227571115 | 9737417943 | 2072210065 | 6455142232 |
| | | 9474835886 | 2144420131 | 2910284463 | 8949671772 | 4288840262 | 5820568927 | 7899343544 | 85 |
| | (2).. | 0765864332 | 6039387308 | 5339168490 | 1531728665 | 2078774617 | 0678336980 | 3063457330 | 4157549234 |
| | | 1356673960 | 6126914660 | 8315098468 | 2713347922 | 2253829321 | 6630196936 | 5426695842 | 45 |
| | (0).. | 0218818380 | 7439824945 | 2954048140 | 0437636762 | 4879649890 | 5908096280 | 0875273522 | 9759299781 |
| | | 1816192560 | 1750547045 | 9518599562 | 3632385120 | 3501094091 | 9037199124 | 7264770240 | 70 |
| 461 | (0).. | 0216919739 | 6963123644 | 2516268980 | 4772234273 | 3188720173 | 5357917570 | 4989154013 | 0151843817 |
| | | 7874186550 | 9761388286 | 3340563991 | 3232104121 | 4750542299 | 3492407809 | 2106290672 | 4511930585 |
| | | 6832971800 | 4338394793 | 9262472885 | 0325379609 | 5444685466 | 3774403470 | 7158351409 | 9783080260 |
| | | 3036876355 | 7483731019 | 5227765726 | 6811279826 | 4642082429 | 5010845986 | 9848156182 | 2125813449 |
| | | 0238611713 | 6659436008 | 6767895878 | 5249457700 | 6507592190 | 8893709327 | 5488069414 | 3167028199 |
| | | 5661605206 | 0737527114 | 9674620390 | 4555314533 | 6225596529 | 2841648590 | | |
| 463 | (1).. | 7580993520 | 5183585325 | 1749460043 | 1965442764 | 5788336933 | 0453563714 | 9028077753 | 7796976241 |
| | | 9006479481 | 6414686825 | 0539956803 | 4557235421 | 1663066954 | 6436285097 | 1922246220 | 3023 |
| | (2).. | 9092872570 | 1943844492 | 4406047516 | 1987041036 | 7170626349 | 8920086393 | 0885529157 | 6673866090 |
| | | 7127429805 | 6155507559 | 3952483801 | 2958963282 | 9373650107 | 9913606911 | 4470842332 | 6133 |
| | (0).. | 0215982721 | 3822894168 | 4665226781 | 8574514038 | 8768898488 | 1209503239 | 7408207343 | 4125269978 |
| | | 4017278617 | 7105831533 | 4773218142 | 5485961123 | 1101511879 | 0496760259 | 1792656587 | 4730 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [Theiler | 3 | 9 | 11 | 13 | 27 | 31 | 37 | 41 | 43 | 53 | 67 | 71 | 73 | 79 | 81 | 83 | 89 | 101 |
| Primitivwurzel | 2 | 2 | 2 | 6 | 2 | 17 | 5 | 6 | 28 | 26 | 12 | 62 | 5 | 29 | 11 | 50 | 30 | 2 |
| Theiler | 103 | 107 | 121 | 127 | 137 | 139 | 151 | 157 | 263 | 169 | 173 | 191 | 197 | 199 | 211 | | | |
| Primitivwurzel | 6 | 63 | 35 | 106 | 12 | 92 | 114 | 18 | 70 | 137 | 82 | 157 | 73 | 127 | 7 | | | |
| Theiler | 227 | 239 | 241 | 243 | 251 | 271 | 277 | 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 317 | 331 | 347 | | | |
| Primitivwurzel | 163 | 35 | 14 | 65 | 111 | 6 | 80 | 54 | 259 | 89 | 138 | 258 | 71 | 37 | 185 | | | |
| Theiler | 349 | 353 | 359 | 373 | 397 | 401 | 409 | 421 | 431 | 439 | 443 | 449 | 457 | 463] | | | | |
| Primitivwurzel | 220 | 28 | 299 | 82 | 133 | 190 | 174 | 54 | 21 | 285 | 240 | 34 | 264 | 174] | | | | |

VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 467 | 2141327623 | 1263383297 | 6445396145 | 6102783725 | 9100642398 | 2869379014 | 9892933618 | 8436830835 |
| | 1177730192 | 7194860813 | 7044967880 | 0856531049 | 2505353319 | 0578158458 | 2441113490 | 3640256959 |
| | 3147751605 | 9957173447 | 5374732334 | 0471092077 | 0877944325 | 4817987152 | 0342612419 | 7002141327 |
| | ..... | | | | | | | |
| 479 | 2087682672 | 2338204592 | 9018789144 | 0501043841 | 3361169102 | 2964509394 | 5720250521 | 9206680584 |
| | 5511482254 | 6972860125 | 2609603340 | 2922755741 | 1273486430 | 0626304801 | 6701461377 | 8705636743 |
| | 2150313152 | 4008350730 | 6889352818 | 3716075156 | 5762004175 | 3653444676 | 4091858037 | 5782881002 |
| | ..... | | | | | | | |
| 487 | 2053388090 | 3490759753 | 5934291581 | 1088295687 | 8850102669 | 4045174537 | 9876796714 | 5790554414 |
| | 7843942505 | 1334702258 | 7268993839 | 8357289527 | 7207392197 | 1252566735 | 1129363449 | 6919917864 |
| | 4763860369 | 6098562628 | 3367556468 | 1724845995 | 8932238193 | 0184804928 | 1314168377 | 8234086242 |
| | 2997946611 | 9096509240 | 2464065708 | 4188911704 | 3121149897 | 3305954825 | 4620123203 | 2854209445 |
| | 5852156057 | 4948665297 | 7412731006 | 1601642710 | 4722792607 | 8028747433 | 2648870636 | 5503080082 |
| | 1355236139 | 6303901437 | 3716632443 | 5318275154 | 0041067761 | 8069815195 | 0718685831 | 6221765913 |
| | 7577002053 | ... | | | | | | |
| 491 | 2036659877 | 8004073319 | 7556008146 | 6395112016 | 2932790224 | 0325865580 | 4480651731 | 1608961303 |
| | 4623217922 | 6069246435 | 8452138492 | 8716904276 | 9857433808 | 5539714867 | 6171079429 | 7552342158 |
| | 8594704684 | 3177189409 | 3686354378 | 8187372708 | 7576374745 | 4175152749 | 4908350305 | 4989816700 |
| | 6109979633 | 4012219959 | 2668024439 | 9185336048 | 8798370672 | 0977596741 | 3441955193 | 4826883910 |
| | 3869653767 | 8207739307 | 5356415478 | 6150712830 | 9572301425 | 6619144602 | 8513238289 | 2057026476 |
| | 5784114052 | 9531568228 | 1059063136 | 4562118126 | 2729124236 | 2525458248 | 4725050916 | 4969450101 |
| | 8329938900 | ... | | | | | | |
| 499 | 2004008016 | 0320641282 | 5651302605 | 2104208416 | 8336673346 | 6933867735 | 4709418837 | 6753507014 |
| | 0280561122 | 2444889779 | 5591182364 | 7294589178 | 3567134268 | 5370741482 | 9659318637 | 2745490981 |
| | 9639278557 | 1142284569 | 1382765531 | 0621242484 | 9699398797 | 5951903807 | 6152304609 | 2184368737 |
| | 4749498997 | 9959919839 | 6793587174 | 3486973947 | 8957915831 | 6633266533 | 0661322645 | 2905811623 |
| | 2464929859 | 7194388777 | 5551102204 | 4088176352 | 7054108216 | 4328657314 | 6292585170 | 3406813627 |
| | 2545090180 | 3607214428 | 8577154308 | 6172344689 | 3787575150 | 3006012024 | 0480961923 | 8476953907 |
| | 8156312625 | 2505010020 | .... | | | | | |
| 503 | 1988071570 | 5765407554 | 6719681908 | 5487077534 | 7912524850 | 8946322067 | 5944333996 | 0238568588 |
| | 4691848906 | 5606361829 | 0258449304 | 1749502982 | 1073558648 | 1113320079 | 5228628230 | 6163021868 |
| | 7872763419 | 4831013916 | 5009940357 | 8528827037 | 7733598409 | 5427435387 | 6739562624 | 2544731610 |
| | 3379721669 | 9801192842 | 9423459244 | 5328031809 | 1451292246 | 5208747514 | 9105367793 | 2405566600 |
| | 3976143141 | 1530815109 | 3439363817 | 0974155069 | 5825049701 | 7892644135 | 1888667992 | 0477137176 |
| | 9383697813 | 1212723658 | 0516898608 | 3499005964 | 2147117296 | 2226640159 | 0457256461 | 2326043737 |
| | 5745526838 | 9662027833 | 0019880715 | ..... | | | | |

## NACHLASS.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 509 | 1964636542 | 2396856581 | 5324165029 | 4695481335 | 9528487229 | 8624754420 | 4322200392 | 9273084479 |
| | 3713163064 | 8330058939 | 0962671905 | 6974459724 | 9508840864 | 4400785854 | 6168958742 | 6326129666 |
| | 0117878192 | 5343811394 | 8919449901 | 7681728880 | 1571709233 | 7917485265 | 2259332023 | 5756385068 |
| | 7622789783 | 8899803536 | 3457760314 | 3418467583 | 4970530451 | 8664047151 | 2770137524 | 5579567779 |
| | 9607072691 | 5520628683 | 6935166994 | 1060903732 | 8094302554 | 0275049115 | 9135559921 | 4145383104 |
| | 1257367387 | 0333988212 | 1807465618 | 8605108055 | 0098231827 | 1119842829 | 0766208251 | 4734774066 |
| | 7976424361 | 4931237721 | 0216110029 | ..... | | | | |
| 521 | 1919385796 | 5451055662 | 1880998080 | 6142034548 | 9443378119 | 0019193857.... | | |
| 523 | 1912045889 | 1013384321 | 2237093690 | 2485659655 | 8317399617 | 5908221797 | 3231357552 | 5812619502 |
| | 8680688336 | 5200764818 | 3556405353 | 7284894837 | 4760994263 | 8623326959 | 8470363288 | 7189292543 |
| | 0210325047 | 8011472275 | 3346080305 | 9273422562 | 1414913957 | 9349904397 | 7055449330 | 7839388145 |
| | 3154875717 | 0172084130 | 0191204588 | ..... | | | | |
| 529 | 1890359168 | 2419659735 | 3497164461 | 2476370510 | 3969754253 | 3081285444 | 2344045368 | 6200378071 |
| | 8336483931 | 9470699432 | 8922495274 | 1020793950 | 8506616257 | 0888468809 | 0737240075 | 6143667296 |
| | 7863894139 | 8865784499 | 0548204158 | 7901701323 | 2514177693 | 7618147448 | 0151228733 | 4593572778 |
| | 8279773156 | 8998109640 | 8317580340 | 2646502835 | 5387523629 | 4896030245 | 7466918714 | 5557655954 |
| | 6313799621 | 9282663516 | 0680529300 | 5671077504 | 7258979206 | 0491493383 | 7429111531 | 1909262759 |
| | 9243856332 | 7032136105 | 8601134215 | 5009451795 | 8412098298 | 6767485822 | 3062381852 | 5519848771 |
| | 2665406427 | 2211720226 | 8431001890 | .... | | | | |
| 541 | 1848428835 | 4898336414 | 0480591497 | 2273567467 | 6524953789 | 2791127541 | 5896487985 | 2125693160 |
| | 8133086876 | 1552680221 | 8114602587 | 8003696857 | 6709796672 | 8280961182 | 9944547134 | 9353049907 |
| | 5785582255 | 0831792975 | 9704251386 | 3216266173 | 7523105360 | 4436229205 | 1756007393 | 7153419593 |
| | 3456561922 | 3659889094 | 2698706099 | 8151571164 | 5101663585 | 9519408502 | 7726432532 | 3475046210 |
| | 7208872458 | 4103512014 | 7874306839 | 1866913123 | 8447319778 | 1885397412 | 1996303142 | 3290203327 |
| | 1719038817 | 0055452865 | 0646950092 | 4214417744 | 9168207024 | 0295748613 | 6783733826 | 2476894639 |
| | 5563770794 | 8243992606 | 2846580406 | 6543438077 | 6340110905 | 7301293900 | 1848428835.... | |
| 547 | 1828153564 | 8994515539 | 3053016453 | 3820840950 | 6398537477 | 1480804387 | 5685557586 | 8372943327 |
| | 2394881170 | 0182815356 | .... | | | | | |
| 557 | 1795332136 | 4452423698 | 3842010771 | 9928186714 | 5421903052 | 0646319569 | 1202872531 | 4183123877 |
| | 9174147217 | 2351885098 | 7432675044 | 8833034111 | 3105924596 | 0502692998 | 2046678635 | 5475763016 |
| | 1579892280 | 0718132854 | 5780969479 | 3536804308 | 7971274685 | 8168761220 | 8258527827 | 6481149012 |
| | 5673249551 | 1669658886 | 8940754039 | 4973070017 | .... | | | |
| 563 | 1776398934 | 2806394316 | 1634103019 | 5381882770 | 8703374777 | 9751332149 | 2007104795 | 7371225577 |
| | 2646536412 | 0781527531 | 0834813499 | 1119005328 | 5968028419 | 1829484902 | 3090586145 | 6483126110 |
| | 1243339253 | 9964476021 | 3143872113 | 6767317939 | 6092362344 | 5825932504 | 4404973357 | 0159857904 |
| | 0852575488 | 4547069271 | 7584369449 | 3783303730 | 0177619893 | ..... | | |
| 569 | 1757469244 | 2882249560 | 6326889279 | 4376098418 | 2776801405 | 9753954305 | 7996485061 | 5114235500 |
| | 8787346221 | 4411247803 | 1634446397 | 1880492091 | 3884007029 | 8769771528 | 9982425307 | 5571177504 |
| | 3936731107 | 2056239015 | 8172231985 | 9402460456 | 9420035149 | 3848857644 | 9912126537 | 7855887521 |
| | 9683655536 | 0281195079 | 0861159929 | 7012302284 | 7100175746 | .... | | |

## VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 571 | 1751313485 | 1138353765 | 3239929947 | 4605954465 | 8493870402 | 8021015761 | 8213660245 | 1838879159 |
| | 3695271453 | 5901926444 | 8336252189 | 1418563922 | 9422066549 | 9124343257 | 4430823117 | 3380035026 |
| | 2697022767 | 0753064798 | 5989492119 | 0893169877 | 4080560420 | 3152364273 | 2049036777 | 5831873905 |
| | 4290718038 | 5288966725 | 0437828371 | 2784588441 | 3309982486 | 8651488616 | 4623467600 | 7005253940 |
| | 4553415061 | 2959719789 | 8423817863 | 3975481611 | 2084063047 | 2854640980 | 7355516637 | 4781085814 |
| | 3607705779 | 3345008756 | 5674255691 | 7688266199 | 6497373029 | 7723292469 | 3520140105 | 0788091068 |
| | 3012259194 | 3957968476 | 3572679509 | 6322241681 | 2609457092 | 8196147110 | 3327495621 | 7162872154 |
| | 1155866900 | 1751313485 | .... | | | | | |
| 577 | 1733102253 | 0329289428 | 0762564991 | 3344887348 | 3535528596 | 1871750433 | 2755632582 | 3223570190 |
| | 6412478336 | 2218370883 | 8821490467 | 9376083188 | 9081455805 | 8925476603 | 1195840554 | 5927209705 |
| | 3726169844 | 0207972270 | 3639514731 | 3691507798 | 9601386481 | 8024263431 | 5424610051 | 9930675909 |
| | 8786828422 | 8769497400 | 3466204506 | 0658578856 | 1525129982 | 6689774696 | 7071057192 | 3743500866 |
| | 5511265164 | 6447140381 | 2824956672 | 4436741767 | 7642980935 | 8752166377 | 8162911611 | 7850953206 |
| | 2391681109 | 1854419410 | 7452339688 | 0415944540 | 7279029462 | 7383015597 | 9202772963 | 6048526863 |
| | 0849220103 | 9861351819 | 7573656845 | 7538994800 | 6932469012 | 1317157712 | 3050259965 | 3379549393 |
| | 4142114384 | 7487001733 | .... | | | | | |
| 587 | 1703577512 | 7768313458 | 2623509369 | 1763202725 | 7240204429 | 3015332197 | 6149914821 | 1243611584 |
| | 3270868824 | 5315161839 | 8637137989 | 7785349233 | 3901192504 | 2589437819 | 4207836456 | 5587734241 |
| | 9080068143 | 1005110732 | 5383304940 | 3747870528 | 1090289608 | 1771720613 | 2879045996 | 5928449744 |
| | 4633730834 | 7529812606 | 4735945485 | 5195911413 | 9693356047 | 7001703577 | .... | |
| 593 | 1686340640 | 8094435075 | 8853288364 | 2495784148 | 3979763912 | 3102866779 | 0893760539 | 6290050590 |
| | 2192242833 | 0522765598 | 6509274873 | 5244519392 | 9173693086 | 0033726812 | 8161888701 | 5177065767 |
| | 2849915682 | 9679595278 | 2462057335 | 5817875210 | 7925801011 | 8043844856 | 6610455311 | 9730185497 |
| | 4704890387 | 8583473861 | 7200674536 | 2563237774 | 0303541315 | 3456998313 | 6593591905 | 5649241146 |
| | 7116357504 | 2158516020 | 2360876897 | 1332209106 | 2394603709 | 9494097807 | 7571669477 | 2344013490 |
| | 7251264755 | 4806070826 | 3069139966 | 2731871838 | 1112984822 | 9342327150 | 0843170320 | 4047217537 |
| | 9426644182 | 1247892074 | 1989881956 | 1551433389 | 5446880269 | 8145025295 | 1096121416 | 5261382799 |
| | 3254637436 | 7622259696 | 4586846543 | 0016863406 | .... | | | |
| 599 | 1669449081 | 8030050083 | 4724540901 | 5025041736 | 2270450751 | 2520868113 | 5225375626 | 0434056761 |
| | 2687813021 | 7028380634 | 3906510851 | 4190317195 | 3255425709 | 5158597662 | 7712854757 | 9298831385 |
| | 6427378964 | 9415692821 | 3689482470 | 7846410684 | 4741235392 | 3205342237 | 0617696160 | 2671118530 |
| | 8848080133 | 5559265442 | 4040066777 | 9632721202 | 0033388981 | 6360601001 | .... | |
| 601 | 1663893510 | 8153078202 | 9950083194 | 6755407653 | 9101497504 | 1597337770 | 3826955074 | 8752079866 |
| | 8885191347 | 7537437603 | 9933444259 | 5673876871 | 8801996672 | 2129783693 | 8435940099 | 8336106489 |
| | 1846921797 | 0049916805 | 3244592346 | 0898502495 | 8402662229 | 6173044925 | 1247920133 | 1114808652 |
| | 2462562396 | 0066555740 | 4326123128 | 1198003327 | 7870216306 | 1564059900 | 1663893510 | .... |

NACHLASS.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 607 | 1647446457 | 9901153212 | 5205930807 | 2487644151 | 5650741350 | 9060955518 | 9456342668 | 8632619439 |
| | 8682042833 | 6079077429 | 9835255354 | 2009884678 | 7479406919 | 2751235584 | 8434925864 | 9093904448 |
| | 1054365733 | 1136738056 | 0131795716 | 6392092257 | 00164[illegible]4464 | .... | | |
| 613 | 1631321370 | 3099510603 | 5889070146 | 8189233278 | 9559543230 | 0163132137 | .... | |
| 617 | 1620745542 | 9497568881 | 6855753646 | 6774716369 | 5299837925 | 4457050243 | 1118314424 | 6353322528 |
| | 3630470016 | ...? | | | | | | |
| 619 | 1615508885 | 2988691437 | 8029079159 | 9353796445 | 8804523424 | 8788368336 | 0258481421 | 6478190630 |
| | 0484652665 | 5896607431 | 3408723747 | 9806138933 | 7641357027 | 4636510500 | 8077544426 | 4943457189 |
| | 0145395799 | 6768982229 | 4022617124 | 3941841680 | 1292407108 | 2390953150 | 2423263327 | 9483037156 |
| | 7043618739 | 9030694668 | 8206785137 | 3182552504 | 0387722132 | 4717285945 | 0726978998 | 3844911147 |
| | 0113085621 | 9709208400 | 6462035541 | 1954765751 | 2116316639 | 7415185783 | 5218093699 | 5153473344 |
| | 1033925686 | 5912762520 | 1938610662 | 3586429725 | 3634894991 | 9224555735 | 0565428109 | 8546042003 |
| | 2310177705 | 9773828756 | 0581583198 | 7075928917 | 6090468497 | 5767366720 | 5169628432 | 9563812600 |
| | 9693053312 | 7932148626 | 8174474959 | 6122778675 | 2827140549 | 2730210016 | .... | |
| 631 | 1584786053 | 8827258320 | 1267828843 | 1061806656 | 1014263074 | 4849445324 | 8811410459 | 5879556259 |
| | 9049128367 | 6703645007 | 9239302694 | 1362916006 | 3391442155 | 3090332805 | 0713153724 | 2472266244 |
| | 0570522979 | 3977812995 | 2456418383 | 5182250396 | 1965134706 | 8145800316 | 9572107765 | 4516640253 |
| | 5657686212 | 3613312201 | 8526148969 | 8890649762 | 2820919175 | 9112519809 | 8256735340 | 7290015847 |
| | .... | | | | | | | |
| 641 | 1560062402 | 4960998439 | 9375975039 | 0015600624 | .. | | | |
| 643 | 1555209953 | 3437013996 | 8895800933 | 1259720062 | 2083981337 | 4805598755 | 8320373250 | 3888024883 |
| | 3592534992 | 2239502332 | 8149300155 | .?.. | | | | |
| 647 | 1545595054 | 0958268933 | 5394126738 | 7944358578 | 0525502318 | 3925811437 | 4034003091 | 1901081916 |
| | 5378670788 | 2534775888 | 7171561051 | 0046367851 | 6228748068 | 0061823802 | 1638330757 | 3415765069 |
| | 5517774343 | 1221020092 | 7357032457 | 4961360123 | 6476043276 | 6615146831 | 5301391035 | 5486862442 |
| | 0401854714 | 0649149922 | 7202472952 | 0865533230 | 2936630602 | 7820710973 | 7248840803 | 7094281298 |
| | 2998454404 | 9459041731 | 0664605873 | 2612055641 | 4219474497 | 6816074488 | 5625965996 | 9088098918 |
| | 0834621329 | 2117465224 | 1112828438 | 9489953632 | 1483771251 | 9319938176 | 1978361669 | 2426584234 |
| | 9304482225 | 6568778979 | 9072642967 | 5425038639 | 8763523956 | 7233384853 | 1684698608 | 9644513137 |
| | 5579598145 | 2859350850 | 0772797527 | 0479134466 | 7697063369 | 3972179289 | 0262751159 | 1962905718 |
| | 7017001545 | .... | | | | | | |
| 653 | 1531393568 | 1470137825 | 4211332312 | 4042879019 | 9081163859 | 1117917304 | 7473200612 | 5574272588 |
| | 0551301684 | 5329249617 | 1516079632 | 4655436447 | 1669218989 | 2802450229 | 7090352220 | 5206738131 |
| | 6998468606 | 4318529862 | 1745788667 | 6875957120 | 9800918836 | 1408882082 | 6952526799 | 3874425727 |
| | 4119448698 | 3154670750 | 3828483920 | 3675344563 | 5528330781 | 0107197549 | 7702909647 | 7794793261 |
| | 8683001531 | .... | | | | | | |

VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 659 | 1517450682 | 8528072837 | 6327769347 | 4962063732 | 9286798179 | 0591805766 | 3125948406 | 6767830045 |
| | 5235204855 | 8421851289 | 8330804248 | 8619119878 | 6039453717 | 7541729893 | 7784522003 | 0349013657 |
| | 0561456752 | 6555386949 | 9241274658 | 5735963581 | 1836115326 | 2518968133 | 5356600910 | 4704097116 |
| | 8437025796 | 6616084977 | 2382397572 | 0789074355 | 0834597875 | 5690440060 | 6980273141 | 1229135053 |
| | 1107738998 | 4825493171 | 4719271623 | 6722306525 | 0379362670 | 7132018209 | 4081942336 | 8740515933 |
| | 2321699544 | 7647951441 | 5781487101 | 6691957511 | 3808801213 | 9605462822 | 4582701062 | 2154779969 |
| | 6509863429 | 4385432473 | 4446130500 | 7587253414 | 2640364188 | 1638846737 | 4810318664 | 6433990895 |
| | 2959028831 | 5629742033 | 3839150227 | 6176024279 | 2109256449 | 1654021244 | 3095599393 | 0197268588 |
| | 7708649468 | 8922610015 | .... | | | | | |
| 661 | 1512859304 | 0847201210 | 2874432677 | 7609682299 | 5461422087 | 7458396369 | 1376701966 | 7170953101 |
| | 3615733736 | 7624810892 | 5869894099 | 8487140695 | 9152798789 | 7125567322 | 2390317700 | 4538577912 |
| | 2541603630 | 8623298033 | 2829046898 | 6384266263 | 2375189107 | 4130105900 | 1512859304 | .... |
| 673 | 1485884101 | 0401188707 | 2808320950 | 9658246656 | 7607726597 | 3254086181 | 2778603268 | 9450222882 |
| | 6151560178 | 3060921248 | 1426448736 | 9985141158 | 9895988112 | 9271916790 | 4903417533 | 4323922734 |
| | 0267459138 | 1872213967 | 3105497771 | 1738484398 | 2169390787 | 5185735512 | 6300148588 | .... |
| 677 | 1477104874 | 4460856720 | 8271787296 | 8980797636 | 6322008862 | 6292466765 | 1403249630 | 7237813884 |
| | 7858197932 | 0531757754 | 8005908419 | 4977843426 | 8833087149 | 1875923190 | 5465288035 | 4505169867 |
| | 0605612998 | 5228951255 | 5391432791 | 7282127031 | 0192023633 | 6779911373 | 7075332348 | 5967503692 |
| | 7621861152 | 1418020679 | 4682422451 | 9940915805 | 0221565731 | 1669128508 | 1240768094 | 5347119645 |
| | 4948301329 | 3943870014 | .... | | | | | |
| 683 | 1464128843 | 3382137628 | 1112737920 | 9370424597 | 3645680819 | 9121522693 | 9970717423 | 1332357247 |
| | 4377745241 | 5812591508 | 0527086383 | 6017569546 | 1200585651 | 5373352855 | 0512445095 | 1683748169 |
| | 8389458272 | 3279648609 | 0775988286 | 9692532942 | 8989751098 | 0966325036 | 6032210834 | 5534407027 |
| | 8184480234 | 2606149341 | 1420204978 | 0380673499 | 2679355783 | 3089311859 | 4436310395 | 3147877013 |
| | 1771595900 | 4392386530 | 0146412884 | .... | | | | |
| 691 | 1447178002 | 8943560057 | 8871201157 | 7424023154 | 8480463096 | 9609261939 | 2185238784 | 3704775687 |
| | 4095513748 | 1910274963 | 8205499276 | 4109985528 | 2199710564 | 3994211287 | 9884225759 | 7684515195 |
| | 3690303907 | 3806078147 | 6121562952 | 2431259044 | 8625180897 | 2503617945 | 0072358900 | 1447178022 |
| | .... | | | | | | | |
| 701 | 1426533523 | 5378031383 | 7375178316 | 6904422253 | 9229671897 | 2895863052 | 7817403708 | 9871611982 |
| | 8815977175 | 4636233951 | 4978601997 | 1469329529 | 2439372325 | 2496433666 | 1911554921 | 5406562054 |
| | 2082738944 | 3651925820 | 2567760342 | 3680456490 | 7275320970 | 0427960057 | 0613409415 | 1212553495 |
| | 0071326676 | 1768901569 | 1868758915 | 8345221112 | 6961483594 | 8644793152 | 6390870185 | 4493580599 |
| | 1440798858 | 7731811697 | 5748930099 | 8573466476 | 4621968616 | 2624821683 | 3095577746 | 0770328102 |
| | 7104136947 | 2182596291 | 0128388017 | 1184022824 | 5363766048 | 5021398002 | 8530670470 | 7560627674 |
| | 7503566333 | 8088445078 | 4593437945 | 7917261055 | 6348074179 | 7432239657 | 6319543509 | 2724679029 |
| | 9572039942 | 9386590584 | 8787446504 | 9928673323 | 8231098430 | 8131241084 | 1654778887 | 3038516405 |
| | 1355206847 | 3609129814 | 5506419400 | 8559201141 | 2268188302 | 4251069900 | .... | |

NACHLASS.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 709 | 1410437235 | 5430183356 | 8406205923 | 8363892806 | 7700987306 | 0648801128 | 3497884344 | 1466854724 | |
| | 9647390691 | 1142454160 | 7898448519 | 0409026798 | 3074753173 | 4837799717 | 9125528913 | 9633286318 | |
| | 7588152327 | 2214386459 | 8025387870 | 2397743300 | 4231311706 | 6290550070 | 5218617771 | 5091678420 | |
| | 3102961918 | 1946403385 | 0493653032 | 4400564174 | 8942172073 | 3427362482 | 3695345557 | 1217080394 | |
| | 9224259520 | 4513399153 | 7376586741 | 8899858956 | 2764456981 | 6643159379 | 4076163610 | 7193229901 | |
| | 2693935119 | 8871650211 | 5655853314 | 5275035260 | 9308885754 | 5839210155 | 4480959097 | 3201692524 | |
| | 6826516220 | 0282087447 | 1086036671 | 9681241184 | 7672778561 | 3540197461 | 2129760225 | 6699576868 | |
| | 8293370944 | 9929478138 | 2228490832 | 1579689703 | 8081805359 | 6614950634 | 6967559943 | 5825105782 | |
| | 7926657263 | 7517630465 | 4442877291 | 9605077574 | 0479548660 | 0846262341 | 3258110014 | .... | |
| 719 | 1390320584 | 1446453407 | 5104311543 | 8108484005 | 5632823365 | 7858136300 | 4172461752 | 4339360222 | |
| | 5312934631 | 4325452016 | 6898470097 | 3574408901 | 2517385257 | 3018080667 | 5938803894 | 2976356050 | |
| | 0695410292 | 0723226703 | 7552155771 | 9054242002 | 7816411682 | 8929068150 | 2086230876 | 2169680111 | |
| | 2656467315 | 7162726008 | 3449235048 | 6787204450 | 6258692628 | 6509040333 | 7969401947 | 1488178025 | |
| | 0347705146 | 0361613351 | 8776077885 | 9527121001 | .... | | | | |
| 727 | 1375515818 | 4319119669 | 8762035763 | 4112792297 | 1114167812 | 9298486932 | 5997248968 | 3631361760 | |
| | 6602475928 | 4731774415 | 4057771664 | 3741403026 | 1348005502 | 0632737276 | 4786795048 | 1430536451 | |
| | 1691884456 | 6712517193 | 9477303988 | 9958734525 | 4470426409 | 9037138927 | 0976616231 | 0866574965 | |
| | 6121045392 | 0220082530 | 9491059147 | 1801925722 | 1458046767 | 5378266850 | 0687757909 | 2159559834 | |
| | 9381017881 | 7056396148 | 5557083906 | 4649243466 | 2998624484 | 1815680880 | 3301237964 | 2365887207 | |
| | 7028885832 | 1870701513 | 0674002751 | 0316368638 | 2393397524 | 0715268225 | 5845942228 | 3356258596 | |
| | 9738651994 | 4979367262 | 7235213204 | 9518569463 | 5488308115 | 5433287482 | 8060522696 | 0110041265 | |
| | 4745529573 | 5900962861 | 0729023383 | 7689133425 | 0343878954 | 6079779917 | 4690508940 | 8528198074 | |
| | 2778541953 | 2324621733 | 1499312242 | 0907840440 | 1650618982 | 1182943603 | 8514442916 | 0935350756 | |
| | 5337001375 | .... | | | | | | | |
| 729 | 1371742112 | 4828532235 | 9396433470 | 5075445816 | 1865569272 | 9766803840 | 8779149519 | 8902606310 | 0137174111 |
| 733 | 1364256480 | 2182810368 | 3492496589 | 3587994542 | 9740791268 | 7585266030 | 0136425648 | .... | |
| 739 | 1353179972 | 9364005412 | 7198917456 | 0216508795 | 6698240866 | 0351826792 | 9634641407 | 3071718538 | |
| | 5656292286 | 8741542625 | 1691474966 | 1705006765 | 8998646820 | 0270635994 | 5872801082 | 5439783491 | |
| | 2043301759 | 1339648173 | 2070365358 | 5926928281 | 4614343707 | 7131258457 | 3748308525 | 0338294993 | |
| | 2341001353 | .... | | | | | | | |
| 743 | 1345895020 | 1884253028 | 2637954239 | 5693135935 | 3970390309 | 5358546433 | 3781965006 | 7294751009 | |
| | 4212651413 | 1897711978 | 4656796769 | 8519515477 | 7927321668 | 9098250336 | 4737550471 | 0632570659 | |
| | 4885598923 | 2839838492 | 5975773889 | 6366083445 | 4912516823 | 6877523553 | 1628532974 | 4279946164 | |
| | 1991924629 | 8788694481 | 8304172274 | 5625841184 | 3876177658 | 1426648721 | 3997308209 | 9596231493 | |
| | 9434724091 | 5208613728 | 1292059219 | 3808882907 | 1332436069 | 9865410497 | 9811574697 | 1736204576 | |
| | 0430686406 | 4602960969 | 0444145356 | 6621803499 | 3270524899 | 0578734858 | 6810228802 | 1534320323 | |
| | 0148048452 | 2207267833 | 1090174966 | 3526244952 | 8936742934 | 0511440107 | 6716016150 | 7402422611 | |
| | 0363391655 | 4508748317 | 6312247644 | 6837146702 | 5572005383 | 5800807537 | 0121130551 | 8169582772 | |
| | 5437415881 | 5612382234 | 1857335127 | 8600269179 | 0040376850 | 6056527590 | 8479138627 | 1870794078 | |
| | 0619111709 | 2866756393 | 0013458950 | .... | | | | | |

## VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 751 | 1331537922 | 7696404793 | 6085219707 | 0572569906 | 7909454061 | 2516644474 | 0346205059 | 9201063246 |
| | 3382157123 | 8348868173 | 7656438053 | 9234327563 | 2490013313 | .... | | |
| 757 | 1321003963 | 0118890356 | 6710700132 | .... | | | | |
| 761 | 1314060446 | 7805319053 | 8764783180 | 0262812089 | 3561103810 | 7732956636 | 0052362417 | 8712220762 |
| | 1530591327 | 2010512483 | 5742444152 | 4310118265 | 4402102496 | 7148488830 | 4862023633 | 0880420499 |
| | 3429697766 | 0972404730 | 6176084099 | 8685939353 | 2194480946 | 1235216819 | 9737187910 | 6438896189 |
| | 2247043363 | 9947437582 | 1287779237 | 8449408672 | 7989487516 | 4257355847 | 5689881734 | 3597897503 |
| | 2831311169 | 5137976346 | 9119579500 | 6570302233 | 9027395269 | 3823915900 | 1314060446 | .... |
| 769 | 1300390117 | 0331105331 | 3994798439 | 5318595378 | 6736020806 | 2418725617 | 6853053916 | 7730323097 |
| | 5292587776 | 3328998699 | 6098829648 | 8946684005 | 2013604681 | 4044213263 | 9791937381 | 2743823146 |
| | 9440832249 | 6749024707 | 4122236671 | 0013003901 | .... | | | |
| 773 | 1293661060 | 8020698576 | 9728331177 | 2315653298 | 8357050452 | 7813712807 | 2445019404 | 9159120310 |
| | 4786545924 | 9676584734 | 7994825355 | 7567917205 | 6921096675 | 2910737386 | 8046371798 | 1888745148 |
| | 7710219922 | 3803363518 | 7380833816 | 3001293661 | .... | | | |
| 787 | 1270648030 | 4953527318 | 9326336543 | 8373570520 | 9636923031 | 7662007613 | 8881829733 | 1639135939 |
| | 3392630241 | 4231257941 | 3501905972 | 0437433290 | 9783989834 | 8157560353 | 7814483387 | 3476493011 |
| | 4338322744 | 5997458703 | 9390088943 | 3621346886 | 9123252838 | 9580686149 | 9364675984 | 7322236340 |
| | 3336721728 | 0813214739 | 5171337484 | 1168996188 | 0339085133 | 4180432020 | 3303684879 | 2884371029 |
| | 2249047013 | 9771283334 | 3108005082 | 3921219822 | 1092737306 | 2261733494 | 2820838627 | 7001270648 |
| | .... | | | | | | | |
| 797 | 1234705144 | 2910915934 | 7333324968 | 6323713927 | 2271016311 | 1668757841 | 9071318193 | 2243922208 |
| | 2810539523 | 2120431693 | 8319447929 | 7363119196 | 9887076537 | 0138017365 | 8720200752 | 8230865746 |
| | 3495608331 | 9949811794 | 2283563362 | 6097867001 | .... | | | |
| 809 | 1236093943 | 1396786153 | 7478368355 | 9950556242 | 2744128553 | 7700865265 | 7601977730 | 3090234857 |
| | 8491965389 | 3695920889 | 9876390605 | 6860321384 | 4232163164 | 4004944375 | 7723587144 | 6229913473 |
| | 4239802224 | 9690976314 | 2130803461 | 0630407911 | 0012360939 | .... | | |
| 811 | 1233045622 | 6880394574 | 5992601726 | 2638717632 | 3524044389 | 6424167694 | 2046833733 | 6621434993 |
| | 8347718865 | 5980271270 | 0369913686 | 8064118372 | 3797780517 | 8791615289 | 7657213316 | 8927250308 |
| | 2614056720 | 0986436498 | 1304315659 | 6794081381 | 0110974106 | 0419235311 | 7139334153 | 3637484386 |
| | 9297163995 | 0678175092 | 4784217016 | 0295930949 | 4451294697 | 9038224414 | 3033292231 | 8125770633 |
| | 3141800246 | 6091245376 | 0789149198 | 5203432527 | 7435263104 | 8088779284 | 8335388409 | 3711467324 |
| | 2909987669 | 3437731196 | 0542340073 | 9827373612 | 8236744759 | 5561035738 | 3230579331 | 4426633785 |
| | 4300616523 | 8113440197 | 2872996300 | 8631319338 | 8162762022 | 1948212083 | 8471023427 | 8668310727 |
| | 4969173859 | 4327990135 | 6350184956 | 8434032059 | 1862898890 | 2589395807 | 6448828606 | 6584463623 |
| | 1341307028 | 3600493218 | 2490752137 | 8298397040 | 6995055487 | 0530209617 | 7538369667 | 0776818742 |
| | 2934648381 | 9973339087 | 3462392108 | 5080147965 | 4747223647 | 3489519112 | 2071516646 | 1159062885 |
| | 3267370900 | 1233045662 | .... | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 821 | 1218026796 | 5895249695 | 4933008526 | 1875761266 | 7478684531 | 0596833130 | 3288672350 | 7917174177 |
| | 8319123020 | 7064555420 | 2192448233 | 8611449451 | 8879415347 | 1376370280 | 1461632155 | 9074299634 |
| | 5919610231 | 4250913520 | 0974421437 | 2716199756 | 3946406820 | 9500609013 | 3982947624 | 8477466504 |
| | 2630937880 | 6333739342 | 2655298416 | 5651644336 | 1753958587 | 0889159561 | 5103532277 | 7101096224 |
| | 1169305724 | 7259439707 | 6735688185 | 1400730816 | 0779537149 | 8172959805 | 1157125456 | 7600487210 |
| | 7186358099 | 8781973203 | 4104750904 | 5066991473 | 8124238733 | 2521315468 | 9403166869 | 6711327649 |
| | 2082825822 | 1680876979 | 2935444579 | 7807551766 | 1388550548 | 1120584652 | 8623629719 | 8538367844 |
| | 0925700365 | 4080389768 | 5749086479 | 9025578562 | 7283800243 | 6053593179 | 0499390986 | 6017052375 |
| | 1522533495 | 7369062119 | 3666260657 | 7344701583 | 4348355663 | 8246041412 | 9110840438 | 4896467722 |
| | 2898903775 | 8830694275 | 2740560292 | 3264311814 | 8599269183 | 9220462850 | 1827040194 | 8842874543 |
| | 2399512789 | 2813641900 | 1218026796 | .... | | | | |
| 823 | 1215066828 | 6755771567 | 4362089914 | 9453219927 | 0959902794 | 6537059538 | 2746051032 | 8068043742 |
| | 4058323207 | 7764277035 | 2369380315 | 9173754556 | 5006075334 | 1433778857 | 8371810449 | 5747266099 |
| | 6354799513 | 9732685297 | 6913730255 | 1640340218 | 7120291616 | 0388821385 | 1761846901 | 5795868772 |
| | 7825030376 | 6707168894 | 2891859052 | 2478736330 | 4981773997 | 5698663426 | 4884568651 | 2758201701 |
| | 0935601458 | 0801944106 | 9258809234 | 5078979343 | 8639125151 | 8833535844 | 4714459295 | 2612393681 |
| | 6524908869 | 9878493317 | 1324422843 | 2563791008 | 5054678007 | 2904009720 | 5346294046 | 2725394896 |
| | 7193195625 | 7594167679 | 2223572296 | 4763061968 | 4082624544 | 3499392466 | 5856622114 | 2162818955 |
| | 0425273390 | 0364520048 | 6026731470 | 2308626974 | 4835965978 | 1287970838 | 3961117861 | 4823815309 |
| | 8420413122 | 7217496962 | 3329283110 | 5710814094 | 7752126366 | 9501822600 | 2430133657 | 3511543134 |
| | 8724179829 | 8906439854 | 1919805589 | 3074119076 | 5492102065 | 6136087484 | 8116646415 | 5528554070 |
| | 4738760631 | 8347509113 | 0012150668 | .... | | | | |
| 827 | 1209189842 | 8053204353 | 0834340991 | 5356711003 | 6275695284 | 1596130592 | 5030229746 | 0701330108 |
| | 8270858524 | 7883917775 | 0906892382 | 1039903264 | 8125755743 | 6517533252 | 7206771463 | 1197097944 |
| | 3772672309 | 5525997581 | 6203143893 | 5912938331 | 3180169286 | 5779927448 | 6094316807 | 7388149939 |
| | 5405078597 | 3397823458 | 2829504232 | 1644498186 | 2152357920 | 1934703748 | 4885126964 | 9334945586 |
| | 4570737605 | 8041112454 | 6553808948 | 0048367593 | 7122128174 | 1233373639 | 6614268440 | 1451027811 |
| | 3663845223 | 7001209189 | .... | | | | | |
| 829 | 1206272617 | 6115802171 | 2907117008 | 4439083232 | 8106151990 | 3498190591 | 0735826296 | 7430639324 |
| | 4873341375 | 1507840772 | 0144752714 | 1133896260 | 5548854041 | 0132689987 | 9372738238 | 8419782870 |
| | 9288299155 | 6091676718 | 9384800965 | 0180940892 | 6417370325 | 6936067551 | 2665862484 | 9215922798 |
| | 5524728588 | 6610373944 | 5114595898 | 6731001206 | .... | | | |
| 839 | 1191895113 | 2300357568 | 5339690107 | 2705601907 | 0321811680 | 5721096543 | 5041716328 | 9630512514 |
| | 8986889153 | 7544696066 | 7461263408 | 8200238379 | 0226460071 | 5137067938 | 0214541120 | 3814064362 |
| | 3361144219 | 3087008343 | 2697926102 | 5029797377 | 8307508939 | 2133492252 | 6817640047 | 6758045292 |
| | 0143027413 | 5876042908 | 2240762812 | 8724672228 | 8438617401 | 6686531585 | 2205005959 | 4755661501 |
| | 7878426698 | 4505363528 | 0095351609 | 0584028605 | 4827175208 | 5816448152 | 5625744934 | 4457687723 |
| | 4803337306 | 3170441001 | .... | | | | | |

## VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 841 | 1189060642 | 0927467300 | 8323424494 | 6492271105 | 8263971462 | 5445897740 | 7847800237 | 8121284185 |
| | 4934601664 | 6848989298 | 4542211652 | 7942925089 | 1795481569 | 5600475624 | 2568370988 | 9203329369 |
| | 7978596908 | 4423305588 | 5850178359 | 0963139120 | 0951248513 | 6741973840 | 6658739595 | 7193816884 |
| | 6611177170 | 0356718192 | 6278240190 | 2497027348 | 3947681351 | 7479191438 | 7633769322 | 2354340071 |
| | 3436385255 | 6480380499 | 4054696789 | 5362663495 | 8382877526 | 7538644470 | 8680142687 | 2770511296 |
| | 0760998810 | 9393579072 | 5326991676 | 5755053507 | 7288941736 | 0285374554 | 1022592152 | 1997621878 |
| | 7158145065 | 3983353151 | 0107015457 | 7883472057 | 0749108204 | 5184304399 | 5243757431 | 6290130796 |
| | 6706302021 | 4030915576 | 6944114149 | 8216409036 | 8608799048 | 7514863258 | 0261593341 | 2604042806 |
| | 1831153388 | 8228299643 | 2818073721 | 7598097502 | 9726516052 | 3186681520 | 8085612366 | 2306777645 |
| | 6599286563 | 6147443519 | 6195005945 | 3032104637 | 3365041617 | 1224732461 | 3555291319 | 8573127229 |
| | 4887039239 | 0011890606 | .... | | | | | |
| 853 | 1172332942 | 5556858147 | 7139507620 | 1641266119 | 5779601406 | 7995310668 | 2297772567 | 4091441969 |
| | 5193434935 | 5216881594 | 3728018757 | 3270808909 | 7303634232 | 1229126260 | 2579132473 | 6225087924 |
| | 9706916764 | 3610785463 | 0715123094 | 9589683470 | 1055099648 | 3001172332 | .... | |
| 857 | 1166861143 | 5239206534 | 4224037339 | 5565927654 | 6091015169 | 1948658109 | 6849474912 | 4854142357 |
| | 0595099183 | 1971995332 | 5554259043 | 1738623103 | 8506417736 | 2893815635 | 9893232805 | 3675612602 |
| | 1003500583 | 4305717619 | 6032672112 | 0186697782 | 9638273045 | 5075845974 | 3290548424 | 7374562427 |
| | 0711785297 | 5495915985 | 9976662777 | 1295215869 | 3115519253 | 2088681446 | 9078179696 | 6161026837 |
| | 8063010501 | 7502917152 | 8588098016 | 3360560093 | 3488914819 | 1365227537 | 9229871645 | 2742123687 |
| | 2812135355 | 8926487747 | 9579929988 | 3313885647 | 6079346557 | 7596266044 | 3407234539 | 0898483080 |
| | 5134189032 | 5052508751 | 4585764294 | 0490081680 | 2800466744 | 4574095682 | 6137689614 | 9358826371 |
| | 0618436406 | 0676779463 | 2438739789 | 9649941656 | 9428238039 | 6732788798 | 1330221703 | 6172695449 |
| | 2415402567 | 0945157526 | 2543757292 | 8821470245 | 0408401400 | 2333722287 | 0478413068 | 8448074679 |
| | 1131855309 | 2182030338 | 3897316219 | 3698949824 | 9708284714 | 1196198366 | 3943990665 | 1108518086 |
| | 3477246207 | 7012835472 | 5787631271 | 8786464410 | 7351225204 | 8007001166 | .... | |
| 859 | 1164144353 | 8998835855 | 6461001164 | .... | | | | |
| 863 | 1158748551 | 5643105446 | 1181923522 | 5955967555 | 0405561993 | 0475086906 | 1413673232 | 9084588644 |
| | 2641946697 | 5666289417 | 1494785631 | 5179606025 | 4924681344 | 1483198146 | 0043174971 | 0312862108 |
| | 9223638470 | 4519119351 | 1008111239 | 8609501738 | 1228273464 | 6581691772 | 8852838933 | 9513325608 |
| | 3429895712 | 6303592120 | 5098493626 | 8829663962 | 9200463499 | 4206257242 | 1784472769 | 4090382387 |
| | 0220162224 | 7972190034 | 7624565469 | 2931633835 | 4577056778 | 6790266512 | 1668597914 | 2526071842 |
| | 4101969872 | 5376593279 | 2584009269 | 9884125144 | 8435689455 | 3881807647 | 7404403244 | 4959443800 |
| | 6952491309 | 3858632676 | 7091541135 | 5735805330 | 2433371958 | 2850521436 | 8482039397 | 4507531865 |
| | 5851680185 | 3997682502 | 8968713789 | 1077636152 | 9548088064 | 8899188876 | 0139049826 | 1877172653 |
| | 5341830822 | 7124716106 | 6048667439 | 1657010438 | 7369640787 | 9490150637 | 3187033603 | 7079953650 |
| | 0579374275 | 7821552723 | 0590961761 | 2977983777 | 5202780996 | 5237543453 | 0706836616 | 4542294322 |
| | 1320973348 | 7833140208 | 5747392815 | 7589803012 | 7462340672 | 0741599073 | 0011587485 | .... |

NACHLASS.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 877 | 2140250855 | 1881413911 | 0604332953 | 2497149372 | 8620296465 | 2223489167 | 6168757126 | 5678449258 |
| | 8369441277 | 0809578107 | 1835803876 | 8529076396 | 8072976054 | 7320410490 | 3078677309 | 0079817559 |
| | 8631698973 | 7742303306 | 7274800456 | 1003420752 | 5655644241 | 7331812998 | 8597491448 | 1185860889 |
| | 3956670467 | 5028506271 | 3797035347 | 7765108323 | 8312428734 | 3215507411 | 6305587229 | 1904218928 |
| | 1641961231 | 4709236031 | 9270239452 | 6795895096 | 9213226909 | 9201824401 | 3683010262 | 2576966932 |
| | 7251995438 | 9965792474 | 3443557582 | 6681870011 | .... | | | |
| 881 | 1135073779 | 7956867196 | 3677639046 | 5380249716 | 2315550510 | 7832009080 | 5902383654 | 9375709421 |
| | 4123723041 | 9977298524 | 4040862656 | 0726447219 | 0692395005 | 6753688989 | 7843359818 | 3881952326 |
| | 9012485811 | 5777525539 | 1600454029 | 5119182746 | 8785471055 | 6186152099 | 8864926220 | 2643132803 |
| | 6322360953 | 4619750283 | 7684449489 | 2167990919 | 4097616345 | 0624290578 | 8876276958 | 0022701475 |
| | 5959137343 | 9273552780 | 9307604994 | 3246311010 | 2156640181 | 6118047673 | 0987514188 | 4222474460 |
| | 8399545976 | 4880817259 | 1214528944 | 3813847900 | 1135073779 | .... | | |
| 883 | 1132502831 | 2570781426 | 9535673839 | 1845979614 | 9490373725 | 9343148357 | 8708946772 | 3669309173 |
| | 2729331823 | 3295583238 | 9580973952 | 4348810872 | 0271800679 | 5016987542 | 4688561721 | 4043035107 |
| | 5877689694 | 2242355605 | 8890147225 | 3680634201 | 5855039637 | 5990939977 | 3499433748 | 5843714609 |
| | 2865232163 | 0804077010 | 1925754813 | 1370328425 | 8210645526 | 6138165345 | 4133635334 | 0883352208 |
| | 3805209513 | 0237825594 | 5639864099 | 6602441506 | 2287655719 | 1392978482 | 4462061155 | 1528878822 |
| | 1970954926 | 3873159682 | 8992072480 | 1812004530 | 0113250283 | .... | | |
| 887 | 1127395715 | 8962795941 | 3754227733 | 9346110484 | 7801578354 | 0022547914 | 3179155918 | 8275084554 |
| | 6786922209 | 6956031567 | 0800450958 | 2863585118 | 3765501691 | 0935738444 | 1939120631 | 3416009019 |
| | 1657271702 | 3675310033 | 8218714768 | 8838782412 | 6268320180 | 3833145434 | 0473506200 | 6764374295 |
| | 3776775648 | 2525366403 | 6076662908 | 6809470124 | 0135287485 | 9075535512 | 9650507328 | 0721533258 |
| | 1736189402 | 4802705749 | 7181510710 | 2593010146 | 5614430665 | 1634723788 | 0496054114 | 9943630214 |
| | 2051860202 | 9312288613 | 3032694475 | 7609921082 | 2998872604 | 2841037204 | 0586245772 | 2660653889 |
| | 5152198421 | 6459977452 | 0856820744 | 0811724915 | 4453213077 | 7903043968 | 4329199549 | 0417136414 |
| | 8816234498 | 3089064261 | 5558060879 | 3686583990 | 9808342728 | 2976324689 | 9661781285 | 2311161217 |
| | 5873731679 | 8196166854 | 5659526493 | 7993235625 | 7046223224 | 3517474633 | 5963923337 | 0913190529 |
| | 8759864712 | 5140924464 | 4870349492 | 6719278466 | 7418263810 | 5975197294 | 2502818489 | 2897406989 |
| | 8534385569 | 3348365276 | 2119503945 | 8850056369 | 7857948139 | 7970687711 | 3866967305 | 5242390078 |
| | 9177001127 | .... | | | | | | |
| 907 | 1102535832 | 4145534729 | 8787210584 | 3439911797 | 1334068357 | 2216097023 | 1532524807 | 0562293274 |
| | 5314222712 | 2381477398 | 0154355016 | 5380374862 | 1830209481 | 8081587651 | 5986769570 | 0110253583 |
| | .... | | | | | | | |
| 911 | 1097694840 | 8342480790 | 3402854006 | 5861690430 | 0548847420 | 4171240395 | 1701427003 | 2930845225 |
| | 0274423710 | 2085620197 | 5850713501 | 6465422612 | 5137211855 | 1042810098 | 7925356750 | 8232711306 |
| | 2568605927 | 5521405049 | 3962678375 | 4116355653 | 1284302963 | 7760702524 | 6981339187 | 7058177826 |
| | 5642151481 | 8880351262 | 3490669593 | 8529088913 | 2821075740 | 9440175631 | 1745334796 | 9264544456 |
| | 6410537870 | 4720087815 | 5872667398 | 4632272228 | 3205268935 | 2360043907 | 7936333699 | 2316136114 |
| | 1602634467 | 6180021953 | 8968166849 | 6158068057 | 0801317233 | 8090010976 | .... | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 919 | 1088139281 | 8280739934 | 7116430903 | 1556039173 | 0141458106 | 6376496191 | 5125136017 | 4102285092 |
| | 4918389553 | 8628944504 | 8966267682 | 2633297062 | 0239390642 | 0021762785 | 6365614798 | 6942328618 |
| | 0631120783 | 4602829162 | 1327529923 | 8302502720 | 3482045701 | 8498367792 | 0772578890 | 0979325353 |
| | 6452665941 | 2404787812 | 8400435255 | 7127312295 | 9738846572 | 3612622415 | 6692056583 | 2426550598 |
| | 4766050054 | 4069640914 | 0369967355 | 8215451577 | 8019586507 | 0729053318 | 8248095796 | 2568008705 |
| | 1142546245 | 9194776931 | 4472252448 | 3133841131 | 6648531011 | 9695321001 | .... | |
| 929 | 1076426164 | 8008611410 | 1184068891 | 2809472551 | 1302475780 | 4090419806 | 2432723358 | 4499461786 |
| | 8675995694 | 2949407965 | 5543595263 | 7244348762 | 1097954790 | 0968783638 | 3207750269 | 1065662002 |
| | 1528525296 | 0172228202 | 3681377825 | 6189451022 | 6049515608 | 1808396124 | 8654467168 | 9989235737 |
| | 3519913885 | 8988159311 | 0871905274 | 4886975242 | 1959095801 | 9375672766 | 4155905382 | 1313240043 |
| | 0570505920 | 3444564047 | 3627556512 | 3789020452 | 0990312163 | 6167922497 | 3089343379 | 9784714747 |
| | 0398277717 | 9763186221 | 7438105489 | 7739504845 | 9182916038 | 7513455328 | 3100107642 | .... |
| 937 | 1067235859 | 1248665955 | 1760939167 | 5560298826 | 0405549626 | 4674493062 | 9669156883 | 6712913553 |
| | 8954108858 | 0576307363 | 9274279615 | 7950907150 | 4802561366 | 0618996798 | 2924226254 | 0021344717 |
| | 1824973319 | 1035218783 | 3511205976 | 5208110992 | 5293489861 | 2592383137 | 6734258271 | 0779082177 |
| | 1611526147 | 2785485592 | 3159018143 | 0096051227 | 3212379935 | 9658484525 | 0800426894 | 3436499466 |
| | 3820704375 | 6670224119 | 5304162219 | 8505869797 | 2251867662 | 7534685165 | 4215581643 | 5432230522 |
| | 9455709711 | 8463180362 | 8601921024 | 5464247598 | 7193169690 | 5016008537 | 8868729989 | 3276414087 |
| | 5133404482 | 3906083244 | 3970117395 | 9445037353 | 2550693703 | 3084311632 | 8708644640 | 4589114194 |
| | 2369263607 | 2572038420 | 4909284951 | 9743863393 | 8100320170 | 7577374599 | 7865528281 | 7502668089 |
| | 6478121664 | 8879402347 | 9188900747 | 0651013874 | 0661686232 | 6574172892 | 2091782283 | 8847385272 |
| | 1451440768 | 4098185699 | 0394877267 | 8762006403 | 4151547498 | 9957310565 | 6350053361 | 7929562433 |
| | 2977588046 | 9583778014 | 9413020277 | 4813233724 | 6531483457 | 8441835645 | 6776947705 | 4429028815 |
| | 3681963713 | 9807897545 | 3575240128 | 0683030949 | 8399146811 | 3127001067 | .... | |
| 941 | 1062699256 | 1105207226 | 3549415515 | 4091392136 | 0255047821 | 4665249734 | 3251859723 | 6981934112 |
| | 6461211477 | 1519659936 | 2380446333 | 6875664187 | 0350690754 | 5164718384 | 6971307180 | 0850159404 |
| | 8884165781 | 0839532412 | 3163113708 | 8204038257 | 1732199787 | 4601487778 | 9585547290 | 1168969181 |
| | 7215727948 | 9904357066 | 9500531349 | 6280552603 | 6131774707 | 7577045696 | 0680127523 | 9107332624 |
| | 8671625929 | 8618490967 | 0563230605 | 7385759829 | 9681190223 | 1668437832 | 0935175345 | 3772582359 |
| | 1923485653 | 5600425079 | 7024442082 | 8905419766 | 2061636556 | 8544102019 | 1285866099 | 8937300743 |
| | 8894792773 | 6450584484 | 5908607863 | 9744952178 | 5334750265 | 6748140276 | 3018065887 | 3538788522 |
| | 8480340063 | 7619553666 | 3124335812 | 9649309245 | 4835281615 | 3028692879 | 9149840595 | 1115834218 |
| | 9160467587 | 6726886291 | 1795961742 | 8267800212 | 5398512221 | 0414452709 | 8831030818 | 2784272051 |
| | 0095642933 | 0499468650 | 3719447396 | 3868225292 | 2422954303 | 9319872476 | 0892667375 | 1328374070 |
| | 1381509032 | 9436769394 | 2614240170 | 0318809776 | 8331562167 | 9064824654 | 6227417640 | 8076514346 |
| | 4399574920 | 2975557917 | 1094580233 | 7938363443 | 1455897980 | 8714133900 | 1062699256 | .... |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 947 | 1055966209 | 0813093980 | 9926082365 | 3643083421 | 3305174234 | 4244984160 | 5068637803 | 5902851108 |
| | 7645195353 | 7486800422 | 3864836325 | 2375923970 | 4329461457 | 2333685322 | 0696937697 | 9936642027 |
| | 4551214361 | 1404435058 | 0781414994 | 7201689545 | 9345300950 | 3695881731 | 7845828933 | 4741288278 |
| | 7750791974 | 6568109820 | 4857444561 | 7740232312 | 5659978880 | 6758183738 | 1203801478 | 3526927138 |
| | 3315733896 | 5153115100 | 3167898627 | 2439281942 | 9778247096 | 0929250263 | 9915522703 | 2734952481 |
| | 5205913410 | 7708553316 | 2935586061 | 2460401267 | 1594508975 | 7127771911 | 2988384371 | 7001055966 |
| | .... | | | | | | | |
| 953 | 1049317943 | 3368310598 | 1112277019 | 9370409133 | 9979013641 | 1332633788 | 0377754459 | 6012591815 |
| | 3200419727 | 1773347324 | 2392444910 | 8079748163 | 6935991605 | 4564533053 | 5152151101 | 7838405036 |
| | 7261280167 | 8908709338 | 9296956977 | 9643231899 | 2654774396 | 6421825813 | 2214060860 | 4407135362 |
| | 0146904512 | 0671563483 | 7355718782 | 7911857292 | 7597061909 | 7586568730 | 3252885624 | 3441762854 |
| | 1448058761 | 8048268625 | 3934942287 | 5151164742 | 9171038824 | 7639034627 | 4921301154 | 2497376705 |
| | 1416579223 | 5047219307 | 4501573976 | 9150052465 | 8971668415 | 5299055613 | 8509968520 | 4616998950 |
| | 6820566631 | 6894018887 | 7229800629 | 5907660020 | 9863588667 | 3662119622 | 2455403987 | 4081846799 |
| | 5802728226 | 6526757607 | 5550891920 | 2518363064 | 0083945435 | 4669464847 | 8488982161 | 5949632738 |
| | 7198321091 | 2906610703 | 0430220356 | 7681007345 | 2256033578 | 1741867785 | 9391395592 | 8646379853 |
| | 0934879328 | 4365162644 | 2812172088 | 1427072402 | 9380902413 | 4312696747 | 1143756558 | 2371458551 |
| | 9412381951 | 7313746065 | 0577124868 | 8352570828 | 9611752360 | 9653725078 | 6988457502 | 6232948583 |
| | 4207764952 | 7806925498 | 4260230849 | 9475341028 | 3315844700 | 9443861490 | 0314795383 | 0010493179 |
| | .... | | | | | | | |
| 961 | 1040582726 | 3267429760 | 6659729448 | 4911550468 | 2622268470 | 3433922996 | 8782518210 | 1977107180 |
| | 0208116545 | 2653485952 | 1331945889 | 6982310093 | 6524453694 | 0686784599 | 3756503642 | 0395421436 |
| | 0041623309 | 0530697190 | 4266389177 | 9396462018 | 7304890738 | 8137356919 | 8751300728 | 4079084287 |
| | 2008324661 | 8106139438 | 0853277835 | 5879292403 | 7460978147 | 7627471383 | 9750260145 | 6815816857 |
| | 4401664932 | 3621227887 | 6170655567 | 1175858480 | 7492195629 | 5525494276 | 7950052029 | 1363163371 |
| | 4880332986 | 4724245577 | 5234131113 | 4235171696 | 1498439125 | 9105098855 | 3590010405 | .... |
| 967 | 1034126163 | 3919338159 | 2554291623 | 5780765253 | 3609100310 | 2378490175 | 8014477766 | 2874870734 |
| | 2295760082 | 7300930713 | 5470527404 | 3433298862 | 4612202688 | 7280248190 | 2792140641 | 1582213029 |
| | 9896587383 | 6608066184 | 0744570837 | 6421923474 | 6639089968 | 9762150982 | 4198552223 | 3712512926 |
| | 5770423991 | 7269966928 | 6452947259 | 5656670113 | 7538779731 | 1271975180 | 9720785935 | 8841778697 |
| | 0010341261 | .... | | | | | | |

## VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 971 | 1029866117 | 4047373841 | 4006179196 | 7044284243 | 0484057075 | 1802265705 | 4582904222 | 4510815594 |
| | 2327497425 | 5347064881 | 5693964984 | 5520082389 | 2893925789 | 9075120494 | 5357363543 | 7394438722 |
| | 9660144181 | 2564566632 | 5577960865 | 0875586199 | 7940267765 | 1995252517 | 1987641606 | 5911451513 |
| | 9051925849 | 6395468589 | 0834191555 | 0978372811 | 5345005149 | 5303870256 | 8692070030 | 8959835221 |
| | 4212152420 | 1853759011 | 5185272914 | 5211122554 | 0679711637 | 4871266735 | 5244078269 | 8249227600 |
| | 4119464469 | 6189495365 | 6024716786 | 8177136972 | 1936148500 | 9209062821 | 8331616889 | 8043254376 |
| | 9309989701 | 5388259526 | 2615859938 | 2080529557 | 1575695159 | 6292481977 | 3429454170 | 9577754891 |
| | 8640576725 | 0257466529 | 5511843460 | 3501544799 | 4761071060 | 7621009268 | 7950566426 | 5645726055 |
| | 6127705398 | 5581874356 | 3536766220 | 3913491246 | 1380020597 | 3225480947 | 4768280123 | 5859340885 |
| | 6848609680 | 7415056045 | 5141091658 | 0844490216 | 2718846549 | 9485066941 | 2976513079 | 2996910401 |
| | 6477857878 | 4757981462 | 4098867147 | 2708547888 | 7744593202 | 8836251287 | 3326467559 | 2175017507 |
| | 7239958805 | 5553038105 | 0463459752 | 8321318228 | 6302780658 | 5169927909 | 3717816685 | 8311019567 |
| | 4562306900 | 1029866117 | .... | | | | | |
| 977 | 1023541455 | 4288638689 | 8669396110 | 5424769705 | 1729785056 | 2947799585 | 8751279426 | 8167860798 |
| | 5623336745 | 1581780962 | 1289662251 | 5203684749 | 2523439099 | 2855209825 | 9979529170 | 9314227226 |
| | 2026612077 | 7891504605 | 9365404298 | 8741044012 | 2824974411 | 4656642784 | 0327555265 | 0972564580 |
| | 7574206755 | 5755926305 | 0155551218 | 0145295805 | 4800409416 | 5813715455 | 4759467758 | 4442169907 |
| | 8812691914 | 0225179119 | 7545500511 | 7707267144 | 3195449354 | 6980552712 | 3848515864 | 8925281473 |
| | 8996929575 | 6397154083 | 9505991811 | 6683725690 | 8904810644 | 8311156601 | 8423746161 | 7195496417 |
| | 6049129989 | 7645854657 | 1136151013 | 5060588945 | 7523029682 | 7021494370 | 5220061412 | 4872057318 |
| | 3215920163 | 7666525486 | 1821905787 | 1035776867 | 9631525076 | 7696090071 | 6479017400 | 2047082906 |
| | 8577277579 | 7358792221 | 0849539406 | 3459570112 | 5895598771 | 7502558853 | 6555721596 | 7246673490 |
| | 2765561924 | 2579524462 | 6407569498 | 4646878198 | 5670419651 | 9959058341 | 8628454452 | 4055224155 |
| | 5785009211 | 8730808597 | 7482088024 | 5649948822 | 9275285568 | 0655066550 | 1944728761 | 5148413510 |
| | 7471852610 | 0307062436 | 0286591606 | 9600818835 | 1627430910 | 9518955516 | 8884359815 | 7625583828 |
| | 0450358259 | 5087001025 | .... | | | | | |
| 985 | 1017295997 | 9654120040 | 6917599186 | 1648016276 | 7059674465 | 9206510681 | 5869786368 | 2604272634 |
| | 7914547504 | 1709053916 | 5818921668 | 3621566632 | 7568667544 | 8626653102 | 7466937945 | 0661241098 |
| | 6775178026 | 4496439471 | 0071210579 | 8575788402 | 8484231943 | 0315561139 | 3692777212 | 6144455747 |
| | 7110885045 | 7782299084 | 4554018311 | 2919633774 | 1607324516 | 7853509664 | 2929806714 | 1403865717 |
| | 1922685656 | 1546286876 | 9074262461 | 8514750762 | 9704984740 | 5900305188 | 1995896256 | 0122075279 |
| | 7558494404 | 8850111902 | 3597761953 | 2044760933 | 9104781281 | 7904374564 | 1912512716 | 1749745676 |
| | 5005086469 | 9898270600 | 2034587995 | 9308240081 | 5855198372 | 3296052553 | 4079348931 | 8415021563 |
| | 1739572756 | 5208545269 | 5829094608 | 5418107853 | 1637845556 | 7243153265 | 5157334689 | 7255506205 |
| | 4955875890 | 1322482197 | 5550356052 | 8992878942 | 0142421159 | 7151576805 | 6968465886 | 0630722278 |
| | 7585554425 | 2288911495 | 4221770091 | 5564598168 | 8708036622 | 5859267548 | 3214649033 | 5707019528 |
| | 5859615428 | 2807751434 | 3845371512 | 3092573753 | 8148524923 | 7029501525 | 9409969481 | 1800610376 |
| | 5987792472 | 0244150559 | 5116988809 | 7660225804 | 6795523906 | 4089521871 | 8209562565 | 5808748728 |
| | 5825025452 | 3499491555 | 0010172939 | .... | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 991 | 1009081735 | 6205852674 | 0665993945 | 5095862764 | 8839556004 | 0363269424 | 8234106962 | 6639757820 |
| | 3834510595 | 3582240161 | 4530776992 | 9364278506 | 5590312815 | 3380423814 | 3289606458 | 1231079717 |
| | 4571140262 | 3612512613 | 5216952573 | 1584258324 | 9243188698 | 2845610494 | 4500504540 | 8678102926 |
| | 3370332996 | 9727547931 | 3824419778 | 0020181634 | 7124117053 | 4813319878 | 9101917255 | 2976791120 |
| | 0807265388 | 4964682139 | 2532795156 | 4076690211 | 9071644803 | 2290615539 | 8587285570 | 1911806256 |
| | 3067608476 | 2865792129 | 1624621594 | 3491422805 | 2472250252 | 2704339051 | 4631685166 | 4984863773 |
| | 9656912209 | 8890010096 | .... | | | | | |
| 997 | 1003009027 | 0812437311 | 9358074222 | 6680040120 | 3610832497 | 4924774322 | 9689067201 | 6048144433 |
| | 2998996990 | 9729187562 | 6880641925 | 7773319959 | 8796389167 | 5025075225 | 6770310932 | 7983951855 |
| | 5667001003 | ..... | | | | | | |

# TAFEL

DER

# FREQUENZ DER PRIMZAHLEN.

NACHLASS.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 168 | 51 | 89 | 101 | 81 | 151 | 85 | 201 | 77 | 251 | 71 | 301 | 85 | 351 | 74 | 401 | 70 | 451 | 92 |
| 2 | 135 | 52 | 97 | 102 | 93 | 152 | 90 | 202 | 87 | 252 | 88 | 302 | 83 | 352 | 80 | 402 | 71 | 452 | 76 |
| 3 | 127 | 53 | 89 | 103 | 87 | 153 | 88 | 203 | 78 | 253 | 78 | 303 | 72 | 353 | 82 | 403 | 76 | 453 | 63 |
| 4 | 120 | 54 | 92 | 104 | 80 | 154 | 77 | 204 | 78 | 254 | 81 | 304 | 84 | 354 | 76 | 404 | 75 | 454 | 72 |
| 5 | 119 | 55 | 90 | 105 | 91 | 155 | 84 | 205 | 77 | 255 | 76 | 305 | 88 | 355 | 87 | 405 | 70 | 455 | 74 |
| 6 | 114 | 56 | 93 | 106 | 82 | 156 | 85 | 206 | 85 | 256 | 87 | 306 | 80 | 356 | 79 | 406 | 83 | 456 | 82 |
| 7 | 117 | 57 | 99 | 107 | 92 | 157 | 76 | 207 | 83 | 257 | 72 | 307 | 82 | 357 | 67 | 407 | 67 | 457 | 73 |
| 8 | 107 | 58 | 91 | 108 | 76 | 158 | 88 | 208 | 87 | 258 | 78 | 308 | 73 | 358 | 80 | 408 | 81 | 458 | 77 |
| 9 | 110 | 59 | 90 | 109 | 91 | 159 | 87 | 209 | 85 | 259 | 86 | 309 | 76 | 359 | 83 | 409 | 79 | 459 | 75 |
| 10 | 112 | 60 | 94 | 110 | 88 | 160 | 85 | 210 | 88 | 260 | 76 | 310 | 80 | 360 | 71 | 410 | 82 | 460 | 68 |
| 11 | 106 | 61 | 88 | 111 | 83 | 161 | 85 | 211 | 84 | 261 | 77 | 311 | 79 | 361 | 68 | 411 | 73 | 461 | 77 |
| 12 | 103 | 62 | 87 | 112 | 84 | 162 | 84 | 212 | 86 | 262 | 73 | 312 | 69 | 362 | 79 | 412 | 81 | 462 | 69 |
| 13 | 109 | 63 | 88 | 113 | 81 | 163 | 81 | 213 | 69 | 263 | 79 | 313 | 86 | 363 | 76 | 413 | 74 | 463 | 74 |
| 14 | 105 | 64 | 93 | 114 | 88 | 164 | 83 | 214 | 81 | 264 | 84 | 314 | 86 | 364 | 84 | 414 | 69 | 464 | 77 |
| 15 | 102 | 65 | 80 | 115 | 82 | 165 | 77 | 215 | 86 | 265 | 80 | 315 | 76 | 365 | 77 | 415 | 90 | 465 | 85 |
| 16 | 108 | 66 | 98 | 116 | 93 | 166 | 80 | 216 | 74 | 266 | 78 | 316 | 77 | 366 | 77 | 416 | 80 | 466 | 74 |
| 17 | 98 | 67 | 84 | 117 | 81 | 167 | 81 | 217 | 76 | 267 | 87 | 317 | 84 | 367 | 85 | 417 | 67 | 467 | 69 |
| 18 | 104 | 68 | 99 | 118 | 90 | 168 | 83 | 218 | 80 | 268 | 94 | 318 | 84 | 368 | 79 | 418 | 82 | 468 | 83 |
| 19 | 94 | 69 | 80 | 119 | 79 | 169 | 73 | 219 | 84 | 269 | 75 | 319 | 81 | 369 | 72 | 419 | 85 | 469 | 85 |
| 20 | 102 | 70 | 81 | 120 | 87 | 170 | 87 | 220 | 91 | 270 | 78 | 320 | 86 | 370 | 68 | 420 | 75 | 470 | 72 |
| 21 | 98 | 71 | 98 | 121 | 88 | 171 | 87 | 221 | 78 | 271 | 84 | 321 | 79 | 371 | 70 | 421 | 75 | 471 | 87 |
| 22 | 104 | 72 | 95 | 122 | 86 | 172 | 81 | 222 | 80 | 272 | 78 | 322 | 80 | 372 | 76 | 422 | 73 | 472 | 78 |
| 23 | 100 | 73 | 90 | 123 | 88 | 173 | 89 | 223 | 81 | 273 | 83 | 323 | 81 | 373 | 81 | 423 | 77 | 473 | 73 |
| 24 | 104 | 74 | 83 | 124 | 88 | 174 | 79 | 224 | 80 | 274 | 71 | 324 | 71 | 374 | 73 | 424 | 83 | 474 | 78 |
| 25 | 94 | 75 | 92 | 125 | 83 | 175 | 83 | 225 | 83 | 275 | 80 | 325 | 87 | 375 | 82 | 425 | 81 | 475 | 80 |
| 26 | 98 | 76 | 91 | 126 | 84 | 176 | 75 | 226 | 84 | 276 | 83 | 326 | 85 | 376 | 85 | 426 | 74 | 476 | 86 |
| 27 | 101 | 77 | 83 | 127 | 83 | 177 | 95 | 227 | 76 | 277 | 83 | 327 | 73 | 377 | 80 | 427 | 71 | 477 | 75 |
| 28 | 94 | 78 | 95 | 128 | 86 | 178 | 73 | 228 | 80 | 278 | 74 | 328 | 86 | 378 | 71 | 428 | 78 | 478 | 69 |
| 29 | 98 | 79 | 84 | 129 | 89 | 179 | 89 | 229 | 89 | 279 | 81 | 329 | 73 | 379 | 77 | 429 | 71 | 479 | 85 |
| 30 | 92 | 80 | 91 | 130 | 83 | 180 | 94 | 230 | 88 | 280 | 73 | 330 | 81 | 380 | 83 | 430 | 89 | 480 | 71 |
| 31 | 95 | 81 | 88 | 131 | 85 | 181 | 71 | 231 | 84 | 281 | 87 | 331 | 80 | 381 | 72 | 431 | 76 | 481 | 77 |
| 32 | 92 | 82 | 92 | 132 | 83 | 182 | 79 | 232 | 78 | 282 | 85 | 332 | 82 | 382 | 76 | 432 | 79 | 482 | 78 |
| 33 | 106 | 83 | 89 | 133 | 87 | 183 | 91 | 233 | 76 | 283 | 77 | 333 | 72 | 383 | 74 | 433 | 84 | 483 | 81 |
| 34 | 100 | 84 | 84 | 134 | 82 | 184 | 79 | 234 | 71 | 284 | 72 | 334 | 80 | 384 | 81 | 434 | 80 | 484 | 75 |
| 35 | 94 | 85 | 87 | 135 | 80 | 185 | 83 | 235 | 87 | 285 | 90 | 335 | 77 | 385 | 78 | 435 | 85 | 485 | 65 |
| 36 | 92 | 86 | 85 | 136 | 89 | 186 | 91 | 236 | 73 | 286 | 77 | 336 | 77 | 386 | 80 | 436 | 82 | 486 | 63 |
| 37 | 99 | 87 | 88 | 137 | 96 | 187 | 79 | 237 | 76 | 287 | 71 | 337 | 84 | 387 | 78 | 437 | 73 | 487 | 82 |
| 38 | 94 | 88 | 93 | 138 | 80 | 188 | 87 | 238 | 73 | 288 | 71 | 338 | 80 | 388 | 69 | 438 | 70 | 488 | 78 |
| 39 | 90 | 89 | 76 | 139 | 85 | 189 | 80 | 239 | 87 | 289 | 85 | 339 | 77 | 389 | 75 | 439 | 75 | 489 | 83 |
| 40 | 96 | 90 | 94 | 140 | 84 | 190 | 88 | 240 | 79 | 290 | 84 | 340 | 68 | 390 | 84 | 440 | 75 | 490 | 78 |
| 41 | 88 | 91 | 89 | 141 | 87 | 191 | 75 | 241 | 80 | 291 | 84 | 341 | 84 | 391 | 81 | 441 | 79 | 491 | 78 |
| 42 | 101 | 92 | 85 | 142 | 87 | 192 | 81 | 242 | 91 | 292 | 77 | 342 | 77 | 392 | 79 | 442 | 72 | 492 | 76 |
| 43 | 102 | 93 | 97 | 143 | 82 | 193 | 89 | 243 | 76 | 293 | 78 | 343 | 77 | 393 | 86 | 443 | 85 | 493 | 67 |
| 44 | 85 | 94 | 86 | 144 | 77 | 194 | 84 | 244 | 77 | 294 | 68 | 344 | 80 | 394 | 87 | 444 | 88 | 494 | 82 |
| 45 | 96 | 95 | 87 | 145 | 79 | 195 | 74 | 245 | 78 | 295 | 85 | 345 | 80 | 395 | 75 | 445 | 82 | 495 | 86 |
| 46 | 86 | 96 | 95 | 146 | 85 | 196 | 85 | 246 | 80 | 296 | 75 | 346 | 76 | 396 | 72 | 446 | 68 | 496 | 87 |
| 47 | 90 | 97 | 84 | 147 | 84 | 197 | 76 | 247 | 84 | 297 | 82 | 347 | 80 | 397 | 75 | 447 | 68 | 497 | 68 |
| 48 | 95 | 98 | 82 | 148 | 83 | 198 | 87 | 248 | 79 | 298 | 73 | 348 | 82 | 398 | 75 | 448 | 73 | 498 | 81 |
| 49 | 89 | 99 | 87 | 149 | 83 | 199 | 96 | 249 | 88 | 299 | 73 | 349 | 77 | 399 | 82 | 449 | 70 | 499 | 72 |
| 50 | 98 | 100 | 87 | 150 | 91 | 200 | 77 | 250 | 80 | 300 | 78 | 350 | 82 | 400 | 81 | 450 | 80 | 500 | 81 |

## FREQUENZ DER PRIMZAHLEN.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 501 | 78 | 551 | 79 | 601 | 75 | 651 | 61 | 701 | 75 | 751 | 68 | 801 | 85 | 851 | 70 | 901 | 74 | 951 | 76 |
| 502 | 74 | 552 | 75 | 602 | 73 | 652 | 74 | 702 | 71 | 752 | 85 | 802 | 66 | 852 | 77 | 902 | 73 | 952 | 70 |
| 503 | 67 | 553 | 71 | 603 | 83 | 653 | 85 | 703 | 81 | 753 | 73 | 803 | 70 | 853 | 74 | 903 | 70 | 953 | 78 |
| 504 | 76 | 554 | 80 | 604 | 76 | 654 | 69 | 704 | 71 | 754 | 71 | 804 | 69 | 854 | 66 | 904 | 63 | 954 | 65 |
| 505 | 76 | 555 | 77 | 605 | 73 | 655 | 78 | 705 | 87 | 755 | 83 | 805 | 78 | 855 | 71 | 905 | 81 | 955 | 73 |
| 506 | 83 | 556 | 61 | 606 | 74 | 656 | 73 | 706 | 68 | 756 | 70 | 806 | 79 | 856 | 73 | 906 | 70 | 956 | 76 |
| 507 | 76 | 557 | 88 | 607 | 72 | 657 | 71 | 707 | 82 | 757 | 66 | 807 | 68 | 857 | 78 | 907 | 80 | 957 | 58 |
| 508 | 71 | 558 | 68 | 608 | 78 | 658 | 70 | 708 | 74 | 758 | 68 | 808 | 70 | 858 | 76 | 908 | 80 | 958 | 69 |
| 509 | 76 | 559 | 74 | 609 | 78 | 659 | 79 | 709 | 77 | 759 | 79 | 809 | 69 | 859 | 69 | 909 | 79 | 959 | 77 |
| 510 | 75 | 560 | 77 | 610 | 80 | 660 | 73 | 710 | 77 | 760 | 77 | 810 | 78 | 860 | 71 | 910 | 82 | 960 | 69 |
| 511 | 72 | 561 | 86 | 611 | 73 | 661 | 83 | 711 | 78 | 761 | 77 | 811 | 78 | 861 | 77 | 911 | 62 | 961 | 68 |
| 512 | 82 | 562 | 61 | 612 | 71 | 662 | 70 | 712 | 76 | 762 | 80 | 812 | 72 | 862 | 74 | 912 | 81 | 962 | 88 |
| 513 | 70 | 563 | 83 | 613 | 76 | 663 | 74 | 713 | 72 | 763 | 68 | 813 | 69 | 865 | 83 | 913 | 71 | 963 | 71 |
| 514 | 77 | 564 | 67 | 614 | 79 | 664 | 77 | 714 | 73 | 764 | 79 | 814 | 72 | 864 | 60 | 914 | 54 | 964 | 74 |
| 515 | 81 | 565 | 73 | 615 | 71 | 665 | 77 | 715 | 66 | 765 | 72 | 815 | 78 | 865 | 80 | 915 | 73 | 965 | 74 |
| 516 | 66 | 566 | 78 | 616 | 75 | 666 | 77 | 716 | 83 | 766 | 82 | 816 | 69 | 866 | 80 | 916 | 70 | 966 | 70 |
| 517 | 85 | 567 | 72 | 617 | 85 | 667 | 73 | 717 | 69 | 767 | 78 | 817 | 75 | 867 | 68 | 917 | 72 | 967 | 73 |
| 518 | 83 | 568 | 72 | 618 | 81 | 668 | 73 | 718 | 65 | 768 | 68 | 818 | 75 | 868 | 78 | 918 | 79 | 968 | 66 |
| 519 | 76 | 569 | 71 | 619 | 67 | 669 | 66 | 719 | 67 | 769 | 77 | 819 | 62 | 869 | 80 | 919 | 75 | 969 | 75 |
| 520 | 78 | 570 | 80 | 620 | 73 | 670 | 74 | 720 | 74 | 770 | 74 | 820 | 83 | 870 | 73 | 920 | 71 | 970 | 73 |
| 521 | 73 | 571 | 85 | 621 | 77 | 671 | 75 | 721 | 78 | 771 | 77 | 821 | 75 | 871 | 79 | 921 | 72 | 971 | 76 |
| 522 | 83 | 572 | 72 | 622 | 70 | 672 | 76 | 722 | 77 | 772 | 75 | 822 | 72 | 872 | 58 | 922 | 72 | 972 | 78 |
| 523 | 79 | 573 | 85 | 623 | 74 | 673 | 76 | 723 | 73 | 773 | 70 | 823 | 84 | 873 | 76 | 923 | 72 | 973 | 74 |
| 524 | 69 | 574 | 72 | 624 | 75 | 674 | 77 | 724 | 86 | 774 | 76 | 824 | 78 | 874 | 65 | 924 | 81 | 974 | 63 |
| 525 | 77 | 575 | 70 | 625 | 68 | 675 | 69 | 725 | 75 | 775 | 72 | 825 | 71 | 875 | 75 | 925 | 76 | 975 | 85 |
| 526 | 79 | 576 | 77 | 626 | 69 | 676 | 75 | 726 | 69 | 776 | 67 | 826 | 81 | 876 | 80 | 926 | 80 | 976 | 70 |
| 527 | 84 | 577 | 78 | 627 | 70 | 677 | 74 | 727 | 76 | 777 | 70 | 827 | 78 | 877 | 75 | 927 | 74 | 977 | 66 |
| 528 | 72 | 578 | 77 | 628 | 76 | 678 | 63 | 728 | 75 | 778 | 76 | 828 | 69 | 878 | 67 | 928 | 63 | 978 | 60 |
| 529 | 70 | 579 | 76 | 629 | 71 | 679 | 82 | 729 | 76 | 779 | 81 | 829 | 69 | 879 | 68 | 929 | 70 | 979 | 80 |
| 530 | 78 | 580 | 77 | 630 | 75 | 680 | 83 | 730 | 75 | 780 | 71 | 830 | 68 | 880 | 75 | 930 | 80 | 980 | 65 |
| 531 | 80 | 581 | 73 | 631 | 67 | 681 | 75 | 731 | 69 | 781 | 70 | 831 | 76 | 881 | 80 | 931 | 69 | 981 | 67 |
| 532 | 68 | 582 | 79 | 632 | 81 | 682 | 78 | 732 | 76 | 782 | 82 | 832 | 79 | 882 | 69 | 932 | 69 | 982 | 75 |
| 333 | 79 | 583 | 73 | 633 | 77 | 683 | 66 | 733 | 71 | 783 | 68 | 833 | 82 | 883 | 72 | 933 | 76 | 983 | 70 |
| 534 | 74 | 584 | 78 | 634 | 70 | 684 | 78 | 734 | 75 | 784 | 74 | 834 | 68 | 884 | 73 | 934 | 68 | 984 | 70 |
| 535 | 72 | 585 | 72 | 635 | 83 | 685 | 72 | 735 | 74 | 785 | 75 | 835 | 67 | 885 | 69 | 935 | 81 | 985 | 74 |
| 536 | 71 | 586 | 81 | 636 | 78 | 686 | 74 | 736 | 79 | 786 | 77 | 836 | 73 | 886 | 77 | 936 | 68 | 986 | 76 |
| 537 | 87 | 587 | 79 | 637 | 73 | 687 | 74 | 737 | 69 | 787 | 70 | 837 | 71 | 887 | 76 | 937 | 72 | 987 | 76 |
| 538 | 67 | 588 | 87 | 638 | 74 | 688 | 82 | 738 | 78 | 788 | 73 | 838 | 64 | 888 | 71 | 938 | 71 | 988 | 63 |
| 539 | 78 | 589 | 73 | 639 | 59 | 689 | 74 | 739 | 70 | 789 | 80 | 839 | 80 | 889 | 77 | 939 | 72 | 989 | 71 |
| 540 | 71 | 590 | 68 | 640 | 72 | 690 | 79 | 740 | 81 | 790 | 68 | 840 | 69 | 890 | 68 | 940 | 68 | 990 | 72 |
| 541 | 73 | 591 | 71 | 641 | 77 | 691 | 60 | 741 | 67 | 791 | 78 | 841 | 70 | 891 | 68 | 941 | 74 | 991 | 71 |
| 542 | 77 | 592 | 67 | 642 | 71 | 692 | 79 | 742 | 74 | 792 | 71 | 842 | 69 | 892 | 80 | 942 | 79 | 992 | 79 |
| 543 | 78 | 593 | 80 | 643 | 68 | 693 | 77 | 743 | 73 | 793 | 82 | 843 | 83 | 893 | 69 | 943 | 72 | 993 | 65 |
| 544 | 81 | 594 | 77 | 644 | 70 | 694 | 73 | 744 | 67 | 794 | 71 | 844 | 68 | 894 | 72 | 944 | 76 | 994 | 68 |
| 545 | 68 | 595 | 78 | 645 | 86 | 695 | 76 | 745 | 64 | 795 | 73 | 845 | 78 | 895 | 74 | 945 | 73 | 995 | 78 |
| 546 | 68 | 596 | 77 | 646 | 75 | 696 | 77 | 746 | 67 | 796 | 79 | 846 | 70 | 896 | 80 | 946 | 66 | 996 | 69 |
| 547 | 73 | 597 | 79 | 647 | 74 | 697 | 73 | 747 | 76 | 797 | 77 | 847 | 69 | 897 | 64 | 947 | 72 | 997 | 69 |
| 548 | 76 | 598 | 73 | 648 | 79 | 698 | 79 | 748 | 71 | 798 | 72 | 848 | 77 | 898 | 75 | 948 | 66 | 998 | 83 |
| 549 | 77 | 599 | 72 | 649 | 73 | 699 | 62 | 749 | 76 | 799 | 71 | 849 | 75 | 899 | 76 | 949 | 67 | 999 | 74 |
| 550 | 78 | 600 | 73 | 650 | 84 | 700 | 72 | 750 | 72 | 800 | 81 | 850 | 68 | 900 | 61 | 950 | 75 | 1000 | 65 |

1000000 … 1100000

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | 1 |
| 2 | | 1 | | | | 1 | | 1 | 1 | | 4 |
| 3 | | 4 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 21 |
| 4 | 2 | 8 | 5 | 4 | 3 | 6 | 9 | 4 | 5 | 8 | 54 |
| 5 | 11 | 10 | 8 | 18 | 12 | 16 | 10 | 12 | 15 | 8 | 114 |
| 6 | 14 | 14 | 18 | 21 | 16 | 22 | 19 | 15 | 17 | 15 | 171 |
| 7 | 26 | 17 | 23 | 23 | 24 | 24 | 17 | 22 | 20 | 21 | 217 |
| 8 | 19 | 19 | 21 | 7 | 14 | 15 | 20 | 17 | 15 | 17 | 164 |
| 9 | 11 | 13 | 9 | 13 | 14 | 14 | 12 | 13 | 11 | 16 | 126 |
| 10 | 8 | 6 | 8 | 5 | 9 | 5 | 5 | 9 | 7 | 9 | 71 |
| 11 | 6 | 6 | 4 | 6 | 3 | 1 | 3 | 1 | 4 | 5 | 39 |
| 12 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | | 12 |
| 13 | 1 | 1 | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 6 |
| 14 | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | |
| | 752 | 719 | 732 | 700 | 731 | 698 | 713 | 722 | 706 | 737 | 7210 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7212,99$$

1200000 … 1300000

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | 1 | 1 | | 2 |
| 2 | 2 | | 2 | 1 | | | | | | 1 | 6 |
| 3 | 3 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 | 1 | 4 | 3 | 3 | 32 |
| 4 | 7 | 7 | 7 | 3 | 5 | 7 | 12 | 2 | 3 | 10 | 63 |
| 5 | 15 | 12 | 12 | 15 | 10 | 14 | 9 | 15 | 6 | 12 | 120 |
| 6 | 16 | 14 | 13 | 19 | 17 | 16 | 16 | 15 | 20 | 14 | 160 |
| 7 | 24 | 25 | 25 | 24 | 21 | 20 | 15 | 22 | 24 | 24 | 224 |
| 8 | 17 | 19 | 16 | 11 | 17 | 15 | 22 | 18 | 19 | 14 | 168 |
| 9 | 8 | 12 | 7 | 10 | 12 | 13 | 14 | 13 | 13 | 9 | 111 |
| 10 | 3 | 11 | 10 | 8 | 10 | 4 | 5 | 3 | 9 | 10 | 73 |
| 11 | 3 | 6 | 3 | 2 | 3 | 5 | 3 | 6 | 1 | 3 | 35 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 3 | 1 | 1 | | 9 |
| 13 | 1 | 1 | | 1 | | 2 | | | | | 5 |
| 14 | | | | 1 | | | | | | | 1 |
| 16 | | | | | 1 | | | | | | 1 |
| | 676 | 744 | 693 | 693 | 724 | 713 | 718 | 709 | 722 | 689 | 7081 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7123,35$$

1100000 … 1200000

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | 0 |
| 1 | | | | | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | | | 1 | | | | 1 | 1 | | 2 | 5 |
| 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | | 1 | 25 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 5 | 9 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 57 |
| 5 | 8 | 13 | 10 | 12 | 11 | 11 | 9 | 12 | 12 | 9 | 107 |
| 6 | 14 | 20 | 17 | 20 | 17 | 17 | 18 | 16 | 17 | 14 | 170 |
| 7 | 21 | 19 | 22 | 19 | 21 | 21 | 20 | 18 | 29 | 27 | 217 |
| 8 | 22 | 13 | 10 | 12 | 18 | 20 | 17 | 19 | 9 | 20 | 160 |
| 9 | 13 | 14 | 16 | 17 | 7 | 11 | 16 | 14 | 12 | 11 | 131 |
| 10 | 9 | 6 | 10 | 10 | 8 | 9 | 6 | 8 | 3 | 8 | 77 |
| 11 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 5 | 9 | 2 | 32 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | | 2 | 3 | 1 | | 2 | | 11 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | | 1 | | 5 |
| 14 | 1 | 1 | | | 1 | | | | | | 3 |
| | 756 | 710 | 716 | 713 | 697 | 729 | 729 | 723 | 735 | 710 | 7194 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7165,911$$

1300000 … 1400000

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | 1 | | | | | 1 |
| 2 | | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 9 |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | | 5 | | 19 |
| 4 | 3 | 10 | 7 | 11 | 6 | 8 | 7 | 6 | 6 | 5 | 69 |
| 5 | 17 | 13 | 11 | 11 | 15 | 12 | 8 | 8 | 14 | 10 | 119 |
| 6 | 15 | 14 | 17 | 14 | 20 | 18 | 23 | 17 | 16 | 19 | 173 |
| 7 | 22 | 18 | 26 | 18 | 21 | 16 | 16 | 28 | 19 | 23 | 207 |
| 8 | 14 | 22 | 14 | 16 | 14 | 13 | 21 | 17 | 15 | 15 | 161 |
| 9 | 17 | 11 | 12 | 14 | 12 | 9 | 12 | 7 | 13 | 13 | 120 |
| 10 | 5 | 6 | 2 | 11 | 5 | 15 | 5 | 8 | 6 | 7 | 70 |
| 11 | 4 | 2 | 7 | 1 | 1 | 3 | 3 | 6 | 3 | 3 | 33 |
| 12 | | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 15 |
| 13 | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | 3 |
| 14 | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| | 709 | 702 | 713 | 705 | 692 | 713 | 709 | 723 | 695 | 737 | 7098 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7084,48$$

## FREQUENZ DER PRIMZAHLEN.

### 1400000 ... 1500000

| | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | 0 |
| 1 | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 5 |
| 2 | | 1 | 1 | | 2 | | | | 2 | 1 | 7 |
| 3 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 0 | 19 |
| 4 | 8 | 8 | 8 | 4 | 6 | 7 | 9 | 9 | 5 | 8 | 72 |
| 5 | 17 | 9 | 7 | 14 | 13 | 11 | 14 | 15 | 16 | 13 | 129 |
| 6 | 21 | 23 | 20 | 18 | 20 | 19 | 11 | 16 | 16 | 19 | 183 |
| 7 | 17 | 23 | 18 | 18 | 13 | 24 | 18 | 11 | 15 | 22 | 179 |
| 8 | 12 | 16 | 28 | 17 | 24 | 14 | 17 | 18 | 25 | 14 | 185 |
| 9 | 12 | 11 | 4 | 15 | 6 | 10 | 13 | 12 | 7 | 8 | 98 |
| 10 | 7 | 2 | 7 | 7 | 9 | 7 | 8 | 9 | 8 | 9 | 73 |
| 11 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 3 | 6 | 5 | 4 | 4 | 34 |
| 12 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 16 |
| 13 | | | 1 | | 1 | | | | | | 2 |
| | 679 | 680 | 717 | 723 | 705 | 701 | 716 | 705 | 706 | 698 | 7028 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7048{,}78186$$

### 1600000 ... 1700000

| | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | 1 | | | 1 |
| 1 | | | | | | 2 | | | | | 2 |
| 2 | 1 | 3 | 1 | | 1 | 1 | 2 | | | 2 | 11 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 2 | 2 | 4 | 4 | | 29 |
| 4 | 7 | 4 | 9 | 7 | 7 | 10 | 4 | 4 | 10 | 6 | 68 |
| 5 | 10 | 11 | 8 | 12 | 11 | 11 | 13 | 12 | 18 | 14 | 120 |
| 6 | 18 | 22 | 15 | 19 | 15 | 11 | 14 | 19 | 10 | 16 | 159 |
| 7 | 22 | 15 | 14 | 21 | 25 | 18 | 22 | 24 | 24 | 18 | 203 |
| 8 | 14 | 23 | 25 | 15 | 17 | 16 | 17 | 15 | 13 | 19 | 174 |
| 9 | 8 | 12 | 18 | 12 | 12 | 21 | 12 | 8 | 14 | 13 | 130 |
| 10 | 7 | 2 | 5 | 8 | 4 | 6 | 11 | 7 | 4 | 9 | 63 |
| 11 | 7 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 26 |
| 12 | 2 | 1 | 1 | 1 | | | | 4 | | | 9 |
| 13 | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | 3 |
| 14 | | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 15 | | | | | | 1 | | | | | 1 |
| | 719 | 694 | 710 | 692 | 692 | 700 | 716 | 702 | 675 | 712 | 7012 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6985{,}13714$$

### 1500000 ... 1600000

| | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 160 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | 0 |
| 1 | | | | | | 1 | 1 | | | | 2 |
| 2 | | | 1 | 1 | 2 | | 2 | | 1 | 3 | 10 |
| 3 | 2 | | 4 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 6 | 1 | 28 |
| 4 | 8 | 5 | 5 | 7 | 9 | 13 | 6 | 10 | 7 | 7 | 77 |
| 5 | 8 | 19 | 9 | 13 | 11 | 9 | 12 | 15 | 11 | 17 | 124 |
| 6 | 16 | 20 | 25 | 21 | 20 | 12 | 26 | 14 | 23 | 22 | 199 |
| 7 | 19 | 21 | 18 | 19 | 18 | 15 | 12 | 19 | 11 | 20 | 172 |
| 8 | 19 | 12 | 15 | 18 | 15 | 17 | 10 | 17 | 15 | 11 | 149 |
| 9 | 16 | 14 | 16 | 12 | 8 | 17 | 15 | 6 | 11 | 9 | 124 |
| 10 | 8 | 3 | 5 | 4 | 9 | 7 | 5 | 10 | 10 | 2 | 63 |
| 11 | | 5 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 4 | 5 | 29 |
| 12 | 4 | | | 1 | 3 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 17 |
| 13 | | 1 | | | | 2 | 2 | | | 1 | 6 |
| | 731 | 702 | 691 | 686 | 698 | 714 | 680 | 701 | 693 | 675 | 6971 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7015{,}78776$$

### 1700000 ... 1800000

| | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | 0 |
| 1 | | | | 1 | | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | | | | | 2 | 1 | | | 1 | 5 |
| 3 | 3 | 4 | | 3 | 3 | 4 | 3 | 5 | 3 | 2 | 30 |
| 4 | 7 | 9 | 6 | 6 | 5 | 8 | 6 | 6 | 10 | 7 | 70 |
| 5 | 13 | 15 | 19 | 16 | 12 | 15 | 21 | 13 | 13 | 15 | 152 |
| 6 | 17 | 16 | 22 | 22 | 20 | 14 | 15 | 13 | 18 | 17 | 174 |
| 7 | 23 | 21 | 22 | 13 | 22 | 19 | 19 | 21 | 17 | 15 | 194 |
| 8 | 11 | 16 | 11 | 13 | 16 | 15 | 13 | 18 | 19 | 13 | 147 |
| 9 | 18 | 11 | 8 | 11 | 15 | 10 | 12 | 14 | 10 | 15 | 124 |
| 10 | 3 | 1 | 8 | 7 | 2 | 9 | 6 | 9 | 5 | 11 | 61 |
| 11 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 4 | 4 | 1 | 4 | 2 | 26 |
| 12 | 2 | 3 | | 1 | 1 | | | | 1 | 2 | 10 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 2 | | | | | | | 5 |
| 14 | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | 1 | | | | | | 1 |
| | 695 | 685 | 691 | 689 | 706 | 684 | 679 | 700 | 689 | 713 | 6931 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6956{,}53562$$

1800000 . . . 1900000

| | 181 | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 190 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | | 2 | | | | 5 | 10 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 2 | 5 | 5 | 22 |
| 4 | 6 | 5 | 10 | 12 | 7 | 6 | 5 | 5 | 8 | 7 | 71 |
| 5 | 14 | 15 | 10 | 11 | 11 | 12 | 19 | 17 | 12 | 14 | 135 |
| 6 | 23 | 20 | 14 | 15 | 21 | 19 | 16 | 19 | 23 | 15 | 175 |
| 7 | 25 | 26 | 18 | 17 | 21 | 21 | 20 | 22 | 19 | 17 | 206 |
| 8 | 15 | 19 | 23 | 18 | 22 | 15 | 19 | 15 | 11 | 14 | 161 |
| 9 | 10 | 7 | 19 | 13 | 9 | 8 | 10 | 12 | 10 | 15 | 115 |
| 10 | 9 | 4 | 8 | 6 | 6 | 13 | 4 | 6 | 8 | 10 | 74 |
| 11 | 2 | | 4 | | | 3 | 5 | 2 | 5 | 2 | 23 |
| 12 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | | 1 | | 1 | | 10 |
| 13 | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | |
| | 704 | 672 | 718 | 674 | 700 | 707 | 705 | 689 | 697 | 691 | 6955 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6929{,}73917$$

2000000 . . . 2100000

| | 201 | 202 | 203 | 204 | 205 | 206 | 207 | 208 | 209 | 210 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | 2 | 1 | | | | | 3 |
| 2 | | | 2 | 2 | 1 | | | 2 | 2 | 1 | 10 |
| 3 | 3 | 3 | 5 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 32 |
| 4 | 7 | 8 | 9 | 4 | 8 | 5 | 6 | 7 | 9 | 6 | 69 |
| 5 | 13 | 10 | 9 | 15 | 13 | 10 | 12 | 13 | 9 | 15 | 119 |
| 6 | 25 | 20 | 13 | 16 | 26 | 23 | 25 | 14 | 17 | 18 | 197 |
| 7 | 16 | 22 | 23 | 25 | 15 | 23 | 18 | 23 | 25 | 22 | 204 |
| 8 | 13 | 17 | 25 | 22 | 12 | 13 | 12 | 16 | 18 | 19 | 157 |
| 9 | 16 | 15 | 11 | 4 | 11 | 12 | 11 | 14 | 11 | 10 | 115 |
| 10 | 10 | 2 | 8 | 6 | 11 | 7 | 7 | 8 | 3 | 6 | 63 |
| 11 | 2 | 1 | 5 | 3 | | 1 | 3 | 3 | 3 | | 21 |
| 12 | | 2 | | | 1 | 2 | 2 | | 1 | | 8 |
| 13 | 1 | | | 1 | | | | | | | 2 |
| | 705 | 691 | 693 | 690 | 671 | 696 | 694 | 674 | 686 | 674 | 6874 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6880{,}780$$

1900000 . . . 2000000

| | 191 | 192 | 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 200 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | 2 |
| 2 | | | 1 | | | 2 | 2 | | 1 | | 9 |
| 3 | 4 | 3 | 1 | 2 | 10 | 1 | 3 | 4 | 4 | 2 | 34 |
| 4 | 5 | 4 | 4 | 6 | 4 | 9 | 7 | 19 | 11 | 7 | 67 |
| 5 | 12 | 18 | 15 | 18 | 11 | 12 | 11 | 16 | 11 | 12 | 136 |
| 6 | 19 | 20 | 18 | 16 | 17 | 24 | 20 | 20 | 18 | 10 | 182 |
| 7 | 21 | 20 | 25 | 27 | 20 | 16 | 25 | 17 | 21 | 31 | 221 |
| 8 | 16 | 10 | 16 | 14 | 14 | 18 | 17 | 15 | 8 | 20 | 148 |
| 9 | 15 | 14 | 8 | 8 | 9 | 12 | 8 | 8 | 15 | 6 | 103 |
| 10 | 5 | 6 | 8 | 6 | 11 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 62 |
| 11 | 2 | 4 | 6 | 2 | 3 | 2 | 1 | 5 | 2 | 5 | 32 |
| 12 | | 1 | | 1 | | | | 2 | 1 | | 5 |
| 13 | | | | | 1 | | 1 | | 1 | | 3 |
| 14 | | | | | | 1 | | | 1 | 1 | 3 |
| | 689 | 697 | 711 | 685 | 692 | 685 | 673 | 670 | 688 | 714 | 6902 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6904{,}54424$$

2100000 . . . 2200000

| | 211 | 212 | 213 | 214 | 215 | 216 | 217 | 218 | 219 | 220 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | | 1 | | | | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 9 |
| 3 | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | | 2 | 3 | 2 | 4 | 27 |
| 4 | 7 | 7 | 2 | 13 | 5 | 3 | 9 | 6 | 9 | 8 | 69 |
| 5 | 12 | 14 | 20 | 16 | 16 | 12 | 17 | 13 | 12 | 14 | 146 |
| 6 | 12 | 20 | 17 | 14 | 16 | 25 | 16 | 29 | 21 | 19 | 183 |
| 7 | 19 | 14 | 18 | 23 | 26 | 22 | 18 | 21 | 22 | 17 | 201 |
| 8 | 22 | 21 | 20 | 20 | 12 | 16 | 20 | 10 | 12 | 15 | 168 |
| 9 | 12 | 10 | 8 | 7 | 9 | 10 | 7 | 13 | 16 | 17 | 109 |
| 10 | 6 | 5 | 6 | 2 | 7 | 7 | 8 | 5 | 2 | 4 | 52 |
| 11 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 1 | | 2 | | 18 |
| 12 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | | 2 | | | 9 |
| 13 | | 1 | 1 | 1 | | | | | 1 | | 4 |
| 14 | | | | 1 | | | | 2 | | | 3 |
| | 699 | 683 | 697 | 675 | 693 | 712 | 666 | 691 | 679 | 664 | 6857 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6858{,}292$$

## FREQUENZ DER PRIMZAHLEN.

2200000 . . . 2300000

| | 221 | 222 | 223 | 224 | 225 | 226 | 227 | 228 | 229 | 230 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | 1 | | | | 1 | | 2 |
| 2 | | | 1 | 1 | | 2 | | | 3 | 2 | 9 |
| 3 | 5 | 2 | 4 | 7 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 29 |
| 4 | 8 | 9 | 5 | 5 | 10 | 7 | 7 | 7 | 6 | 9 | 73 |
| 5 | 12 | 24 | 16 | 13 | 11 | 10 | 14 | 14 | 15 | 9 | 138 |
| 6 | 17 | 18 | 12 | 18 | 18 | 20 | 16 | 17 | 21 | 22 | 179 |
| 7 | 19 | 17 | 25 | 21 | 18 | 20 | 23 | 25 | 19 | 18 | 205 |
| 8 | 12 | 12 | 19 | 15 | 18 | 24 | 13 | 17 | 16 | 22 | 168 |
| 9 | 14 | 9 | 6 | 9 | 19 | 11 | 16 | 9 | 13 | 7 | 113 |
| 10 | 7 | 6 | 6 | 6 | 1 | 3 | 7 | 5 | | 3 | 44 |
| 11 | 5 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 5 | 30 |
| 12 | 1 | 1 | 2 | 1 | | | | 2 | 2 | 1 | 10 |
| | 701 | 660 | 695 | 680 | 683 | 688 | 701 | 694 | 662 | 685 | 6849 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6836{,}977$$

2400000 . . . 2500000

| | 241 | 242 | 243 | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 | 249 | 250 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | 1 | | 1 |
| 2 | 2 | | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 9 |
| 3 | 4 | 6 | 4 | 4 | 1 | 5 | 3 | 5 | 3 | 2 | 37 |
| 4 | 12 | 8 | 7 | 7 | 9 | 7 | 10 | 8 | 6 | 4 | 78 |
| 5 | 13 | 14 | 17 | 19 | 15 | 12 | 18 | 11 | 11 | 17 | 147 |
| 6 | 18 | 16 | 21 | 20 | 18 | 22 | 18 | 18 | 20 | 22 | 193 |
| 7 | 21 | 16 | 19 | 20 | 17 | 17 | 21 | 22 | 19 | 17 | 189 |
| 8 | 10 | 16 | 14 | 14 | 21 | 17 | 10 | 17 | 16 | 16 | 151 |
| 9 | 8 | 13 | 9 | 11 | 7 | 12 | 6 | 11 | 12 | 13 | 102 |
| 10 | 9 | 6 | 5 | 4 | 6 | 4 | 8 | 6 | 7 | 3 | 58 |
| 11 | 2 | 4 | 3 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 23 |
| 12 | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | 2 | 7 |
| 13 | | 1 | | | 1 | 2 | | | 1 | | 5 |
| | 660 | 690 | 672 | 657 | 701 | 687 | 666 | 672 | 687 | 674 | 6766 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6797{,}394$$

2300000 . . . 2400000

| | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 | 236 | 237 | 238 | 239 | 240 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | | | | 4 |
| 2 | | | 1 | | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 11 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 6 | 4 | 3 | 32 |
| 4 | 8 | 12 | 10 | 9 | 8 | 7 | 3 | 13 | 7 | 9 | 86 |
| 5 | 13 | 18 | 13 | 14 | 17 | 12 | 10 | 13 | 10 | 16 | 136 |
| 6 | 15 | 16 | 21 | 20 | 16 | 21 | 16 | 11 | 14 | 16 | 176 |
| 7 | 22 | 25 | 20 | 20 | 13 | 16 | 26 | 18 | 19 | 15 | 194 |
| 8 | 13 | 9 | 16 | 21 | 17 | 15 | 15 | 15 | 21 | 16 | 158 |
| 9 | 13 | 9 | 6 | 7 | 14 | 14 | 8 | 13 | 14 | 14 | 112 |
| 10 | 7 | 5 | 3 | 2 | 5 | 5 | 8 | 7 | 8 | 5 | 55 |
| 11 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 | 5 | 1 | 2 | 2 | 2 | 28 |
| 12 | 1 | | 3 | 1 | | | | | | 2 | 7 |
| 13 | | 1 | | | | | | | | | 1 |
| | 690 | 662 | 672 | 671 | 666 | 690 | 691 | 660 | 705 | 680 | 6787 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6816{,}706$$

2500000 . . . 2600000

| | 251 | 252 | 253 | 254 | 255 | 256 | 257 | 258 | 259 | 260 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 1 | | | | | | | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | | 1 | 1 | | | | | | 5 |
| 3 | 4 | | 6 | 6 | 2 | 2 | 1 | 2 | 8 | 4 | 35 |
| 4 | 7 | 18 | 9 | 7 | 8 | 6 | 10 | 7 | 8 | 8 | 88 |
| 5 | 10 | 11 | 7 | 15 | 15 | 23 | 16 | 16 | 10 | 13 | 136 |
| 6 | 22 | 14 | 20 | 21 | 20 | 15 | 18 | 19 | 20 | 25 | 194 |
| 7 | 24 | 19 | 12 | 20 | 22 | 22 | 23 | 15 | 13 | 12 | 180 |
| 8 | 18 | 15 | 20 | 9 | 16 | 18 | 16 | 20 | 19 | 19 | 170 |
| 9 | 8 | 10 | 13 | 7 | 9 | 7 | 6 | 12 | 6 | 10 | 88 |
| 10 | 2 | 5 | 8 | 10 | 5 | 4 | 7 | 4 | 9 | 4 | 58 |
| 11 | 1 | 5 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 5 | | 24 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 13 |
| 13 | 2 | 1 | | | | | | | 1 | 2 | 6 |
| | 677 | 675 | 696 | 670 | 650 | 671 | 678 | 698 | 693 | 676 | 6804 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6778{,}960$$

2600000 . . . 2700000

| | 261 | 262 | 263 | 264 | 265 | 266 | 267 | 268 | 269 | 270 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 1 | | | | | | | 1 |
| 1 | | | 2 | | | | | 2 | | | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | 2 | | 1 | 2 | 1 | | 10 |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 2 | 4 | | 3 | 3 | 3 | 2 | 28 |
| 4 | 9 | 6 | 6 | 12 | 3 | 7 | 7 | 8 | 6 | 7 | 71 |
| 5 | 11 | 15 | 14 | 11 | 13 | 17 | 22 | 16 | 18 | 21 | 158 |
| 6 | 16 | 17 | 14 | 18 | 23 | 19 | 20 | 24 | 19 | 15 | 195 |
| 7 | 25 | 11 | 27 | 20 | 21 | 21 | 21 | 14 | 22 | 23 | 201 |
| 8 | 14 | 23 | 16 | 13 | 15 | 16 | 12 | 8 | 12 | 13 | 142 |
| 9 | 9 | 10 | 13 | 16 | 10 | 10 | 5 | 10 | 5 | 8 | 96 |
| 10 | 3 | 6 | 5 | 4 | 2 | 8 | 2 | 5 | 8 | 10 | 53 |
| 11 | 1 | 1 | | 1 | 3 | 1 | 4 | 4 | 5 | 2 | 22 |
| 12 | | 3 | | 2 | 4 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 17 |
| 13 | | | | | | | 1 | | | | 1 |
| 14 | | | | | | | 1 | | | | 1 |
| | 653 | 681 | 672 | 680 | 689 | 695 | 660 | 665 | 681 | 686 | 6762 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6761,332$$

2800000 . . . 2900000

| | 281 | 282 | 283 | 284 | 285 | 286 | 287 | 288 | 289 | 290 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | 1 | | 1 | | | | 2 |
| 2 | | 2 | 4 | | 5 | 2 | | 1 | 1 | | 15 |
| 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2 | 4 | 30 |
| 4 | 9 | 7 | 6 | 9 | 7 | 8 | 10 | 11 | 10 | 8 | 85 |
| 5 | 14 | 7 | 14 | 14 | 7 | 16 | 19 | 16 | 18 | 15 | 140 |
| 6 | 18 | 17 | 20 | 13 | 23 | 18 | 16 | 18 | 15 | 21 | 179 |
| 7 | 24 | 22 | 21 | 20 | 20 | 27 | 22 | 23 | 21 | 22 | 222 |
| 8 | 13 | 18 | 9 | 20 | 13 | 12 | 9 | 12 | 12 | 14 | 132 |
| 9 | 10 | 17 | 12 | 12 | 8 | 6 | 14 | 9 | 10 | 11 | 109 |
| 10 | 7 | 4 | 6 | 3 | 5 | 7 | 5 | 5 | 8 | 3 | 53 |
| 11 | | 1 | 3 | 3 | 5 | | 1 | 2 | 1 | 2 | 18 |
| 12 | 2 | 1 | | | | 1 | 2 | | 2 | | 8 |
| 13 | | | 1 | 2 | 2 | | | | | | 5 |
| 14 | 1 | | | 1 | | | | | | | 2 |
| | 690 | 695 | 667 | 704 | 671 | 654 | 672 | 653 | 676 | 662 | 6744 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6728,220$$

2700000 . . . 2800000

| | 271 | 272 | 273 | 274 | 275 | 276 | 277 | 278 | 279 | 280 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | 1 | | | 1 | | 2 |
| 2 | 2 | | 2 | | | 2 | | | 1 | | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 5 | 43 |
| 4 | 9 | 7 | 16 | 7 | 8 | 9 | 8 | 8 | 12 | 11 | 95 |
| 5 | 10 | 14 | 13 | 14 | 13 | 12 | 13 | 17 | 11 | 18 | 135 |
| 6 | 24 | 18 | 15 | 28 | 19 | 20 | 15 | 21 | 18 | 17 | 195 |
| 7 | 18 | 22 | 15 | 20 | 24 | 16 | 23 | 19 | 22 | 9 | 188 |
| 8 | 13 | 19 | 13 | 12 | 15 | 13 | 20 | 19 | 15 | 15 | 145 |
| 9 | 9 | 9 | 10 | 4 | 11 | 12 | 9 | 7 | 8 | 8 | 87 |
| 10 | 6 | 9 | 6 | 7 | 5 | 8 | 7 | 2 | 7 | 10 | 67 |
| 11 | 3 | 3 | 4 | 2 | | 2 | | 3 | 1 | 6 | 24 |
| 12 | 1 | 3 | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 9 |
| 13 | | | | | | | 1 | 1 | | | 2 |
| 14 | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | |
| 17 | 1 | | | | | | | | | | 1 |
| | 679 | 695 | 644 | 657 | 672 | 671 | 684 | 666 | 662 | 684 | 6714 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6744,430$$

2900000 . . . 3000000

| | 291 | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 | 299 | 300 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | | | | | | 1 | | 2 |
| 2 | | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 1 | 3 | 13 |
| 3 | 3 | 3 | 5 | 2 | 8 | 6 | 4 | 4 | 5 | 4 | 44 |
| 4 | 7 | 7 | 6 | 6 | 7 | 9 | 6 | 6 | 6 | 4 | 64 |
| 5 | 20 | 11 | 14 | 18 | 12 | 15 | 17 | 19 | 16 | 11 | 153 |
| 6 | 17 | 21 | 22 | 18 | 18 | 16 | 11 | 26 | 21 | 17 | 187 |
| 7 | 19 | 30 | 18 | 22 | 22 | 25 | 27 | 13 | 15 | 23 | 214 |
| 8 | 14 | 11 | 12 | 12 | 17 | 11 | 14 | 11 | 14 | 19 | 134 |
| 9 | 10 | 9 | 12 | 13 | 9 | 6 | 12 | 12 | 9 | 11 | 103 |
| 10 | 6 | 4 | 5 | 6 | 3 | 6 | 8 | 7 | 9 | 4 | 58 |
| 11 | 2 | 1 | 3 | 1 | | 2 | 1 | | 1 | 4 | 15 |
| 12 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | 11 |
| 13 | | | 1 | | | | | | | | 1 |
| 14 | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | 1 | | | | 1 |
| | 680 | 663 | 671 | 680 | 649 | 652 | 694 | 658 | 671 | 687 | 6705 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6712,64$$

## FREQUENZ DER PRIMZAHLEN.

1000000 . . . 2000000

| | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | 1 | | | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 5 | 2 | 2 | 1 | | 1 | 16 |
| 2 | 4 | 5 | 6 | 9 | 7 | 10 | 11 | 5 | 10 | 5 | 72 |
| 3 | 21 | 25 | 32 | 19 | 19 | 28 | 29 | 30 | 22 | 34 | 259 |
| 4 | 54 | 57 | 63 | 69 | 72 | 77 | 68 | 70 | 71 | 67 | 668 |
| 5 | 114 | 107 | 120 | 119 | 129 | 124 | 120 | 152 | 135 | 136 | 1256 |
| 6 | 171 | 170 | 160 | 173 | 183 | 199 | 159 | 174 | 175 | 182 | 1746 |
| 7 | 217 | 217 | 214 | 207 | 179 | 172 | 203 | 194 | 206 | 221 | 2030 |
| 8 | 164 | 160 | 168 | 161 | 183 | 149 | 174 | 147 | 161 | 148 | 1615 |
| 9 | 126 | 131 | 111 | 120 | 98 | 124 | 130 | 124 | 113 | 103 | 1180 |
| 10 | 71 | 77 | 73 | 70 | 73 | 63 | 63 | 61 | 74 | 62 | 687 |
| 11 | 39 | 32 | 35 | 33 | 34 | 29 | 26 | 26 | 23 | 30 | 307 |
| 12 | 12 | 11 | 9 | 15 | 16 | 17 | 9 | 10 | 10 | 5 | 114 |
| 13 | 6 | 5 | 5 | 3 | 2 | 6 | 3 | 5 | | 3 | 38 |
| 14 | | 2 | 1 | 1 | | | 1 | | | 3 | 8 |
| 15 | | | | | | | 1 | 1 | | | 2 |
| 16 | | | 1 | | | | | | | | 1 |
| | 7210 | 7194 | 7081 | 7098 | 7028 | 6971 | 7012 | 6931 | 6955 | 6903 | 70382 |

$$\int \frac{dx}{\log x} = 70427,78$$

2000000 . . . 3000000

| | 210 | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 | 290 | 300 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | 1 | | | | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 5 | 4 | 2 | 2 | 2 | 25 |
| 2 | 10 | 9 | 9 | 11 | 9 | 5 | 10 | 7 | 15 | 13 | 98 |
| 3 | 32 | 27 | 29 | 32 | 37 | 35 | 28 | 43 | 30 | 44 | 337 |
| 4 | 69 | 69 | 73 | 86 | 78 | 88 | 71 | 95 | 85 | 64 | 778 |
| 5 | 119 | 126 | 138 | 136 | 147 | 156 | 168 | 135 | 140 | 143 | 1408 |
| 6 | 197 | 183 | 179 | 176 | 193 | 194 | 195 | 195 | 179 | 187 | 1878 |
| 7 | 204 | 201 | 205 | 194 | 189 | 180 | 201 | 188 | 222 | 214 | 1998 |
| 8 | 157 | 168 | 168 | 158 | 151 | 170 | 142 | 145 | 132 | 134 | 1525 |
| 9 | 115 | 109 | 113 | 112 | 102 | 88 | 96 | 87 | 109 | 103 | 1034 |
| 10 | 63 | 52 | 44 | 55 | 58 | 58 | 53 | 67 | 53 | 58 | 561 |
| 11 | 21 | 18 | 30 | 28 | 23 | 24 | 22 | 24 | 18 | 15 | 223 |
| 12 | 8 | 9 | 10 | 7 | 7 | 13 | 17 | 9 | 8 | 11 | 99 |
| 13 | 2 | 4 | | 1 | 5 | 6 | 1 | 2 | 5 | 1 | 27 |
| 14 | | 3 | | | | | 1 | | 2 | | 6 |
| 15 | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| 16 | | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | 1 | | | 1 |
| | 6874 | 6857 | 6849 | 6787 | 6766 | 6804 | 6762 | 6714 | 6744 | 6705 | 67862 |

Die 26379te Centade enthält keine Primzahl
Die 27050te Centade enthält 17 Primzahlen.

$$\int \frac{dx}{\log x} = 67915,733$$

## GAUSS AN ENCKE.

Hochzuverehrender Freund!

— — Die gütige Mittheilung Ihrer Bemerkungen über die Frequenz der Primzahlen ist mir in mehr als einer Beziehung interessant gewesen. Sie haben mir meine eigenen Beschäftigungen mit demselben Gegenstande in Erinnerung gebracht, deren erste Anfänge in eine sehr entfernte Zeit fallen, ins Jahr 1792 oder 1793, wo ich mir die LAMBERTschen Supplemente zu den Logarithmentafeln angeschafft hatte. Es war noch ehe ich mit feineren Untersuchungen aus der höhern Arithmetik mich befasst hatte eines meiner ersten Geschäfte, meine Aufmerksamkeit auf die abnehmende Frequenz der Primzahlen zu richten, zu welchem Zweck ich dieselben in den einzelnen Chiliaden abzählte, und die Resultate auf einem der angehefteten weissen Blätter verzeichnete. Ich erkannte bald, dass unter allen Schwankungen diese Frequenz durchschnittlich nahe dem Logarithmen verkehrt proportional sei, so dass die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze $n$ nahe durch das Integral

$$\int \frac{dn}{\log n}$$

ausgedrückt werde, wenn der hyperbolische Logarithm. verstanden werde. In späterer Zeit, als mir die in VEGA's Tafeln (von 1796) abgedruckte Liste bis 400031 bekannt wurde, dehnte ich meine Abzählung weiter aus, was jenes Verhältniss bestätigte. Eine grosse Freude machte mir 1811 die Erscheinung von CHERNAC's

cribrum, und ich habe (da ich zu einer anhaltenden Abzählung der Reihe nach keine Geduld hatte) sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt, um bald hie bald dort eine Chiliade abzuzählen; ich liess jedoch zuletzt es ganz liegen, ohne mit der Million ganz fertig zu werden. Erst später benutzte ich Goldschmidt's Arbeitsamkeit, theils die noch gebliebenen Lücken in der ersten Million auszufüllen, theils nach Burckhardt's Tafeln die Abzählung weiter fortzusetzen. So sind (nun schon seit vielen Jahren) die drei ersten Millionen abgezählt, und mit dem Integralwerth verglichen. Ich setze hier nur einen kleinen Extract her:

| Unter | gibt es Primzahlen | Integral $\int\frac{dn}{\log n}$ | Abweich. | Ihre Formel | Abweich. |
|---|---|---|---|---|---|
| 500000 | 41556 | 41606,4 | + 50,4 | 41596,9 | + 40,9 |
| 1000000 | 78501 | 79627,5 | + 126,5 | 78672,7 | + 171,7 |
| 1500000 | 114112 | 114263,1 | + 151,1 | 114374,0 | + 264,0 |
| 2000000 | 148883 | 149054,8 | + 171,8 | 149233,0 | + 350,0 |
| 2500000 | 183016 | 183245,0 | + 229,0 | 183495,1 | + 479,1 |
| 3000000 | 216745 | 216970,6 | + 225,6 | 217308,5 | + 563,5 |

Dass Legendre sich auch mit diesem Gegenstande beschäftigt hat, war mir nicht bekannt, auf Veranlassung Ihres Briefes habe ich in seiner *Théorie des Nombres* nachgesehen, und in der zweiten Ausgabe einige darauf bezügliche Seiten gefunden, die ich früher übersehen (oder seit dem vergessen) haben muss. Legendre gebraucht die Formel

$$\frac{n}{\log n - A}$$

wo $A$ eine Constante sein soll, für welche er 1,08366 setzt. Nach einer flüchtigen Rechnung finde ich danach in obigen Fällen die Abweichung

$$\begin{array}{r} -\ 23,3 \\ +\ 42,2 \\ +\ 68,1 \\ +\ 92,8 \\ +159,1 \\ +167,6 \end{array}$$

Diese Differenzen sind noch kleiner als die mit dem Integral, sie scheinen aber bei zunehmendem $n$ schneller zu wachsen als diese, so dass leicht möglich

62

wäre, dass bei viel weiterer Fortsetzung jene die letztern überträfen. Um Zählung und Formel in Uebereinstimmung zu bringen müsste man respective anstatt $A = 1{,}08366$ setzen

1,09040
1,07682
1,07582
1,07529
1,07179
1,07297

Es scheint, dass bei wachsendem $n$ der (Durchschnitts-)Werth von $A$ abnimmt, ob aber die Grenze beim Wachsen des $n$ ins Unendliche 1 oder eine von 1 verschiedene Grösse sein wird, darüber wage ich keine Vermuthung. Ich kann nicht sagen dass eine Befugniss da ist, einen ganz einfachen Grenzwerth zu erwarten; von der andern Seite könnte der Ueberschuss des $A$ über 1 ganz füglich eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{\log n}$ sein. Ich würde geneigt sein zu glauben, dass das Differential der betreffenden Function einfacher sein muss, als die Function selbst. Indem ich für jene $\frac{dn}{\log n}$ vorausgesetzt habe, würde LEGENDRE's Formel eine Differentialfunction voraussetzen, die etwa $\frac{dn}{\log n - (A-1)}$ wäre. Ihre Formel übrigens würde für ein sehr grosses $n$ als mit

$$\frac{n}{\log n - \frac{1}{2k}}$$

übereinstimmend betrachtet werden können, wo $k$ der Modulus der BRIGGI'schen Logarithmen ist, also mit LEGENDRE's Formel, wenn man

$$A = \frac{1}{2k} = 1{,}1513 \text{ setzt.}$$

Endlich will ich noch bemerken, dass ich zwischen Ihren Abzählungen und den meinigen ein Paar Differenzen bemerkt habe.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Zwischen | 59000 u. | 60000 | haben Sie | 95 | ich 94 |
| | 101000 | 102000 | | 94 | 93 |

Die erste Differenz hat vielleicht ihren Grund darin, dass in LAMBERT's Suppl. die Primzahl 59023 zweimal aufgeführt ist. Die Chiliade von 101000—102000 wimmelt in LAMBERT's Supplementen von Fehlern, ich habe in meinem Exemplare 7 Zahlen angestrichen, die keine Primzahlen sind, und dagegen 2 fehlende ein-

geschaltet. Könnten Sie nicht den jungen Dase veranlassen, dass er die Primzahlen in den folgenden Millionen aus denjenigen bei der Akademie befindlichen Tafeln abzählte, die wie ich fürchte das Publikum nicht besitzen soll? Für diesen Fall bemerke ich, dass in der 2. und 3. Million die Abzählung auf meine Vorschrift nach einem besondern Schema gemacht ist, welches ich selbst auch schon bei einem Theile der ersten Million angewandt hatte. Die Abzählungen von je 100000 stehen auf Einer (klein) Octavseite in 10 Columnen, jede sich auf Eine Myriode beziehend; dazu kommt noch eine Columne davor (links) und eine dahinter rechts; als Beispiel hier eine Verticalcolumne und die beiden Zusatzcolumnen aus dem Intervall 1000000 ... 1100000 — — —

Zur Erläuterung diene z.B. die 1. Verticalreihe. In der Myriade 1000000 bis 1010000 sind 100 Hecatontaden; darunter ist 1 die nur eine Primzahl enthält; gar keine mit 2 oder 3; 2 Stück mit je 4 Primzahlen; 11 Stück mit je 5 u.s.w. alle zusammen geben $752 = 1.1 + 4.2 + 5.11 + 6.14 + ..$ Die letzte Columne enthält die Aggregate aus den 10 einzelnen. Die Zahlen 14. 15. 16 in der ersten Verticalreihe stehen hier nur zum Ueberfluss, da keine Hecatontaden mit so vielen Primzahlen vorkommen; aber auf den folgenden Blättern bekommen sie Geltung. Zuletzt werden wieder die 10 Seiten in 1 vereinigt, und umfassen so die ganze 2te Million.

Doch es ist Zeit abzubrechen. — — — Unter herzlichen Wünschen für Ihr Wohlbefinden

Stets der Ihrige

Göttingen, 24. December 1849. C. F. Gauss.

# TAFEL

## DER ANZAHL DER CLASSEN

## BINÄRER QUADRATISCHER FORMEN.

**Centas 1.**

| G. I....(17)..(61) | |
|---|---|
| 1 | 1. 2. 3. 4. 7. |
| 3 | 11. 19. 23. 27. 31. 43. 67 |
| 5 | 47. 79 |
| 7 | 71 |
| 9 | 59. 83 |

| G. II..(58)..(280) | |
|---|---|
| 1 | 5. 6. 8. 9. 10. 12. 13. 15. 16. 18. 22. 25. 28. 37. 58 |
| 2 | 14. 17. 20. 32. 34. 36. 39. 46. 49. 52. 55. 63. 64. 73. 82. 97. 100 |
| 3 | 26. 29. 35. 38. 44. 50. 51. 53. 54. 61. 75. 76. 81. 87. 91. 92. 99 |
| 4 | 41. 62. 68. 94. 95. 98 |
| 5 | 74. 86 |
| 6 | 89 |

| G. IV..(25)..(136) | |
|---|---|
| 1 | 21. 24. 30. 33. 40. 42. 45. 48. 57. 60. 70. 72. 78. 85. 88. 93 |
| 2 | 56. 65. 66. 69. 77. 80. 84. 90. 96 |

Summa 233...477
Irreg. 0 Impr. 74

**Centas 2.**

| G. I......(11)..(101) | |
|---|---|
| 3 | 163 |
| 5 | 103. 127 |
| 7 | 151 |
| 9 | 107. 139. 199 |
| 11 | 167 |
| 13 | 191 |
| 25 | 131. 179 |

| G. II.....(46)..(406) | |
|---|---|
| 2 | 142. 148. 193 |
| 3 | 106. 108. 109. 115. 118. 121. 123. 124. 135. 147. 157. 162. 169. 172. 175. 187 |
| 4 | 111. 113. 128. 137. 158. 178. 183. 196 |
| 5 | 119. 122. 125. 143. 159. 166. 181. 188. 197 |
| 6 | 116. 155. 171 |
| 7 | 101. 134. 149. 173 |
| 8 | 146. 164 |
| 10 | 194 |

| G. IV....(39)..(358) | |
|---|---|
| 1 | 102. 112. 130. 133. 177. 190 |
| 2 | 114. 117. 126. 132. 136. 138. 141. 144. 145. 150. 153. 154. 156. 160. 180. 184. 192. 198 |
| 3 | 104. 110. 129. 140. 152. 170. 174. 176. 182. 186. 189. 195. 200 |
| 4 | 161. 185 |

| G. VIII...(4)...(32) | |
|---|---|
| 1 | 105. 120. 165. 168 |

Summa 291 ... 895
Irreg. 0

**Centas 3.**

| G. I.......(9).....(109) | |
|---|---|
| 7 | 223 |
| 9 | 211. 243(*3*). 283 |
| 11 | 271 |
| 13 | 263 |
| 15 | 227. 239 |
| 21 | 251 |

| G. II......(42).....(482) | |
|---|---|
| 3 | 202. 207. 214. 235. 247. 262. 267. 268. 277. 298 |
| 4 | 226. 256. 289. 292. 295 |
| 5 | 218. 229. 242. 250 |
| 6 | 203. 212. 219. 233. 241. 244. 259. 274. 275. 279. 291 |
| 7 | 215. 278. 284. 287 |
| 8 | 254. 257 |
| 9 | 236. 293 |
| 10 | 206. 281 |
| 11 | 269 |
| 12 | 299 |

| G. IV.....(43).....(512) | |
|---|---|
| 1 | 232. 253 |
| 2 | 205. 208. 213. 217. 220. 225. 228. 238. 252. 258. 265. 282. 288 |
| 3 | 201. 204. 216. 222. 231. 234. 237. 245. 246. 249. 255. 261. 270. 286. 294. 297. 300 |
| 4 | 221. 224. 248. 260. 272. 276 |
| 5 | 209. 230. 266. 290. 296 |

| G. VIII....(6)......(64) | |
|---|---|
| 1 | 210. 240. 273. 280 |
| 2 | 264. 285 |

Summa 313.....1167
Irreg. 1 Impr. 183.

**Centas 4.**

| G. I........(9).....(113) | |
|---|---|
| 7 | 343 |
| 9 | 307(*3*). 331. 367. 379 |
| 15 | 347 |
| 17 | 383 |
| 19 | 311. 359 |

| G. II......(40).....(554) | |
|---|---|
| 3 | 358. 397 |
| 4 | 313. 337. 382. 388 |
| 5 | 303. 316. 317. 319. 346. 361. 373. 375. 394 |
| 6 | 302. 323. 324. 327. 334. 351. 355. 363. 387 |
| 7 | 338. 349. 391 |
| 8 | 353 |
| 9 | 332. 335. 339(*3*). 362 |
| 10 | 386. 398 |
| 11 | 326. 389 |
| 12 | 356. 371. 395 |
| 13 | 314. |

| G. IV.....(43).....(608) | |
|---|---|
| 2 | 301. 310. 322. 328. 333. 340. 352. 372. 400 |
| 3 | 304. 309. 315. 318. 325. 342. 348. 364. 366. 368. 370. 378. 393. 396 |
| 4 | 305. 306. 308. 320. 350. 354. 369. 376. 377. 380. 384. 392. 399 |
| 5 | 321. 344. 365. 381. |
| 6 | 329 |
| 7 | 341. 374 |

| G. VIII....(8)......(88) | |
|---|---|
| 1 | 312. 330. 345. 357. 385 |
| 2 | 336. 360. 390 |

Summa 325.....1363
Irreg. 2 Impr. 229

## DETERMINANTES NEGATIVI.

### Centas 5.

| | |
|---|---|
| **G. I.....(10)..(174)** | |
| 7 | 463. 487 |
| 9 | 499 |
| 15 | 439. 443 |
| 21 | 431. 467 |
| 25 | 479 |
| 27 | 419. 491 |
| **G. II.....(33)..(512)** | |
| 3 | 403. 427 |
| 4 | 457. 466. 478 |
| 5 | 412. 415. 421. 422. 425 |
| 6 | 433. 456. 475. 484 |
| 7 | 447. 454 |
| 8 | 407. 409. 452. 471 |
| 9 | 411. 428. 451. 459(*). 486 |
| 10 | 401. 449. 482. 500 |
| 13 | 458 |
| 14 | 404 |
| 15 | 461 |
| 16 | 446 |
| **G. IV.....(49)..(786)** | |
| 2 | 418. 438. 442. 445. 448. 498 |
| 3 | 405. 417. 424. 430. 432. 435. 450. 453. 460. 472. 473. 477. 483. 490. 492. 493. 496 |
| 4 | 402. 406. 410. 414. 441. 444. 468. 469. 481. 485. 495 |
| 5 | 413. 437. 455. 470. 474. 476. 488. 489 |
| 6 | 416. 425. 426. 434. 464. 497 |
| 7 | 494 |
| **G. VIII...(8)..(120)** | |
| 1 | 408. 462 |
| 2 | 420. 429. 456. 465. 480 |
| 3 | 440 |
| Summa | 336 .. 1566 |
| Irreg. 1 | |

### Centas 6.

| | |
|---|---|
| **G. I.......(7)..(133)** | |
| 9 | 547 |
| 15 | 523. 571 |
| 21 | 503. 587 |
| 25 | 599 |
| 27 | 563 |
| **G. II....(40)..(724)** | |
| 4 | 562. 577. 583 |
| 5 | 508. 538. 541 |
| 6 | 507. 526. 529. 543. 567 |
| 7 | 502. 511. 535 |
| 8 | 512. 514. 548. 559. 578 |
| 9 | 515. 519. 527. 531. 556. 557. 575. 586 |
| 11 | 551. 554. 591 |
| 12 | 539. 542. 579. 593 |
| 14 | 596 |
| 15 | 509. 524. 566 |
| 16 | 521. 569 |
| **G. IV....(41)..(672)** | |
| 2 | 505. 522. 532. 553. 568. 592. 598 |
| 3 | 513. 517. 533. 537. 540. 550. 555. 565. 588. 595. 597 |
| 4 | 501. 518. 544. 558. 564. 575. 574. 576(*2*). 580(*2*). 582. 589 |
| 5 | 534. 372. 590 |
| 6 | 516. 549. 594 |
| 7 | 506. 530. 536. 581 |
| 8... | 545. 584 |
| **G. VIII..(12)..(200)** | |
| 1 | 520 |
| 2 | 504. 510. 525. 528. 552. 561. 570. 585. 600 |
| 3 | 546. 560 |
| Summa | 347 ... 1729 |
| Irreg. 2 | |

### Centas 7.

| | |
|---|---|
| **G. I.......(8)..(138)** | |
| 9 | 643 |
| 13 | 607. 631 |
| 15 | 619. 683. 691 |
| 25 | 647 |
| 33 | 659 |
| **G. II....(37)..(718)** | |
| 3 | 652 |
| 5 | 613. 625. 694 |
| 6 | 603. 617. 622. 628. 655. 667. 673. 676. 687 |
| 7 | 604. 634. 639. 653 |
| 9 | 661. 675(*3*). 679 |
| 10 | 601 |
| 11 | 625. 662. 668 |
| 12 | 674. 695 |
| 13 | 698 |
| 14 | 641. 686. 692 |
| 15 | 611. 635. 671. 677. 699 |
| 17 | 614 |
| 18 | 626 |
| **G. IV....(43)..(812)** | |
| 2 | 658. 697 |
| 3 | 606. 610. 618. 627. 637. 648. 669. 670. 682. 685. 688. 700 |
| 4 | 612. 632. 640. 642. 646. 657. 663 |
| 5 | 615. 633. 636. 638. 649. 664. 666. 678. 681 |
| 6 | 602. 605. 608. 620. 621. 650. 651. 684 |
| 7 | 654 |
| 8 | 644. 656 |
| 9 | 629 |
| 10 | 689 |
| **G. VIII..(12)..(216)** | |
| 2 | 609. 616. 624. 630. 645. 660. 672. 690. 693 |
| 5 | 665. 680. 696 |
| Summa | 350 .. 1884 |
| Irreg. 1 | |

### Centas 8.

| | |
|---|---|
| **G. I..........(6)...(110)** | |
| 15 | 727 |
| 15 | 739. 751. 787 |
| 21 | 743 |
| 51 | 719 |
| **G. II........(39)...(860)** | |
| 4 | 772 |
| 5 | 709. 757 |
| 6 | 718. 723. 763. 775 |
| 7 | 703. 755. 778 |
| 8 | 799 |
| 9 | 707. 712. 729. 747. 771. 783. 796 |
| 10 | 711. 724. 769. 788 |
| 11 | 758. 767 |
| 12 | 706. 766 |
| 13 | 746. 764. 773 |
| 15 | 716. 779. 797 |
| 16 | 791 |
| 17 | 701 |
| 18 | 731. 755(*3*) |
| 20 | 734. 761 |
| 21 | 794 |
| **G. IV.........(42)...(792)** | |
| 2 | 708. 742. 795 |
| 3 | 702. 715. 730. 748. 753. 762. 795 |
| 4 | 712. 717. 721. 732. 735. 736. 738. 745. 768. 784. 785. 786 790 |
| 5 | 726. 737. 750. 752. 754. 774. 781 |
| 6 | 704. 713. 725. 756. 759. 782. 800 |
| 8 | 710. 740. 749. 789 |
| 10 | 776 |
| **G. VIII.....(13)...(264)** | |
| 1 | 760 |
| 2 | 720. 765. 777. 792 798 |
| 3 | 705. 714. 728. 741 744. 780 |
| 4 | 770 |
| Summa | 356 ... 2026 |
| Irreg. 1 | |

## NACHLASS.

| Centas 9. | |
|---|---|
| G. I……(8)….(164) | |
| 9 | 823. 883 |
| 21 | 811. 827. 839. 863 |
| 29 | 887 |
| 33 | 839 |
| G. II……(34)….(730) | |
| 4 | 862 |
| 5 | 847. 853. 877 |
| 6 | 802. 898 |
| 7 | 807. 838. 841. 892 |
| 8 | 893 |
| 9 | 833. 843. 844. 867. 886. 891(*3*) |
| 10 | 878 |
| 11 | 829. 871. 879 |
| 13 | 842 |
| 14 | 818. 831 |
| 15 | 803. 815. 821. 851. 875 |
| 16 | 809. 837 |
| 20 | 881 |
| 21 | 899 |
| 22 | 866 |
| G. IV……(47)…(1024) | |
| 3 | 808. 823. 814. 817. 826. 828. 837. 856 |
| 4 | 820(*2*). 832. 834. 830. 852. 855. 863. 868. 873. 882. 889. 900(*2*) |
| 5 | 822. 830. 872. 874 |
| 6 | 801. 804. 810. 812. 819. 833. 848. 864. 876. 890. 894 |
| 7 | 806. 843. 849. 860. 893 |
| 8 | 846. 869. 884(*2*). 896 |
| 10 | 824. 836 |
| 11 | 854 |
| G. VIII…..(10)….(200) | |
| 2 | 805. 838. 870. 880. 897 |
| 3 | 816. 815. 861. 883. 888 |
| G. XVI. …(1)…..(16) | |
| 1 | 840 |
| Summa 360…..2154 | |
| Irreg. 4 | |

| Centas 10. | |
|---|---|
| G. I……(8)….(174) | |
| 9 | 907 |
| 11 | 967 |
| 13 | 947 |
| 17 | 991 |
| 19 | 919 |
| 27 | 983 |
| 31 | 911 |
| 43 | 971. |
| G. II…….(33)….(810) | |
| 3 | 982 |
| 6 | 933 |
| 7 | 997 |
| 8 | 943. 938. 961 |
| 9 | 922. 931. 965. 972 |
| 10 | 916. 927. 937. 977 |
| 12 | 932. 939. 964. 979. 995. 999 |
| 13 | 934. 931. 998 |
| 15 | 908. 923. 956 |
| 16 | 933 |
| 18 | 914. 929. 939. 974(*3*). |
| 20 | 926 |
| 23 | 941 |
| G. IV……(43)….(976) | |
| 2 | 928 |
| 3 | 913. 918. 925. 933. 940. 942. 949. 970. 973. 988 |
| 4 | 903. 904. 993. 938. 946. 973. 994 |
| 3 | 917. 921. 968. 1000 |
| 6 | 901. 905. 915. 948. 934. 976. 978. 980. 981. 983. 987. 996 |
| 7 | 902. 906. 909. 935. 962 |
| 8 | 992 |
| 9 | 944. 950. 989 |
| 11 | 963. 986 |
| G. VIII….(14)….(312) | |
| 2 | 910. 912. 932. 957. 960 |
| 3 | 924. 930. 936. 943. 966. 969. 984. 990 |
| 3 | 920 |
| Summa 366……2272 | |
| Irreg. 1 | |

| Centas 11. | |
|---|---|
| G. I…………(7)……(191) | |
| 9 | 1087 |
| 15 | 1051 |
| 19 | 1063 |
| 23 | 1039 |
| 33 | 1031 |
| 39 | 1019 |
| 31 | 1091 |
| G. II……….(33)……(880) | |
| 3 | 1093 |
| 6 | 1003. 1027. 1033. 1042 |
| 8 | 1024. 1047 |
| 9 | 1018. 1059. 1075(*3*). 1083. 1099 |
| 10 | 1006. 1099 |
| 11 | 1021. 1082. 1084 |
| 12 | 1043. 1058 |
| 13 | 1013. 1052. 1061. 1094. |
| 15 | 1007. 1069 |
| 16 | 1028 |
| 17 | 1079 |
| 18 | 1011. 1053. 1067. 1097 |
| 21 | 1004. 1046 |
| 22 | 1049. 1076. |
| G. IV……….(44)……(984) | |
| 2 | 1012 |
| 3 | 1030. 1038. 1048. 1068. 1072. 1090 |
| 4 | 1002. 1015. 1017. 1023. 1054. 1037. 1060. 1078. 1081 |
| 5 | 1037. 1066. 1071. 1098 |
| 6 | 1026. 1033. 1036. 1044. 1053. 1062. 1073. 1077. 1089. 1096. 1100 |
| 7 | 1010. 1014. 1029. 1086. 1095 |
| 8 | 1016. 1022. 1025. 1074. 1088(*2*) |
| 9 | 1041. 1070 |
| 11…1034 | |
| G. VIII…….(14)……(344) | |
| 2 | 1005. 1008. 1032. 1043. 1063. 1092 |
| 3 | 1020. 1030. 1080 |
| 4 | 1040. 1056. 1083 |
| 5 | 1001. 1064 |
| Summa 363…….2399. | |
| Irreg. 2 | |

| Centas 12. | |
|---|---|
| G. I…………(6)……(148) | |
| 15 | 1123 |
| 21 | 1163. 1171 |
| 23 | 1103 |
| 27 | 1187(*3*) |
| 41 | 1131 |
| G. II……….(36)……(924) | |
| 6 | 1108. 1138. 1198 |
| 7 | 1117. 1183 |
| 8 | 1129. 1153. 1136. 1139 |
| 9 | 1107(*3*). 1132. 1135. 1142. 1147 |
| 10 | 1143 |
| 11 | 1111. 1114. 1126. 1167 |
| 12 | 1127. 1186. 1191. 1195. |
| 15 | 1113. 1174. 1175. 1179 |
| 16 | 1119 |
| 18 | 1172. 1193 |
| 19 | 1199 |
| 20 | 1124 |
| 23 | 1181 |
| 24 | 1139 |
| 25 | 1109 |
| 28 | 1154 |
| G. IV………(40)…..(1064) | |
| 3 | 1162. 1177. 1192 |
| 4 | 1149. 1150. 1152. 1168. 1178. 1180 |
| 5 | 1102. 1123. 1237. 1165. 1182. 1189 |
| 6 | 1131. 1134. 1141. 1145. 1158. 1164. 1188 |
| 7 | 1101. 1112. 1133. 1136. 1148. 1137. 1194 |
| 8 | 1146 |
| 9 | 1116. 1118. 1161. 1166 |
| 10 | 1184 |
| 11 | 1121. 1130 |
| 12 | 1106. 1169. 1196 |
| G. VIII……(18)……(408) | |
| 2 | 1105. 1110. 1113. 1120. 1122. 1128. 1170. 1183. 1197 |
| 3 | 1144. 1135. 1173. 1176. 1200 |
| 4 | 1104. 1140 |
| 5 | 1160, 1190 |
| Summa 382…….2344 | |
| Irreg. 2 | |

## DETERMINANTES NEGATIVI.

**Centas 13.**

G. I..........(6).......(190)
23 1279
27 1231. 1291
33 1283
35 1223
45 1259(°3°)

G. II.........(38)........(986)
5 1213
6 1227. 1243. 1255. 1282. 1297
7 1237
8 1201. 1252
9 1203. 1207. 1215. 1219. 1228(°3°). 1267(°3°)
10 1261. 1263. 1268.
12 1202. 1234. 1299
13 1247
14 1294
15 1250
16 1217. 1249
17 1277
18 1251. 1262. 1289
19 1229. 1244
20 1214. 1271
21 1211. 1226. 1238
29 1286

G. IV.........(40).....(1008)
3 1222. 1258. 1285
4 1204. 1225. 1233. 1246. 1278
5 1210. 1212. 1257. 1264. 1270. 1273. 1276. 1287
6 1208. 1216. 1236. 1242. 1269. 1275. 1292. 1293. 1296. 1300
7 1206
8 1220(°2°). 1239. 1241. 1253. 1266. 1280. 1298
9 1235. 1274. 1295
10 1205. 1284
13 1256

G. VIII......(16).......(416)
2 1240. 1248. 1288. 1290
3 1218. 1230. 1254. 1260. 1272. 1281
4 1221. 1224. 1232. 1245
5 1209. 1265

Summa 370........2600
Irreg. 4

**Centas 14.**

G. I................(7)........(191)
11 1303
15 1327
27 1367. 1399
33 1307. 1331
45 1319

G. II.................(32)........(846)
5 1318
6 1387
7 1372
8 1348
9 1306. 1315(°3°). 1323(°3°). 1324. 1347. 1363. 1366. 1369. 1373. 1383
10 1375
11 1354
12 [illegible]. 1339. 1351
13 1381
14 1346. 1359
15 1388
17 1343
18 1355. 1371
19 1382
21 1322
22 1391
24 1379
25 1301
30 1361

G. IV.................(46).......(1340)
4 1312(°2°). 1332(°2°). 1345. 1357. 1393
5 1317. 1333. 1338. 1342. 1378. 1384. 1390. 1398
6 1308. 1313. 1336. 1337. 1350. 1358. 1362. 1377. 1395. 1397
7 1311. 1335. 1341. 1352. 1374. 1389. 1396
8 1314. 1334
9 1310. 1325. 1328. 1329. 1340. 1356(°3°)
10 1376
11 1304. 1370
12 1316. 1385. 1394
14 1349. 1364

G. VIII............(13)........(328)
2 1302. 1353. 1360. 1380
3 1309. 1330. 1368. 1392
4 1305. 1344. 1386. 1400
5 1326

G. XVI..............(2).........(32)
1 1320. 1365.

Summa 391..........2737
Irreg. 5 Propr. 3192

**Centas 15.**

G. I.........(10)........(308)
9 1423
21 1483
23 1447. 1471
33 1459
37 1487
39 1439. 1451. 1499
45 1427

G. II.......(26).......(746)
6 1411. 1467
7 1402. 1453
8 1438
9 1458. 1468
10 1444. 1486. 1489. 1492.
11 1429. 1493
15 1431. 1478
16 1412
17 1415. 1418
18 1409. 1433. 1475
19 1436
21 1403
26 1481
29 1466
30 1454

G. IV......(49).....(1348)
3 1432. 1435. 1450
4 1408. 1417. 1422. 1462. 1465. 2474. 1477. 1498
5 1495. 1497. 1500
6 1404. 1405. 1407. 1413. 1420. 1437. 1442. 1443. 1452. 1457. 1472
7 1401. 1414. 1441. 1455. 1461. 1473. 1479
8 1416. 1434. 1446. 1463. 1476
9 1419. 1445. 1448. 1490. 1491.
10 1460. 1494
11 1406
12 1421. 1424. 1484
14 1469

G. VIII......(15)......(424)
2 1428. 1488
3 1425. 1456. 1464. 1480. 1482. 1485
4 1410. 1416. 1430. 1440(°2°). 1449. 1470
7 1496

Summa 378.......2826
Irreg. 1. Propr. 3282

**Centas 16.**

| | |
|---|---|
| G. I.........(9)......(299) | |
| 15 | 1567 |
| 19 | 1543 |
| 21 | 1523 |
| 27 | 1579 |
| 33 | 1531. 1583 |
| 49 | 1511 |
| 51 | 1559. 1571 |
| G. II.........(24)......(656) | |
| 6 | 1507. 1555. 1588 |
| 7 | 1527. 1597 |
| 9 | 1516. 1519. 1549. 1563 |
| 10 | 1522 |
| 11 | 1503. 1591 |
| 12 | 1502. 1587 |
| 17 | 1532. 1546. 1594 |
| 18 | 1539(*3*) |
| 19 | 1535 |
| 20 | 1553 |
| 22 | 1538. 1556 |
| 25 | 1514 |
| 27 | 1574 |
| G. IV......(53)......(1564) | |
| 3 | 1558. 1593 |
| 4 | 1510. 1513(*2*). 1528. 1537. 1552. 1578. 1582(*2*). 1600(*2*). |
| 5 | 1534. 1542. 1570. 1573. 1576 |
| 6 | 1501. 1506. 1521. 1525. 1548. 1572., 1575. 1585 |
| 7 | 1557. 1562. 1564. 1565. 1569. 1577 |
| 8 | 1504. 1508. 1536. 1551. 1561. 1568(*2*). 1598 |
| 9 | 1515. 1541. 1547. 1566. 1599 |
| 10 | 1509. 1524. 1544. 1592 |
| 11 | 1586 |
| 12 | 1517. 1526. 1550. 1580. 1595 |
| 13 | 1529. 1589 |
| G. VIII.....(13)......(360) | |
| 2 | 1540 |
| 3 | 1512. 1518. 1530. 1533. 1545. 1554. 1584 |
| 4 | 1520. 1590(*2*). 1596 |
| 5 | 1505. 1581 |
| G. XVI......(1).......(32) | |
| 2 | 1560 |
| Summa | 389........2911 |
| Irreg. 6 | Propr. 3416 |

**Centas 17.**

| | |
|---|---|
| G. I.........(6)......(182) | |
| 17 | 1663 |
| 21 | 1627 |
| 27 | 1607 |
| 33 | 1699 |
| 39 | 1667 |
| 45 | 1619 |
| G. II.......(37)......(1116) | |
| 6 | 1618 |
| 7 | 1642 |
| 8 | 1657 |
| 9 | 1603. 1621. 1675(*). 1683. 1687 |
| 10 | 1678. 1681. 1684 |
| 11 | 1639. 1654. 1693 |
| 12 | 1647. 1651 |
| 13 | 1669 |
| 14 | 1609. 1623. 1697 |
| 15 | 1611. 1622. 1643. 1682 |
| 16 | 1636 |
| 19 | 1637. 1671 |
| 20 | 1604 |
| 21 | 1613. 1658 |
| 22 | 1631. 1646. 1655 |
| 26 | 1679 |
| 27 | 1676. 1691 |
| 28 | 1601 |
| G. IV.......(41).....(1312) | |
| 3 | 1612 |
| 4 | 1633. 1660. 1698 |
| 5 | 1626. 1648. 1660. 1662. 1688. 1692. 1695 |
| 6 | 1615. 1620. 1635. 1659. 1666, 1668. 1690. 1696 |
| 7 | 1606. 1614. 1630. 1670 |
| 8 | 1602. 1628. 1673 |
| 9 | 1644. 1674. 1689 |
| 10 | 1625. 1629. 1652 |
| 11 | 1641. 1686 |
| 12 | 1649. 1661. 1664. 1694 |
| 13 | 1685 |
| 14 | 1616 |
| 16 | 1634 |
| G. VIII.....(15).......(368) | |
| 2 | 1605. 1632. 1645. 1653 1672. 1677 |
| 3 | 1617. 1638 |
| 4 | 1608. 1610. 1624. 1640. 1650. 1656. 1665 |
| G. XVI......(1).......(32) | |
| 2 | 1680 |
| Summa | 380.......3010 |
| Irreg. 1 | Impr. 513 |

**Centas 18.**

| | |
|---|---|
| G. I.........(5).......(95) | |
| 15 | 1723. 1747 |
| 17 | 1783 |
| 21 | 1787 |
| 27 | 1759 |
| G. II.......(35).....(1182) | |
| 10 | 1714. 1753.1774 |
| 12 | 1726. 1731. 1732. 1762. 1777. 1795 |
| 13 | 1719. 1735. 1741. 1789 |
| 14 | 1703. 1711. 1775 |
| 15 | 1707. 1756. 1772. 1779 |
| 17 | 1733 |
| 18 | 1727. 1763(*3*). 1791 |
| 19 | 1754 |
| 21 | 1709. 1715. 1724 |
| 23 | 1718 |
| 24 | 1751 |
| 25 | 1766. 1799 |
| 26 | 1721 |
| 29 | 1706 |
| 30 | 1739 |
| G. IV.......(41).....(1260) | |
| 3 | 1708 |
| 4 | 1717. 1737. 1738. 1780. 1792 |
| 5 | 1702. 1750. 1758. 1761. 1765. 1773. 1786. 1798 |
| 6 | 1728. 1743. 1744. 1771. 1782. 1797 |
| 7 | 1757. 1788 |
| 8 | 1764(*2*). 1767 |
| 9 | 1701. 1712. 1713, 1730. 1734. 1755(*). 1793 |
| 10 | 1745. 1746. 1748. 1778. 1796 |
| 11 | 1742 |
| 13 | 1790 |
| 16 | 1769. 1784 |
| 17 | 1781 |
| G. VIII.....(18)......(536) | |
| 2 | 1705. 1710. 1752. 1768 |
| 3 | 1720. 1722. 1729. 1740. 1800 |
| 4 | 1716. 1725. 1776. 1794 |
| 5 | 1749. 1770 |
| 6 | 1704. 1736. 1760 |
| G. XVI......(1).......(32) | |
| 2 | 1785 |
| Summa | 399.......3105 |
| Irreg. 3 | Impr. 525 |

DETERMINANTES NEGATIVI.

Centas 19.

| | |
|---|---|
| G. I……(7)…… | (263) |
| 15 | 1867 |
| 19 | 1831 |
| 27 | 1879 |
| 43 | 1847 |
| 45 | 1823. 1871 |
| 69 | 1811 |
| G II……(31)…… | (994) |
| 6 | 1807. 1873 |
| 7 | 1852 |
| 8 | 1822. 1828 |
| 9 | 1843. 1863. 1882 |
| 10 | 1858 |
| 11 | 1849 |
| 12 | 1803 |
| 14 | 1801. 1838 |
| 15 | 1819. 1835. 1875. 1891. 1894 |
| 17 | 1877 |
| 18 | 1899 |
| 19 | 1861 |
| 20 | 1839 |
| 21 | 1851. 1859. 1868. 1883 |
| 23 | 1814 |
| 24 | 1895 |
| 28 | 1874 |
| 30 | 1844 |
| 36 | 1889 |
| G. IV……(45)…… | (1416) |
| 4 | 1813. 1842. 1864. 1897 |
| 5 | 1810. 1857. 1887. 1893 |
| 6 | 1812. 1815. 1818. 1825. 1827. 1837. 1878. 1888. 1892. 1900 |
| 7 | 1816. 1846. 1855. 1898 |
| 8 | 1802. 1808. 1866. 1876. 1884 |
| 9 | 1804. 1809. 1821. 1834. 1836. 1853. 1862 |
| 10 | 1805. 1817. 1829. 1841. 1850. 1854 |
| 12 | 1856. 1865 |
| 13 | 1832 |
| 14 | 1826 |
| 16 | 1886 (*2*) |
| G. VIII……(16)…… | (496) |
| 2 | 1870. 1885 |
| 3 | 1830. 1833. 1840. 1890 |
| 4 | 1824. 1845. 1860. 1872 |
| 5 | 1806. 1820. 1869. 1880. 1881. 1896 |
| G. XVI……(1)…… | (16) |
| 1 | 1848 |
| Summa 393 …… | 3185 |
| Irreg. 1 | Impr. 513 |

Centas 20.

| | |
|---|---|
| G. I……(6)…… | (252) |
| 21 | 1987 |
| 27 | 1999 |
| 33 | 1951 |
| 39 | 1907 |
| 63 | 1931 (*3*) |
| 69 | 1979 |
| G. II……(33)…… | (1090) |
| 7 | 1948 |
| 8 | 1983 |
| 9 | 1915. 1927. 1933. 1963. 1996 |
| 10 | 1906. 1975 |
| 11 | 1903. 1942 |
| 12 | 1939. 1982. 1993 |
| 14 | 1954 |
| 15 | 1923 |
| 16 | 1922. 1943 |
| 18 | 1913. 1966. 1967. 1971 (*3*) |
| 21 | 1901. 1959. 1973. 1997 |
| 22 | 1919 |
| 25 | 1916 |
| 26 | 1934 |
| 27 | 1964. 1994 |
| 28 | 1991 |
| 35 | 1949 |
| G. IV……(43)…… | (1356) |
| 3 | 1978 |
| 4 | 1912. 1918 (*2*). 1945. 1957 |
| 5 | 1930. 1962. 1969. 1981 |
| 6 | 1908. 1917. 1926. 1936. 1941. 1947. 1972. 1984. 1990 |
| 7 | 1909. 1929. 1935 |
| 8 | 1911. 1924. 1940. 1958. 1961 |
| 9 | 1902. 1944. 1955. 1977. 1998 |
| 10 | 1921. 1928. 1952. 1956. 1985. 2000 |
| 12 | 1982. 1986. 1988 |
| 13 | 1970 |
| 14 | 1910 |
| 17 | 1946 |
| G. VIII……(18)…… | (584) |
| 2 | 1992 |
| 3 | 1905. 1932. 1950. 1960. 1968. 1995 |
| 4 | 1920. 1938. 1953. 1974. 1980. 1989 |
| 5 | 1904. 1965 |
| 6 | 1914. 1925 |
| 7 | 1976 |
| Summa 388 …… | 3282 |
| Irreg. 3 | Impr. 556 |

Centas 21.

| | |
|---|---|
| O. I……(8)…… | (284) |
| 21 | 2011. 2083 |
| 27 | 2003 |
| 33 | 2027 |
| 35 | 2087 |
| 45 | 2039. 2063 |
| 57 | 2099 |
| G. II……(30)…… | (1054) |
| 6 | 2017. 2062 |
| 8 | 2095 |
| 9 | 2023. 2038, 2047. 2053 |
| 12 | 2059. 2098 |
| 14 | 2007. 2018 |
| 15 | 2043. 2071. 2092 |
| 16 | 2048 |
| 17 | 2026. 2029 |
| 19 | 2031. 2069 |
| 20 | 2078 |
| 21 | 2012 |
| 22 | 2089 |
| 24 | 2019 |
| 25 | 2042 |
| 27 | 2051. 2075 (*3*) |
| 28 | 2066 |
| 30 | 2036. 2081 |
| 32 | 2084 |
| G. IV……(42)…… | (1376) |
| 4 | 2020. 2077 |
| 5 | 2032. 2073. 2074 |
| 6 | 2022. 2025. 2028. 2035. 2050. 2052. 2067. 2068. 2082. 2086. 2096 |
| 7 | 2008. 2033. 2044. 2055. 2058. 2094 |
| 8 | 2004. 2005. 2034. 2041. 2056 |
| 9 | 2014. 2049. 2060. 2076. 2079. 2091 |
| 10 | 2057. 2061 |
| 12 | 2006. 2009. 2045 |
| 13 | 2015 |
| 15 | 2096 |
| 17 | 2021 |
| 18 | 2054 |
| G .VIII……(19)…… | (632) |
| 2 | 2002. 2013. 2080. 2088 |
| 3 | 2037. 2065 |
| 4 | 2010. 2016. 2046. 2072. 2100 |
| 5 | 2030. 2070. 2085. 2093 |
| 6 | 2001. 2064. 2090 |
| 7 | 2024 |
| G. XVI……(1)…… | (32) |
| 2 | 2040 |
| Summa 404 …… | 3378 |
| Irreg. 1 | Impr. 560 |

## NACHLASS.

| | |
|---|---|
| Centas 22. | |
| G. I.....(5)..(149) | |
| 13 | 2143 |
| 21 | 2179 |
| 27 | 2187(*3*) |
| 39 | 2131 |
| 49 | 2111 |
| G. II...(33).(1174) | |
| 8 | 2113. |
| | 2137 |
| 9 | 2122. |
| | 2167. |
| | 2188 |
| 10 | 2164 |
| 11 | 2182 |
| 12 | 2107. |
| | 2116 |
| 13 | 2102. |
| | 2197 |
| 14 | 2127 |
| 15 | 2151. |
| | 2191 |
| 16 | 2153. |
| | 2194 |
| 17 | 2103. |
| | 2119 |
| 18 | 2155. |
| | 2161. |
| | 2199 |
| 21 | 2123. |
| | 2138. |
| | 2147. |
| | 2171. |
| | 2183. |
| | 2186 |
| 24 | 2195 |
| 28 | 3129 |
| 30 | 2126. |
| | 2159 |
| 32 | 2174 |
| 39 | 2141 |
| G. IV.(46).(1592) | |
| 5 | 2101. |
| | 2118. |
| | 2125. |
| | 2152. |
| | 2158. |
| | 2173. |
| | 2178 |
| 6 | 2104. |
| | 2115. |
| | 2132. |
| | 2139. |
| | 2148. |
| | 2157. |
| | 2163. |
| | 2172 |
| 7 | 2110. |
| | 2140. |
| | 2146. |
| | 2149. |
| | 2165 |
| 8 | 2134. |
| | 2176(*2*) |
| | 2192 |
| 9 | 2106. |
| | 2108. |
| | 2117. |
| | 2124. |
| | 2133(*3*). |
| | 2175. |
| | 2181. |
| | 2198 |
| 10 | 2150. |
| | 2154. |
| | 2166. |
| | 2177 |
| 11 | 2135 |
| 12 | 2105. |
| | 2156. |
| | 2168. |
| | 2169. |
| | 2196 |
| 14 | 2114. |
| | 2144. |
| | 2162 |
| 15 | 2189 |
| 16 | 2180 |
| G. VIII.(14).(424) | |
| 2 | 2128. |
| | 2170 |
| 3 | 2160. |
| | 2185. |
| | 2190. |
| | 2193. |
| | 2200 |
| 4 | 2112(*2*). |
| | 2130. |
| | 2142 |
| 5 | 2109. |
| | 2121. |
| | 2136 |
| 7 | 2120 |
| G. XVI.(2)...(80) | |
| 2 | 2145 |
| 3 | 2184 |
| Summa | 399... 3419 |
| Irreg. 4 | Impr. 585 |

| | |
|---|---|
| Centas 23. | |
| G. I.....(7)..(217) | |
| 15 | 2203 |
| 21 | 2251 |
| 29 | 2287 |
| 33 | 2267 |
| 35 | 2239 |
| 39 | 2207 |
| 45 | 2243(*3*) |
| G. II..(29).(1084) | |
| 7 | 2293 |
| 9 | 2221. |
| | 2227. |
| | 2283 |
| 10 | 2281 |
| 11 | 2215. |
| | 2263 |
| 12 | 2209 |
| 13 | 2218 |
| 14 | 2258 |
| 15 | 2237. |
| | 2269. |
| | 2284. |
| | 2299 |
| 16 | 2206 |
| 17 | 2234 |
| 18 | 2228 |
| 20 | 2297 |
| 21 | 2213. |
| | 2259 |
| 22 | 2271 |
| 24 | 2273 |
| 27 | 2252. |
| | 2291 |
| 28 | 2279 |
| 29 | 2231 |
| 32 | 2276 |
| 36 | 2219(*3*) |
| 39 | 2246 |
| G. IV.(46).(1612) | |
| 4 | 2212. |
| | 2242. |
| | 2248. |
| | 2272 |
| 5 | 2202. |
| | 2230. |
| | 2247. |
| | 2290 |
| 6 | 2223. |
| | 2257. |
| | 2260. |
| | 2268. |
| | 2275. |
| | 2278 |
| 7 | 2217. |
| | 2238. |
| | 2270 |
| 8 | 2236. |
| | 2245. |
| | 2254(*2*). |
| | 2286. |
| | 2292. |
| | 2298 |
| 9 | 2214. |
| | 2221. |
| | 2235(*3*). |
| | 2241. |
| | 2253. |
| | 2266. |
| | 2295. |
| | 2300 |
| 10 | 2249. |
| | 2250. |
| | 2255. |
| | 2282 |
| 11 | 2204. |
| | 2216 |
| 12 | 2211. |
| | 2225. |
| | 2229 |
| 13 | 2222 |
| 14 | 2274 |
| 15 | 2264. |
| | 2285 |
| 16 | 2201 |
| 19 | 2294 |
| G. VIII.(17).(584) | |
| 2 | 2233. |
| | 2277 |
| 3 | 2205. |
| | 2220. |
| | 2262 |
| 4 | 2208. |
| | 2232. |
| | 2244. |
| | 2256. |
| | 2265. |
| | 2289. |
| | 2296 |
| 5 | 2226. |
| | 2288 |
| 6 | 2240 |
| 7 | 2210 |
| 9 | 2261 |
| G. XVI.(1)..(32) | |
| 2 | 2280 |
| Summa | 401...3529 |
| Irreg. 4 | Impr. 571 |

| | |
|---|---|
| Centas 24. | |
| G. I....(7)..(291) | |
| 15 | 2347 |
| 29 | 2311. |
| | 2383 |
| 39 | 2371 |
| 57 | 2339 |
| 59 | 2399 |
| 63 | 2351 |
| G. II..(32).(1106) | |
| 7 | 2335 |
| 8 | 2302. |
| | 2308. |
| | 2377 |
| 11 | 2326. |
| | 2374 |
| 12 | 2307. |
| | 2323. |
| | 2395 |
| 13 | 2362. |
| | 2367 |
| 14 | 2359 |
| 15 | 2303. |
| | 2319. |
| | 2341. |
| | 2363 |
| 16 | 2386 |
| 17 | 2333. |
| | 2389. |
| | 2391 |
| 19 | 2381 |
| 20 | 2375 |
| 21 | 2342. |
| | 2348. |
| | 2357 |
| 24 | 2327. |
| | 2372 |
| 25 | 2396 |
| 27 | 2315(*3*) |
| 30 | 2393 |
| 32 | 2306 |
| 33 | 2309 |
| G. IV..(40).(1520) | |
| 4 | 2332. |
| | 2353. |
| | 2368 |
| 5 | 2398 |
| 6 | 2305. |
| | 2317. |
| | 2322. |
| | 2338. |
| | 2358. |
| | 2388 |
| 7 | 2314. |
| | 2382 |
| 8 | 2304. |
| | 2312. |
| | 2313. |
| | 2329(*2*). |
| | 2343. |
| | 2350. |
| | 2356 |
| 9 | 2318. |
| | 2344. |
| | 2349. |
| | 2355. |
| | 2361. |
| | 2387 |
| 11 | 2334. |
| | 2364 |
| 12 | 2316. |
| | 2331. |
| | 2376. |
| | 2379(*2*). |
| | 2390 |
| 14 | 2324. |
| | 2354. |
| | 2384 |
| 15 | 2321. |
| | 2330. |
| | 2378 |
| 16 | 2336 |
| 18 | 2369 |
| G. VIII.(20).(648) | |
| 2 | 2392 |
| 3 | 2325. |
| | 2346. |
| | 2352. |
| | 2370. |
| | 2373. |
| | 2380 |
| 4 | 2320. |
| | 2328. |
| | 2337. |
| | 2340. |
| | 2365. |
| | 2385(*2*). |
| | 2397. |
| | 2400(*2*) |
| 5 | 2360. |
| | 2394 |
| 6 | 2301. |
| | 2376 |
| 7 | 2345 |
| G. XVI.(1)..(32) | |
| 2 | 2310 |
| Summa | 407... 3597 |
| Irreg. 5 | Impr. 611 |

## DETERMINANTES NEGATIVI.

**Centas 25.**

| | |
|---|---|
| G. I...(5)..(217) | |
| 21 | 2467 |
| 33 | 2423 |
| 37 | 2447 |
| 57 | 2459 |
| 69 | 2411 |
| G. II..(35).(1250) | |
| 9 | 2403 (*3*). |
| | 2437 (*3*). |
| | 2443. |
| | 2458 |
| 10 | 2407. |
| | 2452. |
| | 2473. |
| | 2487. |
| | 2500 |
| 12 | 2419. |
| | 2468. |
| | 2479 |
| 13 | 2428 |
| 14 | 2401. |
| | 2446. |
| | 2455 |
| 15 | 2476 |
| 16 | 2434. |
| | 2462 |
| 17 | 2463 |
| 18 | 2417. |
| | 2491 |
| 19 | 2477 |
| 20 | 2402. |
| | 2404. |
| | 2498 |
| 21 | 2427 |
| 22 | 2439 |
| 27 | 2426 |
| 28 | 2495 |
| 30 | 2483 |
| 31 | 2471 |
| 33 | 2435 |
| 38 | 2441 |
| 39 | 2474 |
| G. IV.(38).(1472) | |
| 4 | 2410 |
| 5 | 2422. |
| | 2433. |
| | 2494 |
| 6 | 2412. |
| | 2413. |
| | 2425. |
| | 2451. |
| | 2475. |
| | 2482. |
| | 2488. |
| | 2493 |
| 7 | 2416. |
| | 2431. |
| | 2438. |
| | 2497 |
| 8 | 2454 |
| 9 | 2430 (*3*). |
| | 2461 |
| 10 | 2449 |
| 11 | 2421. |
| | 2489. |
| | 2492 |
| 12 | 2420 (*2*). |
| | 2432. |
| | 2450. |
| | 2466. |
| | 2484. |
| | 2499 |
| 13 | 2453. |
| | 2469. |
| | 2481 |
| 14 | 2429. |
| | 2486 |
| 15 | 2406. |
| | 2444 |
| 17 | 2456 |
| 18 | 2414 |
| G. VIII.(22).(720) | |
| 3 | 2418. |
| | 2424. |
| | 2440. |
| | 2457. |
| | 2472. |
| | 2485 |
| 4 | 2436. |
| | 2442. |
| | 2445. |
| | 2448 (*2*). |
| | 2464. |
| | 2465. |
| | 2470. |
| | 2478. |
| | 2490. |
| | 2496 |
| 5 | 2405. |
| | 2409. |
| | 2415. |
| | 2460 |
| 6 | 2408. |
| | 2480 |

Summa 403..3659
Irreg. 5 — Impr. 595

**Centas 26.**

| | |
|---|---|
| G. I...(7)..(301) | |
| 21 | 2503 |
| 33 | 2539 |
| 35 | 2543 |
| 41 | 2551 |
| 51 | 2531 |
| 57 | 2591 |
| 63 | 2579 |
| G. II..(29).(1028) | |
| 8 | 2578 |
| 9 | 2515. |
| | 2557. |
| | 2563 (*3*). |
| | 2566. |
| | 2572 |
| 10 | 2527 |
| 12 | 2587. |
| | 2593 |
| 13 | 2524 |
| 15 | 2523. |
| | 2575. |
| | 2518. |
| | 2599 |
| 16 | 2521 |
| 18 | 2511. |
| | 2547 |
| 19 | 2554 |
| 20 | 2559 |
| 21 | 2507. |
| | 2571 |
| 22 | 2567. |
| | 2594 |
| 25 | 2582. |
| | 2588 |
| 28 | 2564 |
| 32 | 2519. |
| | 2558 |
| 35 | 2549 |
| G. IV.(45).(1752) | |
| 4 | 2533. |
| | 2542 (*2*) |
| 5 | 2577 |
| 6 | 2512. |
| | 2517. |
| | 2538. |
| | 2545. |
| | 2548. |
| | 2592. |
| | 2598 |
| 7 | 2502. |
| | 2509. |
| | 2535. |
| | 2536. |
| | 2556. |
| | 2583 |
| 8 | 2506. |
| | 2513. |
| | 2528. |
| | 2560. |
| | 2569. |
| | 2589 |
| 9 | 2522. |
| | 2555. |
| | 2581. |
| | 2595 |
| 10 | 2514. |
| | 2529. |
| | 2532. |
| | 2596 |
| 11 | 2570. |
| | 2573 |
| 12 | 2597 |
| 13 | 2510 |
| 14 | 2501. |
| | 2525. |
| | 2586 |
| 15 | 2526. |
| | 2534. |
| | 2537. |
| | 2540 |
| 16 | 2546. |
| | 2561 |
| 18 | 2504. |
| | 2516 |
| G. VIII (18).(648) | |
| 3 | 2508. |
| | 2530. |
| | 2550. |
| | 2553. |
| | 2562. |
| | 2590 |
| 4 | 2568. |
| | 2580. |
| | 2584 |
| 5 | 2505. |
| | 2541. |
| | 2544. |
| | 2552. |
| | 2585 |
| 6 | 2565. |
| | 2574. |
| | 2600 |
| 8 | 2576 |
| G. XVI.(1)..(32) | |
| 2 | 2520 |

Summa 405..3761
Irreg. 2 — Impr. 641

**Centas 27.**

| | |
|---|---|
| G. I...(7)...(231) | |
| 15 | 2647. |
| | 2683 |
| 23 | 2671 |
| 39 | 2659 |
| 43 | 2663 |
| 45 | 2699 (*3*) |
| 51 | 2687 |
| G. II..(29).(1196) | |
| 10 | 2638 |
| 11 | 2623. |
| | 2662. |
| | 2677 |
| 12 | 2611. |
| | 2689. |
| | 2692 |
| 14 | 2612 |
| 15 | 2602. |
| | 2643 |
| 16 | 2617. |
| | 2633. |
| | 2657 |
| 18 | 2619 (*3*). |
| | 2627. |
| | 2644 |
| 21 | 2693 |
| 23 | 2614 |
| | 2615 |
| 24 | 2631. |
| | 2654 |
| 26 | 2642 |
| 27 | 2675 (*3*) |
| 30 | 2603. |
| | 2606 |
| 31 | 2621 |
| 33 | 2636 |
| 39 | 2651 |
| 42 | 2609 |
| G. IV.(46).(2776) | |
| 3 | 2608 |
| 4 | 2605 |
| 5 | 2641 |
| 6 | 2620. |
| | 2629. |
| | 2650. |
| | 2653. |
| | 2658. |
| | 2667. |
| | 2668. |
| | 2676. |
| | 2682. |
| | 2695. |
| | 2698 |
| 7 | 2607 |
| 8 | 2601. |
| | 2628 (*2*). |
| | 2655. |
| | 2674. |
| | 2686 |
| 9 | 2626. |
| | 2634. |
| | 2635. |
| | 2637. |
| | 2646 (*3*). |
| | 2673. |
| | 2700 (*3*) |
| 10 | 2656. |
| | 2678 |
| 11 | 2645. |
| | 2648. |
| | 2649. |
| | 2672 |
| 12 | 2661. |
| | 2691. |
| | 2696 |
| 13 | 2679 |
| 15 | 2630. |
| | 2684. |
| | 2690. |
| | 2694 |
| 16 | 2624 (*3*). |
| | 2639. |
| | 2669 |
| 17 | 2666 |
| 18 | 2681 |
| G. VIII.(17).(584) | |
| 2 | 2632 |
| 3 | 2613. |
| | 2622. |
| | 2680. |
| | 2685. |
| | 2697 |
| 4 | 2652. |
| | 2665. |
| | 2688 |
| 5 | 2610. |
| | 2618. |
| | 2625. |
| | 2664. |
| | 2670. |
| 6 | 2604. |
| | 2660 |
| 7 | 2616 |
| G. XVI.(1)..(32) | |
| 2 | 2640 |

Summa 401...3819
Irreg. 7 — Impr. 625

Centas 28.

| | |
|---|---|
| G. I...(6)..(208) | |
| 21 | 2707. |
| | 2767 |
| 55 | 2751 |
| 59 | 2791 |
| 41 | 2719 |
| 53 | 2711 |
| G. II.(29).(1190) | |
| 9 | 2787. |
| | 2797 |
| 10 | 2722. |
| | 2745 |
| 12 | 2715 |
| 13 | 2762 |
| 14 | 2734. |
| | 2753 |
| 15 | 2727. |
| | 2732. |
| | 2764 |
| 18 | 2723. |
| | 2763(*5*). |
| | 2785 |
| 19 | 2758. |
| | 2746. |
| | 2799 |
| 20 | 2777 |
| 21 | 2749. |
| | 2779 |
| 22 | 2798 |
| 27 | 2747. |
| | 2759 |
| 29 | 2741 |
| 30 | 2708 |
| 31 | 2735 |
| 39 | 2771 |
| 40 | 2729 |
| 41 | 2789 |
| G. IV.(47).(1864) | |
| 4 | 2775. |
| | 2788 |
| 5 | 2776 |
| 6 | 2704. |
| | 2710. |
| | 2715. |
| | 2718. |
| | 2725. |
| | 2740. |
| | 2748. |
| | 2752. |
| | 2755. |
| | 2758. |
| | 2794 |
| 7 | 2703. |
| | 2761. |
| | 2766. |
| | 2782 |
| 8 | 2753. |
| | 2742. |
| | 2775. |
| | 2785 |
| 9 | 2716. |
| | 2770. |
| | 2778. |
| | 2781. |
| | 2795 |
| 10 | 2724. |
| | 2751 |
| 11 | 2757 |
| 12 | 2701. |
| | 2702(*2*). |
| | 2739. |
| | 2754 |
| | 2780 |
| 13 | 2721. |
| | 2792 |
| 14 | 2744. |
| | 2768. |
| | 2774 |
| 15 | 2750. |
| | 2796 |
| 17 | 2726 |
| 18 | 2705. |
| | 2786 |
| 20 | 2714. |
| | 2756(*2*) |
| G. VIII.(16).(568) | |
| 2 | 2757 |
| 3 | 2728. |
| | 2800 |
| 4 | 2706. |
| | 2709. |
| | 2717. |
| | 2745. |
| | 2772. |
| | 2790. |
| | 2793 |
| 5 | 2712. |
| | 2769 |
| 6 | 2720. |
| | 2736. |
| | 2784 |
| 7 | 2765 |
| G. XVI.(2)..(64) | |
| 2 | 2750. |
| | 2760 |
| Summa | 412..3894 |
| Irreg. 3 | Impr. 644 |

Centas 29.

| | |
|---|---|
| G. I..(6)..(250) | |
| 25 | 2887 |
| 27 | 2805 |
| 35 | 2851 |
| 45 | 2843 |
| 57 | 2879 |
| 65 | 2819 |
| G. II..(32).(1298) | |
| 8 | 2878 |
| 10 | 2818. |
| | 2856. |
| | 2857 |
| 11 | 2815. |
| | 2863 |
| 12 | 2827 |
| 13 | 2809. |
| | 2825. |
| | 2859. |
| | 2854 |
| 15 | 2875. |
| | 2883. |
| | 2899 |
| 16 | 2835 |
| 18 | 2867. |
| | 2897 |
| 19 | 2858 |
| 20 | 2866 |
| 25 | 2857 |
| 24 | 2811 |
| 26 | 2807 |
| 27 | 2859. |
| | 2891(*5*) |
| 30 | 2801. |
| | 2855 |
| 31 | 2876 |
| 33 | 2861 |
| 34 | 2804. |
| | 2831. |
| | 2894 |
| 36 | 2846 |
| G. IV.(45).(1680) | |
| 4 | 2842. |
| | 2893 |
| 5 | 2850. |
| | 2853 |
| 6 | 2802. |
| | 2872. |
| | 2892 |
| 7 | 2812. |
| | 2881 |
| 8 | 2817. |
| | 2845. |
| | 2847. |
| | 2848(*2*). |
| | 2868. |
| | 2884 |
| 9 | 2806. |
| | 2828. |
| | 2835(*5*). |
| | 2862. |
| | 2887. |
| | 2888. |
| | 2890. |
| | 2895 |
| 10 | 2810. |
| | 2844. |
| | 2869. |
| | 2871. |
| | 2874. |
| | 2896 |
| 11 | 2841 |
| 12 | 2816. |
| | 2822. |
| | 2824. |
| | 2825. |
| | 2852. |
| | 2873. |
| | 2900 |
| 15 | 2826 |
| 15 | 2815. |
| | 2864. |
| | 2889 |
| 16 | 2882 |
| 21 | 2834 |
| G. VIII(17).(648) | |
| 2 | 2832 |
| 3 | 2808. |
| | 2860 |
| 4 | 2821. |
| | 2829. |
| | 2850(*2*). |
| | 2865. |
| | 2880. |
| | 2898 |
| 5 | 2814. |
| | 2838. |
| | 2877. |
| | 2886 |
| 6 | 2820 |
| 7 | 2870 |
| 8 | 2840. |
| | 2849 |
| G. XVI.(2)..(96) | |
| 5 | 2805. |
| | 2856 |
| Summa | 410..5972 |
| Irreg. 4 | Impr. 636 |

Centas 30.

| | |
|---|---|
| G. I..(6)..(322) | |
| 31 | 2927 |
| 35 | 2971 |
| 59 | 2963 |
| 59 | 2903 |
| 75 | 2999 |
| 87 | 2939 |
| G. II..(35).(1266) | |
| 8 | 2962 |
| 9 | 2902. |
| | 2923. |
| | 2998 |
| 10 | 2983 |
| 11 | 2917. |
| | 2935 |
| 12 | 2947. |
| | 2955. |
| | 2995 |
| 15 | 2908 |
| 14 | 2952 |
| 15 | 2956. |
| | 2986 |
| 17 | 2918 |
| 18 | 2916. |
| | 2945. |
| | 2979 |
| 20 | 2942. |
| | 2959 |
| 21 | 2911. |
| | 2931. |
| | 2972 |
| 24 | 2974. |
| | 2991 |
| 26 | 2969 |
| 27 | 2951. |
| | 2957 |
| 30 | 2978. |
| | 2987 |
| 55 | 2906 |
| 35 | 2909 |
| 43 | 2966 |
| G. IV.(37).(1588) | |
| 5 | 2965 |
| 6 | 2907. |
| | 2914. |
| | 2938. |
| | 2977. |
| | 2997 |
| 7 | 2913. |
| | 2930. |
| | 2941. |
| | 2973 |
| 8 | 2944. |
| | 2946. |
| | 2949. |
| | 2980(*2*) |
| 9 | 2950. |
| | 2955. |
| | 2988. |
| | 2989 |
| 10 | 2919. |
| | 2929. |
| | 2948. |
| | 2975 |
| 11 | 2922. |
| | 2935. |
| | 2934. |
| | 2967 |
| 12 | 2995(*2*) |
| 15 | 2901. |
| | 2984 |
| 16 | 2921. |
| | 2994. |
| | 2996 |
| 18 | 2915. |
| | 2924 |
| 20 | 2936. |
| | 2954. |
| | 1981 |
| G. VIII(24).(888) | |
| 2 | 2968 |
| 5 | 3905. |
| | 2920. |
| | 2937. |
| | 2970. |
| | 2982. |
| | 2992 |
| 4 | 2928. |
| | 2940. |
| | 2952. |
| | 2958. |
| | 2985 |
| 5 | 2904. |
| | 2910. |
| | 2926. |
| | 2990. |
| | 3000 |
| 6 | 2912. |
| | 2925. |
| | 2961. |
| | 2964. |
| | 2976 |
| 8 | 2945. |
| | 2960 |
| Summa | 412..4064 |
| Irreg. 2 | Impr. 714 |

DETERMINANTES NEGATIVI.

| Centas 43. | |
|---|---|
| G. I...(7)..(425) | |
| 27 | 4243 |
| 45 | 4219 |
| 51 | 4231 |
| 63 | 4283 |
| 65 | 4271 |
| 69 | 4211 |
| 105 | 4259 |
| G. II.(32).(1592) | |
| 12 | 4222. |
| | 4258. |
| | 4267. |
| | 4273 |
| 13 | 4207. |
| | 4282 |
| 14 | 4279 |
| 15 | 4204. |
| | 4227 |
| 17 | 4261 |
| 18 | 4201. |
| | 4291 (*3*). |
| | 4297 |
| 19 | 4252 |
| 21 | 4203. |
| | 4253 |
| 22 | 4223 |
| 24 | 4239. |
| | 4287. |
| | 4295 |
| 26 | 4217. |
| | 4244 |
| 27 | 4262. |
| | 4299 |
| 30 | 4276 |
| 31 | 4247 |
| 39 | 4229 |
| 40 | 4286 |
| 42 | 4274 |
| 54 | 4226. |
| | 4241 |
| 56 | 4289 |
| G. IV.(38).(1780) | |
| 6 | 4225. |
| | 4237. |
| | 4288 |
| 7 | 4210. |
| | 4213 |
| 8 | 4228. |
| | 4249 |
| 9 | 4236. |
| | 4246. |
| | 4255. |
| | 4263. |
| | 4285. |
| | 4293. |
| | 4294. |
| | 4300 (*3*) |
| 11 | 4215. |
| | 4238. |
| | 4281. |
| | 4298 |
| 12 | 4212 (*2*). |
| | 4232. |
| | 4251. |
| | 4275 (*2*). |
| | 4292 |
| 13 | 4202. |
| | 4206. |
| | 4208. |
| | 4234 |
| 14 | 4205 |
| 15 | 4235. |
| | 4250. |
| | 4266 |
| 17 | 4269 |
| 18 | 4220. |
| | 4265. |
| | 4268 |
| 19 | 4254 |
| 20 | 4214 |
| G. VIII (22)..(976) | |
| 3 | 4218. |
| | 4257. |
| | 4272 |
| 4 | 4216. |
| | 4240. |
| | 4260. |
| | 4270. |
| | 4278 |
| 5 | 4230. |
| | 4233. |
| | 4242. |
| | 4264. |
| | 4284 |
| 6 | 4245. |
| | 4248. |
| | 4277 |
| 7 | 4209 |
| 8 | 4221. |
| | 4224. |
| | 4296 |
| 9 | 4280 |
| 10 | 4256 |
| G. XVI.(1)..(48) | |
| 3 | 4290 |
| Summa | 415...4821 |
| Irreg. 4 | |

| Centas 51. | |
|---|---|
| G. I...(8)..(546) | |
| 25 | 5023 |
| 45 | 5003 |
| 57 | 5059 |
| 63 | 5011 |
| 69 | 5087 |
| 83 | 5039 |
| 87 | 5051 |
| 117 | 5099 |
| G. II..(22).(1104) | |
| 11 | 5077. |
| | 5098 |
| 15 | 5047. |
| | 5062 |
| 16 | 5086 |
| 18 | 5007. |
| | 5041. |
| | 5042. |
| | 5063 |
| 21 | 5027. |
| | 5043. |
| | 5091 |
| 24 | 5095 |
| 25 | 5071 |
| 27 | 5067. |
| | 5078 |
| 30 | 5009 |
| 32 | 5079 |
| 39 | 5021 |
| 42 | 5006 |
| 45 | 5036 (*3*) |
| 58 | 5081. |
| G. IV.(51).(2728) | |
| 6 | 5020. |
| | 5065. |
| | 5083 |
| 7 | 5038 |
| 8 | 5002. |
| | 5008. |
| | 5017. |
| | 5058. |
| | 5089 |
| 9 | 5013. |
| | 5014. |
| | 5035. |
| | 5050. |
| | 5055. |
| | 5068 (*3*). |
| | 5097 |
| 10 | 5026. |
| | 5028. |
| | 5044. |
| | 5052. |
| | 5053. |
| | 5056. |
| | 5072. |
| | 5092 |
| 11 | 5093 |
| 12 | 5022. |
| | 5076 |
| 13 | 5029. |
| | 5090 |
| 14 | 5046. |
| | 5074 |
| 15 | 5019. |
| | 5030. |
| | 5094 |
| 16 | 5012. |
| | 5031 (*2*) |
| 18 | 5004. |
| | 5033. |
| | 5034. |
| | 5048. |
| | 5054. |
| | 5069 (*3*). |
| | 5075 (*3*) |
| 19 | 5001. |
| | 5018 |
| 20 | 5057. |
| | 5084 |
| 22 | 5015 |
| 26 | 5024. |
| | 5045 |
| 30 | 5066 |
| G. VIII (16).(784) | |
| 3 | 5032 |
| 4 | 5037 |
| 5 | 5061. |
| | 5080 |
| 6 | 5010. |
| | 5025. |
| | 5049. |
| | 5070. |
| | 5073. |
| | 5082. |
| | 5085. |
| | 5088. |
| | 5100 |
| 8 | 5064 |
| 9 | 5096 |
| 10 | 5060 |
| G. XVI.(3).(128) | |
| 2 | 5005 |
| 3 | 5016. |
| | 5040 |
| Summa | 424...5290 |
| Irreg. 5 | |

| Centas 61. | |
|---|---|
| G. I...(7)..(353) | |
| 27 | 6007. |
| | 6043 |
| 45 | 6067 (*3*). |
| | 6091 (*3*) |
| 57 | 6079 |
| 71 | 6047 |
| 81 | 6011 (*3*) |
| G. II..(22).(1440) | |
| 12 | 6073 |
| 15 | 6022 |
| 17 | 6037 |
| 18 | 6087 |
| 22 | 6082. |
| | 6092 |
| 24 | 6098 |
| 25 | 6031. |
| | 6053 |
| 27 | 6075 (*3*) |
| 28 | 6046 |
| 31 | 6038 |
| 33 | 6019 |
| 35 | 6029 |
| 39 | 6059 |
| 41 | 6023 |
| 42 | 6051 |
| 46 | 6002 |
| 48 | 6071 |
| 49 | 6044 |
| 58 | 6089 |
| 63 | 6074 |
| G. IV.(53).(3012) | |
| 7 | 6013. |
| | 6028 |
| 8 | 6001 (*2*). |
| | 6052 (*2*) |
| 9 | 6015. |
| | 6021 (*3*). |
| | 6055. |
| | 6063. |
| | 6064. |
| | 6070. |
| | 6076. |
| | 6078. |
| | 6085 (*3*) |
| 10 | 6010. |
| | 6034. |
| | 6049. |
| | 6058. |
| | 6088. |
| 11 | 6012 |
| 12 | 6003. |
| | 6004. |
| | 6008. |
| | 6025. |
| | 6027. |
| | 6057. |
| | 6066. |
| | 6077. |
| | 6084. |
| | 6099. |
| | 6100 (*2*) |
| 13 | 6033. |
| | 6094 |
| 14 | 6062 |
| 15 | 6017. |
| | 6039. |
| | 6050. |
| | 6081. |
| | 6093. |
| 16 | 6016 |
| 18 | 6065. |
| | 6083 (*3*) |
| 19 | 6009 |
| 20 | 6036. |
| | 6054 |
| 21 | 6035. |
| | 6095 |
| 24 | 6014 (*2*). |
| | 6068. |
| | 6086 |
| 25 | 6056 |
| 26 | 6005 |
| 28 | 6026 |
| 30 | 6041 |
| G. VIII.(14).(768) | |
| 3 | 6097 |
| 4 | 6040. |
| | 6042 |
| 6 | 6018. |
| | 6024. |
| | 6030. |
| | 6048 |
| 8 | 6032. |
| | 6061. |
| | 6069. |
| | 6080 |
| 9 | 6060 |
| 10 | 6020. |
| | 6096 |
| G. XVI.(4).(208) | |
| 3 | 6045. |
| | 6072. |
| | 6090 |
| 4 | 6006 |
| Summa | 439..5781 |
| Irreg. 11. | Impr. 933 |

## NACHLASS.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centas 62. | | | 6181 |
| G. I . . . (5) . . (265) | | 14 | 6145. |
| 33 | 6163 | | 6174. |
| 39 | 6199 | | 6185 |
| 41 | 6143 | 15 | 6102. |
| 59 | 6151 | | 6109. |
| 93 | 6131 | | 6125. |
| G. II . . (28) . (1704) | | | 6126. |
| 11 | 6127 | | 6129. |
| 14 | 6103 | | 6171 |
| 15 | 6115. | 16 | 6144. |
| | 6147 | | 6189 |
| 16 | 6178 | 17 | 6128. |
| 18 | 6183. | | 6184 |
| | 6187. | 18 | 6111. |
| | 6196 | | 6135. |
| 19 | 6172 | | 6156 (*5*). |
| 21 | 6133 | | 6164 |
| 22 | 6121 | 19 | 6140 |
| 27 | 6122 | 20 | 6114. |
| 29 | 6166 | | 6137. |
| 30 | 6139 | | 6161. |
| 33 | 6124. | | 6176. |
| | 6167 | | 6186 |
| 34 | 6113 | 22 | 6152. |
| 35 | 6134. | | 6194 |
| | 6197 | 25 | 6170 |
| 37 | 6173 | 28 | 6146 |
| 40 | 6159 | G. VIII (20) . (1200) | |
| 41 | 6119 | 4 | 6118 |
| 42 | 6155. | 5 | 6136. |
| | 6158 | | 6153. |
| 45 | 6107 | | 6162. |
| 49 | 6191 | | 6168 |
| 53 | 6101 | 6 | 6132. |
| 60 | 6179 | | 6138. |
| G. IV . (44) . (2568) | | | 6150. |
| 6 | 6157 | | 6165. |
| 7 | 6108. | | 6177. |
| | 6142. | | 6180. |
| | 6193 | | 6192. |
| 8 | 6112. | | 6195 |
| | 6148 | 7 | 6141 |
| 9 | 6130. | 9 | 6188 |
| | 6154. | 10 | 6110 |
| | 6175 | 12 | 6104. |
| 10 | 6106. | | 6200 |
| | 6117. | 13 | 6116 |
| | 6169. | 15 | 6149 |
| | 6198 | G. XVI (3) . . (128) | |
| 11 | 6182. | 2 | 6160 |
| | 6190 | 3 | 6105. |
| 12 | 6123 (*2*). | | 6120 |
| | Summa | 445 . . 5865 | |
| Irreg. 2 | | Impr. | 975 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centas 63. | | 14 | 6228. |
| G. I . . . (7) . . (447) | | | 6245. |
| 43 | 6247 | | 6260. |
| 45 | 6211 | | 6276 |
| 51 | 6203. | 15 | 6214. |
| | 6271. | | 6234. |
| | 6287 | | 6249 |
| 77 | 6263 | 16 | 6231. |
| 129 | 6299 | | 6233. |
| G. II . . (28) . (1678) | | | 6244. |
| 12 | 6238. | | 6272 (*4*) |
| | 6295 | 17 | 6294 |
| 15 | 6259. | 18 | 6226 (*3*). |
| | 6268 | | 6251 |
| 16 | 6217 | 19 | 6281. |
| 18 | 6267 (*3*). | | 6289 |
| | 6283 (*3*) | 20 | 6261 |
| 20 | 6223. | 21 | 6266 |
| | 6241. | 22 | 6224 |
| | 6274 | 23 | 6278 |
| 23 | 6218. | 24 | 6209. |
| | 6277 | | 6215 |
| 25 | 6207. | 25 | 6206 |
| | 6250 | 27 | 6296 |
| 27 | 6227 (*3*) | 35 | 6254 |
| 29 | 6229 | G. VIII (23) . (1176) | |
| 30 | 6212. | 3 | 6232 |
| | 6219 | 4 | 6273 |
| 33 | 6243 | 5 | 6205. |
| 36 | 6242 | | 6213. |
| 38 | 6257 | | 6258. |
| 42 | 6275 | | 6280. |
| 45 | 6239. | | 6285 |
| | 6291 (*3*) | 6 | 6210. |
| 51 | 6236. | | 6222. |
| | 6284 | | 6225. |
| 57 | 6269 | | 6237. |
| 63 | 6221 (*3*) | | 6288. |
| G. IV . (39) . (2428) | | | 6290. |
| 6 | 6220. | | 6300 |
| | 6262 | 7 | 6248. |
| 7 | 6253 | | 6256. |
| 8 | 6201. | | 6265. |
| | 6208 (*2*) | | 6279. |
| 9 | 6235. | | 6293 |
| | 6252. | 8 | 6204 |
| | 6297 | 9 | 6264 |
| 10 | 6246. | 10 | 6201 |
| | 6292 | 11 | 6230 |
| 11 | 6298 | G. XVI (3) . . (176) | |
| 12 | 6255. | 3 | 6216 |
| | 6286 (*2*) | 4 | 6240. |
| 13 | 6282 | | 6270 |
| | Summa | 451 . . 5905 | |
| Irreg. 9 | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centas 91. | | | 9051. |
| G. I . . . (6) . . (386) | | | 9063 |
| 27 | 9067 | 17 | 9002. |
| 35 | 9007 | | 9057. |
| 45 | 9043 | | 9070 |
| 63 | 9091 | 18 | 9012. |
| 99 | 9011 | | 9015. |
| 117 | 9059 | | 9069 (*). |
| G. II . . (26) . (1960) | | | 9075 (*3*) |
| 15 | 9013 | 19 | 9053. |
| 18 | 9003 (*3*). | | 9095 |
| | 9055 | 20 | 9039. |
| 19 | 9034 | | 9054. |
| 21 | 9004. | | 9062. |
| | 9046 | | 9081 |
| 26 | 9079 | 21 | 9036 |
| 27 | 9031. | 22 | 9084 |
| | 9094 | 27 | 9008. |
| 29 | 9098 | | 9050. |
| 30 | 9001. | | 9074 |
| | 9076 | 28 | 9089 |
| 33 | 9068 | 30 | 9005. |
| 36 | 9049. | | 9035. |
| | 9083 | | 9056. |
| 40 | 9023 | | 9077 |
| 42 | 9041 | G. VIII (23) . (1640) | |
| 44 | 9047 | 5 | 9010 |
| 45 | 9019 (*3*) | 6 | 9040. |
| 46 | 9038 | | 9042. |
| 48 | 9092 | | 9045. |
| 54 | 9099 (*3*) | | 9072. |
| 57 | 9029 | | 9085. |
| 69 | 9014. | | 9100 |
| | 9071 | 7 | 9078. |
| 80 | 9026 | | 9080. |
| G. IV . (42) . (2928) | | | 9090. |
| 8 | 9087. | | 9093 |
| | 9088 | 8 | 9016 (*2*). |
| 9 | 9022. | | 9024. |
| | 9037. | | 9060 |
| | 9073. | 9 | 9061. |
| | 9097 | | 9064 |
| 10 | 9025. | 10 | 9020 |
| | 9058 | 11 | 9006 |
| 11 | 9052 | 12 | 9021. |
| 12 | 9018. | | 9065 |
| | 9027. | 14 | 9096 |
| | 9028 | 17 | 9086 |
| 13 | 9082 | 18 | 9044 |
| 14 | 9017. | G. XVI (3) . . (176) | |
| | 9032. | 3 | 9030. |
| | 9066 | | 9048 |
| 15 | 9033. | 5 | 9009 |
| | Summa | 458 . . 7090 | |
| Irreg. 6 | | Impr. | 1122 |

DETERMINANTES NEGATIVI.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centas 92. | | | 9136. |
| G. I...(5)..(295) | | | 9195. |
| 51 | 9199 | | 9196 |
| 57 | 9103. | 17 | 9158 |
| | 9127 | 18 | 9154 |
| 63 | 9187 | 19 | 9146 |
| 67 | 9151 | 20 | 9169 |
| G. II..(30).(2208) | | 21 | 9126. |
| 13 | 9157 | | 9197 |
| 14 | 9172 | 22 | 9138. |
| 19 | 9133 | | 9189 |
| 20 | 9124. | 24 | 9113. |
| | 9183 | | 9159 |
| 21 | 9113 | 25 | 9101. |
| 23 | 9181 | | 9125 |
| 27 | 9109. | 27 | 9164 |
| | 9123. | 28 | 9116 |
| | 9167. | 30 | 9140 |
| | 9175 | 31 | 9191 |
| 28 | 9137 | 32 | 9104(*2*) |
| 29 | 9148 | 33 | 9149 |
| 30 | 9147 | 34 | 9110 |
| 32 | 9111 | G. VIII (26).(1752) | |
| 34 | 9122. | 4 | 9108 |
| | 9166 | 3 | 9102. |
| 36 | 9143 | | 9160 |
| 39 | 9107. | 6 | 9112. |
| | 9171 | | 9130. |
| 40 | 9188 | | 9145. |
| 47 | 9173 | | 9150 |
| 54 | 9134. | 7 | 9174 |
| | 9155 | 8 | 9135. |
| 56 | 9182 | | 9144. |
| 57 | 9179 | | 9156. |
| 60 | 9131 | | 9168. |
| 62 | 9119 | | 9184. |
| 63 | 9194 | | 9192. |
| 72 | 9161 | | 9198 |
| G. IV.(36).(2652) | | 9 | 9105. |
| 7 | 9178 | | 9114. |
| 8 | 9118(*2*). | | 9180. |
| | 9193 | | 9185. |
| 9 | 9132. | | 9200 |
| | 9139. | 10 | 9128. |
| | 9162. | | 9152 |
| | 9163(*3*) | 11 | 9129. |
| 10 | 9190 | | 9170 |
| 12 | 9121. | 12 | 9141 |
| | 9142. | 19 | 9176 |
| | 9153. | G. XVI (3)..(176) | |
| | 9186 | 3 | 9177 |
| 13 | 9117 | 4 | 9120. |
| 15 | 9106. | | 9165 |
| | | Summa | 465..7083 |
| Irreg. 3 | | Impr. | 1207 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centas 93. | | 14 | 9217. |
| G. I...(4)..(340) | | | 9226. |
| 33 | 9283 | | 9253 |
| 75 | 9227 | 15 | 9212. |
| 93 | 9203 | | 9230. |
| 139 | 9239 | | 9276 |
| G. II..(27).(2092) | | 16 | 9214(*2*). |
| 13 | 9277 | | 9216. |
| 17 | 9223 | | 9248(*2*). |
| 18 | 9241. | | 9252 |
| | 9298 | 17 | 9254 |
| 21 | 9235 | 18 | 9234 |
| 25 | 9293 | 21 | 9201. |
| 27 | 9211. | | 9229. |
| | 9247 | | 9261 |
| 29 | 9244 | 22 | 9233. |
| 30 | 9271 | | 9245 |
| 31 | 9263 | 24 | 9275. |
| 33 | 9267 | | 9291 |
| 33 | 9279 | 25 | 9231. |
| 36 | 9259 | | 9294 |
| 37 | 9274 | 26 | 9218. |
| 39 | 9242. | | 9290 |
| | 9286. | 27 | 9260(*3*) |
| | 9287 | 29 | 9215 |
| 40 | 9278 | 30 | 9284 |
| 45 | 9251(*3*) | 32 | 9224 |
| 49 | 9221 | 36 | 9266(*2*) |
| 54 | 9209 | G. VIII (20).(1440) | |
| 60 | 9257 | 6 | 9205. |
| 63 | 9206 | | 9213. |
| 66 | 9236 | | 9265. |
| 75 | 9299 | | 9270. |
| 80 | 9281 | | 9288. |
| G. IV.(47).(3216) | | | 9300 |
| 7 | 9262 | 7 | 9256 |
| 8 | 9202. | 8 | 9222. |
| | 9208. | | 9225. |
| | 9232 | | 9273. |
| 10 | 9238. | | 9280(*2*). |
| | 9289 | | 9285 |
| 11 | 9237. | 9 | 9272 |
| | 9258 | 10 | 9210 |
| 12 | 9207. | 11 | 9250 |
| | 9219. | 12 | 9204. |
| | 9220(*2*). | | 9264 |
| | 9228. | 14 | 9269. |
| | 9243(*2*). | | 9296 |
| | 9268. | 15 | 9246 |
| | 9292. | G. XVI.(1)..(48) | |
| | 9295. 9297 | 3 | 9282 |
| 13 | 9249. | G. XXXII (1).(64) | |
| | 9255 | 2 | 9240 |
| | | Summa | 454..7200 |
| Irreg. 9 | | Impr. | 1145 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centas 94 | | | 9316(*2*) |
| G. I...(6)...(478) | | 17 | 9303 |
| 41 | 9319 | 18 | 9315(*3*). |
| 51 | 9343 | | 9357. |
| 55 | 9391 | | 9362. |
| 87 | 9323 | | 9376. |
| 97 | 9311 | | 9383(*3*). |
| 147 | 9371 | | 9396. |
| G. II..(27).(1894) | | | 9398 |
| 15 | 9307. | 21 | 9334. |
| | 9388 | | 9368. |
| 18 | 9355 | | 9392 |
| 21 | 9397 | 22 | 9305. |
| 23 | 9382 | | 9317. |
| 25 | 9375 | 23 | 9365 |
| 26 | 9337 | 24 | 9308. |
| 27 | 9349 | | 9399 |
| 28 | 9327 | 27 | 9369. |
| 30 | 9346. | | 9374 |
| | 9358. | 30 | 9386 |
| | 9363. | 32 | 9344(*2*) |
| | 9364 | 33 | 9329. |
| 32 | 9377 | | 9389 |
| 34 | 9326. | G. VIII (23).(1752) | |
| | 9332 | 4 | 9310. |
| 36 | 9347. | | 9328. |
| | 9379. | | 9373 |
| | 9395 | 5 | 9333 |
| 41 | 9302 | 6 | 9352 |
| 46 | 9351 | 7 | 9321. |
| 49 | 9335 | | 9361. |
| 51 | 9383 | | 9381 |
| 52 | 9359 | 8 | 93[illegible](*2*). |
| 56 | 9314 | | 9348. |
| 57 | 9356 | | 9372. |
| 69 | 9341 | | 9393. |
| G. IV.(39).(2848) | | | 9394. |
| 7 | 9340. | | 9400 |
| | 9367 | 9 | 9390 |
| 9 | 9342(*3*). | 10 | 9330. |
| | 9370 | | 9338. |
| 11 | 9304. | | 9366 |
| | 9322 | 11 | 9306. |
| 12 | 9378. | | 9309. |
| | 9387 | | 9336 |
| 13 | 9313. | 12 | 9324 |
| | 9318 | 14 | 9350. |
| 14 | 9353. | | 9380 |
| | 9334 | 15 | 9320 |
| 15 | 9325. | G. XVI.(3)..(176) | |
| | 9331. | 3 | 9384 |
| | 9339 | 4 | 9345. |
| 16 | 9301. | | 9360 |
| | | Summa | 464..7148 |
| Irreg. 6 | | Impr. | 1210 |

## NACHLASS.

| Centas 95. | |
|---|---|
| G. I….(8)..(708) | |
| 33 | 9403 |
| 45 | 9463 |
| 75 | 9439 |
| 91 | 9431 |
| 101 | 9479 |
| 105 | 9419 |
| 123 | 9467 |
| 135 | 9491 |
| G. II..(24).(1706) | |
| 16 | 9433 |
| 18 | 9475 |
| 19 | 9466. |
| | 9487 |
| 20 | 9442 |
| 21 | 9427 |
| 24 | 9406. |
| | 9409 |
| | 9423 |
| 30 | 9459 |
| 33 | 9421 |
| 34 | 9458 |
| 36 | 9451. |
| | 9497(*3*) |
| 39 | 9484 |
| 40 | 9473 |
| 42 | 9428 |
| 45 | 9411. |
| | 9437 |
| 46 | 9407 |
| 51 | 9413 |
| 57 | 9461 |
| 63 | 9404 |
| 71 | 9446 |
| G. IV.(41).(2988) | |
| 8 | 9412(*2*). |
| | 9457(*2*) |
| | 9472 |
| 9 | 9493 |
| 11 | 9402. |
| | 9447. |
| | 9496 |
| 12 | 9445. |
| | 9469 |
| | 9483. |
| | 9498 |
| 13 | 9415. |
| | 9418 |
| | 9448. |
| | 9454. |
| | 9468. |
| | 9478 |
| 14 | 9436 |
| 15 | 9443. |
| | 9452 |
| 17 | 9410 |
| 18 | 9444. |
| | 9477. |
| | 9482. |
| | 9495 |
| 20 | 9500 |
| 21 | 9414. |
| | 9481. |
| | 9489. |
| | 9499 |
| 22 | 9441 |
| 24 | 9422(*2*). |
| | 9426 |
| | 9474. |
| | 9488 |
| 28 | 9494 |
| 29 | 9449 |
| 30 | 9455 |
| 35 | 9470 |
| 36 | 9476 |
| 42 | 9434 |
| G VIII(25).(1744) | |
| 4 | 9430 |
| 5 | 9417 |
| 6 | 9408. |
| | 9432. |
| | 9438 |
| | 9465. |
| | 9492 |
| 7 | 9453. |
| | 9462 |
| 8 | 9424. |
| | 9460. |
| | 9485. |
| | 9486. |
| | 9490 |
| 9 | 9420. |
| | 9450(*3*). |
| | 9471 |
| 10 | 9440 |
| 11 | 9429. |
| | 9456 |
| 12 | 9425 |
| | 9435. |
| | 9464 |
| 14 | 9416 |
| 16 | 9401 |
| G. XVI.(2)..(112) | |
| 3 | 9480 |
| 4 | 9405 |
| Summa | 452..7258 |

Irreg. 5

| Centas 96. | |
|---|---|
| G. I….(5)..(471) | |
| 39 | 9547 |
| 69 | 9511. |
| | 9587 |
| 129 | 9551 |
| 165 | 9539 |
| G. II..(28).(1964) | |
| 16 | 9508 |
| 17 | 9535 |
| 18 | 9523. |
| | 9583 |
| 20 | 9598 |
| 24 | 9502. |
| | 9507 |
| 25 | 9559 |
| 26 | 9543 |
| 27 | 9531(*3*). |
| | 9563. |
| | 9574(*3*) |
| 29 | 9532 |
| 30 | 9571 |
| 33 | 9527 |
| 34 | 9556. |
| | 9586 |
| 38 | 9524. |
| | 9567 |
| 42 | 9518 |
| 43 | 9578 |
| 48 | 9566 |
| 49 | 9599 |
| 51 | 9575 |
| 59 | 9596 |
| 60 | 9572 |
| 61 | 9533 |
| 64 | 9521 |
| G. IV.(38).(2700) | |
| 8 | 9538. |
| | 9562. |
| | 9577 |
| 10 | 9517. |
| | 9553. |
| | 9573 |
| 12 | 9505. |
| | 9522. |
| | 9526. |
| | 9550. |
| | 9580. |
| | 9595(*2*) |
| 13 | 9514. |
| | 9549. |
| | 9557 |
| 14 | 9501. |
| | 9529. |
| | 9542 |
| 15 | 9582 |
| 16 | 9544 |
| 17 | 9564 |
| 18 | 9558 |
| 19 | 9565 |
| 20 | 9503(*2*). |
| | 9589. |
| | 9591. |
| | 9593 |
| 21 | 9515. |
| | 9561 |
| 24 | 9519. |
| | 9579 |
| 25 | 9530. |
| | 9584 |
| 27 | 9509 |
| 28 | 9536 |
| 30 | 9506 |
| 38 | 9569 |
| 40 | 9554 |
| G. VIII(26).(1960) | |
| 4 | 9568 |
| 5 | 9592 |
| 6 | 9552. |
| | 9585. |
| | 9597 |
| 7 | 9528 |
| 8 | 9510(*2*). |
| | 9513(*2*). |
| | 9537. |
| | 9540(*2*). |
| | 9588. |
| | 9600(*2*). |
| 9 | 9541. |
| | 9548. |
| | 9555(*3*) |
| 10 | 9525. |
| | 9534. |
| | 9594 |
| 12 | 9504. |
| | 9516(*2*). |
| | 9560 |
| 13 | 9545. |
| | 9594 |
| 14 | 9581 |
| 15 | 9512 |
| | 9590 |
| G. XVI.(3).(176) | |
| 3 | 9520. |
| | 9570 |
| 5 | 9576 |
| Summa | 469..7271 |

Irreg. 10

| Centas 97. | |
|---|---|
| G. I….(5)..(333) | |
| 33 | 9643 |
| 57 | 9619 |
| 71 | 9679 |
| 77 | 9631 |
| 95 | 9623 |
| G. II..(29).(2108) | |
| 12 | 9667 |
| 19 | 9661 |
| 20 | 9697 |
| 21 | 9607. |
| | 9613 |
| 24 | 9601 |
| 26 | 9655 |
| 27 | 9627(*3*). |
| | 9663. |
| | 9683(*3*) |
| 28 | 9604. |
| | 9634. |
| | 9649 |
| 30 | 9687. |
| | 9691 |
| 32 | 9662 |
| 33 | 9692 |
| 36 | 9668 |
| 42 | 9651 |
| 43 | 9647 |
| 44 | 9602 |
| 45 | 9626 |
| 49 | 9677 |
| 52 | 9689 |
| 55 | 9629 |
| 57 | 9659 |
| 63 | 9671 |
| 66 | 9611 |
| 69 | 9644 |
| G. IV..(41).(3108) | |
| 9 | 9612(*3*). |
| | 9615. |
| | 9622. |
| | 9678 |
| 10 | 9628 |
| 11 | 9670 |
| 12 | 9652. |
| | 9673(*2*). |
| | 9676. |
| | 9682. |
| | 9700 |
| 13 | 9637 |
| 14 | 9642. |
| | 9658. |
| | 9664 |
| 15 | 9639 |
| 16 | 9610 |
| 17 | 9606 |
| 18 | 9603. |
| | 9675(*3*). |
| | 9693(*3*) |
| 19 | 9638. |
| | 9694 |
| 20 | 9608. |
| | 9616. |
| | 9650. |
| | 9653 |
| 21 | 9699 |
| 22 | 9654. |
| | 9684 |
| 23 | 9695 |
| 24 | 9641. |
| | 9666 |
| 25 | 9609 |
| 29 | 9617. |
| | 9674. |
| | 9698 |
| 30 | 9621 |
| 32 | 9665 |
| 33 | 9635 |
| 42 | 9686 |
| G. VIII(22).(1600) | |
| 4 | 9640 |
| 5 | 9618. |
| | 9625. |
| | 9685. |
| | 9688 |
| 6 | 9648. |
| | 9696 |
| 7 | 9633. |
| | 9646 |
| 8 | 9645. |
| | 9669 |
| 9 | 9630. |
| | 9657 |
| 10 | 9620. |
| | 9636 |
| 11 | 9681 |
| 12 | 9605. |
| | 9632. |
| | 9680(*2*) |
| 15 | 9624 |
| 16 | 9614 |
| 18 | 9656 |
| G. XVI.(3)..(192) | |
| 3 | 9672 |
| 4 | 9690 |
| 5 | 9660 |
| Summa | 451..7341 |

Irreg. 7

## DETERMINANTES NEGATIVI.

| | |
|---|---|
| **Centas 98.** | |
| **G. I. . . (6). . (524)** | |
| 39 | 9739. |
| | 9787 |
| 89 | 9767 |
| 105 | 9743 |
| 119 | 9791 |
| 133 | 9719 |
| **G. II . (24). (1646)** | |
| 17 | 9703 |
| 18 | 9748 (*3*). |
| | 9783 |
| 19 | 9727 |
| 21 | 9733 |
| 22 | 9742 |
| 24 | 9763 |
| 25 | 9781 |
| 26 | 9769. |
| | 9778 |
| 27 | 9747 (*3*). |
| | 9751 |
| 30 | 9755 |
| 33 | 9799 |
| 35 | 9754 |
| 37 | 9788 |
| 39 | 9707. |
| | 9771 |
| 43 | 9722 |
| 46 | 9721. |
| | 9759 |
| 48 | 9731 |
| 76 | 9764 |
| 81 | 9749 |
| **G. IV . (43). (3292)** | |
| 7 | 9718 |
| 9 | 9772 |
| 10 | 9732. |
| | 9793 |
| 11 | 9738. |
| | 9753 |
| 12 | 9706. |
| | 9745. |
| | 9762 |
| 13 | 9712. |
| | 9713 |
| 14 | 9757. |
| | 9775. |
| | 9784 |
| 15 | 9766. |
| | 9777. |
| | 9795 |
| 16 | 9736. |
| | 9797 |
| 17 | 9711 |
| 18 | 9715. |
| | 9723. |
| | 9782 |
| 19 | 9773 |
| 20 | 9714. |
| | 9796 |
| 21 | 9708. |
| | 9710. |
| | 9770. |
| | 9774 |
| 22 | 9725. |
| | 9756 |
| 24 | 9728 |
| 26 | 9794 |
| 27 | 9704. |
| | 9726 |
| 28 | 9716. |
| | 9734 |
| 29 | 9761 |
| 30 | 9746 |
| 33 | 9740 |
| 36 | 9779 |
| 38 | 9701 |
| **G. VIII (24). (1752)** | |
| 5 | 9717. |
| | 9730 |
| 6 | 9760. |
| | 9790 |
| 7 | 9724. |
| | 9752 |
| 8 | 9702 (*2*). |
| | 9729. |
| | 9735. |
| | 9758. |
| | 9780. |
| | 9792 (*2*) |
| 9 | 9705. |
| | 9709. |
| | 9720 (*3*) |
| 10 | 9741. |
| | 9750. |
| | 9798 |
| 11 | 9737. |
| | 9786 |
| 12 | 9800 |
| 14 | 9789 |
| 15 | 9776. |
| | 9785 |
| **G. XVI (3). . (192)** | |
| 4 | 9744. |
| | 9765. |
| | 9768 |
| Summa | 466. . 7406 |
| Irreg. 5 | |

| | |
|---|---|
| **Centas 99.** | |
| **G. I. . . (8). (638)** | |
| 49 | 9871 |
| 51 | 9883 |
| 63 | 9811 (*3*). |
| | 9859 |
| 75 | 9887 |
| 91 | 9839 |
| 111 | 9803 |
| 135 | 9851 |
| **G. II. . (22). (1700)** | |
| 20 | 9892 |
| 21 | 9829. |
| | 9862. |
| | 9868 |
| 22 | 9847 |
| 24 | 9817. |
| | 9874 |
| 26 | 9838 |
| 28 | 9886. |
| | 9895 |
| 30 | 9857 |
| 34 | 9826 |
| 42 | 9827 |
| 45 | 9899 (*3*) |
| 48 | 9863 |
| 49 | 9818 |
| 51 | 9819 |
| 52 | 9833 |
| 57 | 9836 |
| 60 | 9875 |
| 70 | 9806 |
| 77 | 9866 |
| **G. IV . (43). (3164)** | |
| 6 | 9823 |
| 7 | 9802 |
| 8 | 9865 |
| 9 | 9832. |
| | 9843. |
| | 9853. |
| | 9898 |
| 10 | 9808. |
| | 9837. |
| | 9850 |
| 11 | 9813 |
| 12 | 9872. |
| | 9835 |
| 13 | 9846 |
| 14 | 9820. |
| | 9878 |
| 15 | 9822. |
| | 9882 |
| 16 | 9807. |
| | 9814. |
| | 9848 |
| 17 | 9852. |
| | 9893. |
| | 9897 |
| 18 | 9801 (*3*). |
| | 9844. |
| | 9873. |
| | 9891 |
| 19 | 9815. |
| | 9879 |
| 21 | 9855 |
| 22 | 9841 |
| 25 | 9830 |
| 26 | 9812. |
| | 9876 |
| 27 | 9831 |
| 28 | 9881 (*2*) |
| 31 | 9884 |
| 32 | 9809 (*2*) |
| 34 | 9824 |
| 37 | 9854 |
| 39 | 9896 |
| 41 | 9869 |
| **G. VIII (24). (1712)** | |
| 5 | 9877 |
| 6 | 9804. |
| | 9810. |
| | 9828. |
| | 9867. |
| | 9888. |
| | 9900 |
| 7 | 9805. |
| | 9858. |
| | 9885 |
| 8 | 9816. |
| | 9856. |
| | 9860 |
| 9 | 9825 (*3*). |
| | 9849 (*3*). |
| | 9889 |
| 10 | 9821. |
| | 9834 |
| 11 | 9894 |
| 12 | 9861. |
| | 9864 |
| 13 | 9842 |
| 16 | 9845 |
| 17 | 9890 |
| **G. XVI (3). . (192)** | |
| 3 | 9870 |
| 4 | 9880 |
| 5 | 9840 |
| Summa | 464. . 7406 |
| Irreg. 7 | |

| | |
|---|---|
| **Centas 100.** | |
| **G. I. . . (4). . (228)** | |
| 39 | 9967 |
| 45 | 9907 (*3*) |
| 69 | 9931 |
| 75 | 9923 |
| **G. II . (28). (2302)** | |
| 16 | 9991 |
| 18 | 9934 (*3*) |
| 23 | 9927. |
| | 9973 |
| 25 | 9949 |
| 27 | 9963 (*3*) |
| 28 | 9903. |
| | 9943 |
| 30 | 9938. |
| | 9979 |
| 31 | 9901 |
| 32 | 9986 |
| 34 | 9998 |
| 38 | 9908 |
| 39 | 9914. |
| | 9987 |
| 42 | 9939. |
| | 9947 |
| 46 | 9983 |
| 47 | 9935. |
| | 9946 |
| 50 | 9902 |
| 60 | 9995 |
| 63 | 9971 |
| 65 | 9959 |
| 67 | 9941 |
| 76 | 9929 |
| 85 | 9974 |
| **G. IV . (46). (3248)** | |
| 7 | 9937 |
| 9 | 9925. |
| | 9958. |
| | 9997 |
| 10 | 9913. |
| | 9942. |
| | 9948. |
| | 10000 |
| 11 | 9970 |
| 12 | 9916. |
| | 9922. |
| | 9952. |
| | 9955 (*2*). |
| | 9972 (*2*) |
| 13 | 9993 |
| 14 | 9988 |
| 15 | 9904. |
| | 9921. |
| | 9969. |
| | 9978 |
| 16 | 9961. |
| | 9985 |
| 17 | 9919. |
| | 9965 |
| 18 | 9910. |
| | 9915. |
| | 9964 |
| 19 | 9951. |
| | 9957. |
| | 9977 |
| 20 | 9992 |
| 21 | 9909 |
| 22 | 9953. |
| | 9956. |
| | 9962. |
| | 9999 |
| 23 | 9917. |
| | 9994 |
| 25 | 9981 |
| 26 | 9924 |
| 27 | 9989 |
| 28 | 9926. |
| | 9980 |
| 30 | 9932. |
| | 9950 |
| 34 | 9911 |
| **G. VIII (18). (1328)** | |
| 4 | 9982 |
| 5 | 9976 |
| 6 | 9928. |
| | 9940. |
| | 9990 |
| 7 | 9906 |
| 8 | 9930. |
| | 9975. |
| | 9984 |
| 10 | 9918 |
| 11 | 9968 |
| 12 | 9905. |
| | 9920. |
| | 9936. |
| | 9954. |
| | 9996 |
| 13 | 9966 |
| 14 | 9944 |
| **G. XVI (4). . (240)** | |
| 3 | 9933 |
| 4 | 9912. |
| | 9945. |
| | 9960 |
| Summa | 452. . 7346 |
| Irreg. 5 | |

## NACHLASS.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centas 117. | | | 11694 |
| G. I....(1)..(147) | | 16 | 11629. |
| 147 | 11699 | | 11665 |
| G. II..(35).(2896) | | 17 | 11672 |
| 16 | 11617 | 18 | 11601. |
| 18 | 11698 | | 11627. |
| 19 | 11677 | | 11637. |
| 20 | 11614 | | 11664 |
| 22 | 11668 | 19 | 11687 |
| 26 | 11647 | 21 | 11644 |
| 27 | 11643. | 23 | 11618 |
| | 11683 (*3*) | 24 | 11615 |
| 29 | 11663 | 25 | 11693 |
| 30 | 11602. | 26 | 11604. |
| | 11623. | | 11669. |
| | 11659 | | 11679 |
| 35 | 11686 | 28 | 11646 |
| 36 | 11603. | 29 | 11630 |
| | 11631. | 32 | 11666. |
| | 11633. | | 11684 |
| | 11667. | 33 | 11624 |
| | 11671. | 35 | 11606 |
| | 11689. | G. VIII (27).(2248) | |
| | 11691. | 6 | 11610. |
| | 11695 | | 11620. |
| 37 | 11642 | | 11628. |
| 42 | 11657 | | 11656. |
| 43 | 11626 | | 11680. |
| 45 | 11611 | | 11697 |
| 51 | 11621 | 8 | 11605. |
| 54 | 11619 | | 11622. |
| 56 | 11678 | | 11658. |
| 59 | 11612 | | 11670. |
| 63 | 11675 | | 11682 |
| 67 | 11639 | 9 | 11613. |
| 70 | 11636 | | 11655 |
| 73 | 11654 | 10 | 11616. |
| 81 | 11651 (*3*) | | 11625. |
| 90 | 11681 | | 11676 |
| G. IV..(35).(2672) | | 11 | 11688 |
| 8 | 11650 | 12 | 11648. |
| 9 | 11608. | | 11661. |
| | 11692 | | 11700 (*2*) |
| 11 | 11638. | 13 | 11634. |
| | 11653 | | 11645. |
| 12 | 11635. | | 11649 |
| | 11641. | 14 | 11690 |
| | 11673 | 18 | 11660. |
| 13 | 11632. | | 11696 |
| | 11674 | 21 | 11609 |
| 14 | 11652. | G. XVI.(2).(128) | |
| | 11662 | 3 | 11685 |
| 15 | 11607. | 5 | 11640 |
| | | Summa | 459... 8091 |
| Irreg. 3 | | Impr. prim. | 1339 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centas 118. | | | 11776. |
| G. I.....(5)..(319) | | | 11796 |
| 39 | 11743 | 17 | 11761 |
| 41 | 11719 | 18 | 11754. |
| 63 | 11731 | | 11772 |
| 81 | 11779 (*3*) | 19 | 11706 |
| 95 | 11783 | 20 | 11716. |
| G. II..(28).(2560) | | | 11768 |
| 18 | 11707 | 21 | 11724. |
| 21 | 11767 | | 11799 |
| 22 | 11727. | 22 | 11703. |
| | 11758 | | 11732. |
| 25 | 11734 | | 11749 |
| 29 | 11722 | 25 | 11709. |
| 30 | 11755 | | 11769. |
| 31 | 11701. | | 11780 |
| | 11708 | 27 | 11795 (*3*) |
| 33 | 11702. | | 11798. |
| | 11763 | 28 | 11786 |
| 36 | 11762 | 29 | 11721. |
| 39 | 11747. | | 11741. |
| | 11787 | 30 | 11774 |
| 40 | 11791 | 34 | 11729 |
| 49 | 11789 | 40 | 11744 |
| 50 | 11794 | G. VIII (23).(1744) | |
| 53 | 11751 | 4 | 11713 (*3*) |
| 54 | 11723 | 6 | 11715. |
| 60 | 11711. | | 11718. |
| | 11771. | | 11748. |
| | 11777 | | 11752 |
| 61 | 11735. | 7 | 11720. |
| | 11738 | | 11742. |
| 65 | 11759 | | 11778 |
| 73 | 11717 | 8 | 11712. |
| 87 | 11756 | | 11725 (*2*). |
| 98 | 11714 | | 11753. |
| G. IV.(40).(3100) | | | 11770. |
| 8 | 11797 | | 11784. |
| 9 | 11782 | | 11790 |
| 10 | 11785 | 9 | 11800 |
| 11 | 11740. | 10 | 11792 |
| | 11757 | 11 | 11736 |
| 12 | 11733. | 12 | 11739. |
| | 11737. | | 11745 |
| | 11788 | 15 | 11766 |
| 14 | 11728. | 16 | 11780 |
| | 11746. | 18 | 11726. |
| | 11764 | | 11765 |
| 15 | 11710. | G. XVI.(4)..(320) | |
| | 11773. | 4 | 11760 |
| | 11793 | 5 | 11704. |
| 16 | 11705. | | 11730 |
| | 11775. | 6 | 11781 |
| | | Summa | 469... 8043 |
| Irreg. 4 | | Impr. prim. | 1369 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Centas 119. | | | 11874 |
| G. I.....(7)..(505) | | 19 | 11841 |
| 31 | 11863 | 20 | 11822 (*2*). |
| 39 | 11827 | | 11836. |
| 47 | 11887 | | 11847. |
| 61 | 11839 | | 11858. |
| 75 | 11867 | | 11866 |
| 113 | 11807 | 21 | 11859. |
| 139 | 11831 | | 11888 |
| G. II...(23).(1990) | | | 11898 |
| 21 | 11878 | 23 | 11829 |
| 24 | 11806. | 24 | 11826. |
| | 11812. | | 11889. |
| | 11854 | | 11896 |
| 27 | 11851 (*3*). | 26 | 11834. |
| | 11881 | | 11894 |
| 30 | 11875 | 27 | 11804. |
| 33 | 11884 | | 11810. |
| 39 | 11852 | | 11861 |
| 40 | 11833. | 29 | 11882 |
| | 11897 | 35 | 11870 |
| 43 | 11821 | 36 | 11849 |
| 45 | 11871. | 37 | 11885 |
| | 11899 (*3*) | 42 | 11891 |
| 49 | 11813. | 43 | 11864 |
| | 11846 | G. VIII (22).(1688) | |
| 52 | 11876 | 4 | 11872 |
| 54 | 11828. | 6 | 11817. |
| | 11843 (*3*) | | 11845. |
| 58 | 11855 | | 11869. |
| 70 | 11801 | | 11895 |
| 72 | 11819 | 7 | 11830. |
| 75 | 11879 | | 11890 |
| G. IV.(44).(3608) | | 8 | 11805. |
| 8 | 11848 | | 11808 (*2*). |
| 9 | 11803. | | 11877 |
| | 11818. | 9 | 11802. |
| | 11893 | | 11820. |
| 10 | 11860. | | 11825 |
| | 11862 | 10 | 11850. |
| 11 | 11815 | | 11900 |
| 12 | 11823 | 11 | 11837. |
| 13 | 11838 | | 11868 |
| 14 | 11842. | 12 | 11844. |
| | 11892 | | 11886 |
| 15 | 11824. | 16 | 11814. |
| | 11853. | | 11840 |
| | 11883 | 20 | 11816 |
| 16 | 11857 | G. XVI.(4)..(304) | |
| 18 | 11809. | 3 | 11880 |
| | 11811. | 4 | 11832 |
| | 11835 (*3*). | 6 | 11856. |
| | 11873. | | 11865 |
| | | Summa | 469... 8095 |
| Irreg. 6 | | Impr. | 1337 |

DETERMINANTES NEGATIVI.

Centas 120.

| | |
|---|---|
| G. I...(7)..(547) | |
| 39 | 11923 |
| 45 | 11971 (*3*) |
| 81 | 21903. |
| | 11959 (*3*) |
| 83 | 11927 |
| 95 | 11959 |
| 123 | 11987 |
| G II..(22).(1912) | |
| 20 | 11953 |
| 21 | 11962 |
| 24 | 11995 |
| 27 | 11907 (*9*). |
| | 11911. |
| | 11967 |
| 30 | 11943. |
| | 21947 |
| 31 | 11983 |
| 33 | 11974. |
| | 11979 |
| 41 | 11941 |
| 48 | 11963 |
| 49 | 11933. |
| | 11999. |
| 50 | 11975 |
| 57 | 11915 |
| 66 | 11906 |
| 69 | 11909 |
| 71 | .11981 |
| 73 | 11996 |
| 80 | 11969 |
| G. IV.(45).(3564) | |
| 9 | 11992 |
| 10 | 11922. |
| | 21932. |
| | 11938. |
| | 11958 |
| 11 | 11902. |
| | 11965 |
| 12 | 11905. |
| | 11908. |
| | 11917. |
| | 11929. |
| | 11950. |
| | 11980. |
| | 11988 (*2*). |
| | 11998 |
| 13 | 11986 |
| 15 | 11944. |
| | 11955 |
| 17 | 11982 |
| 18 | 11916. |

Irreg 8

| | |
|---|---|
| | 11956. |
| | 11991 |
| 19 | 11918. |
| | 11993. |
| | 11994 |
| 20 | 11978 |
| 21 | 11901. |
| | 11957 |
| 23 | 11989 |
| 24 | 11926. |
| | 11964. |
| | 11972 (*2*) |
| 26 | 11936. |
| | 11945 |
| 27 | 11919. |
| | 11930. |
| | 11942. |
| | 11961 (*3*) |
| 29 | 11951 |
| 30 | 11912. |
| | 11948 |
| 32 | 11966 (*2*) |
| 33 | 11931 |
| 40 | 11924 |
| 42 | 11954 |
| G. VIII (22).(1832) | |
| 6 | 11914. |
| | 11937. |
| | 11968. |
| | 11977 |
| 7 | 21973 |
| 8 | 11920 (*2*). |
| | 11940. |
| | 11946 |
| 9 | 11913. |
| | 11925. |
| | 11935. |
| | 11949. |
| | 11952 |
| 10 | 11997. |
| | 12000 |
| 12 | 11904. |
| | 11910 |
| 15 | 11934 |
| 16 | 11976. |
| | 11984 |
| 17 | 11990 |
| 21 | 11921 |
| G. XVI.(4)..(288) | |
| 3 | 11928 |
| 4 | 11985 |
| 5 | 11960 |
| 6 | 11970 |

Summa 471 .. 8143
Impr. prim. 1361

## Millias I.

| | |
|---|---|
| G. I...(93)..(1277) | |
| 1 | 1. 2. 3. |
| | 4. 7 . . 5 |
| 3 | 11. 19. |
| | 23. 27. |
| | 31. 43. |
| | 67. 163 . . 8 |
| 5 | 47. 79. |
| | 103. 127 . . 4 |
| 7 | 71. 151. |
| | 223. 343. |
| | 463. 487 . . 6 |
| 9 | 59. 83. |
| | 107. 139. |
| | 199. 211. |
| | 243 (*3*). |
| | 283. |
| | 307 (*3*). |
| | 331. 367. |
| | 379. 499. |
| | 547. 643. |
| | 823. 883. |
| | 907 . . . . 18 |
| 11 | 167. 271. |
| | 967 . . . . . 3 |
| 13 | 191. 263. |
| | 607. 631. |
| | 727 . . . . . 5 |
| 15 | 131. 179. |
| | 227. 239. |
| | 347. 439. |
| | 443. 523. |
| | 571. 619. |
| | 683. 691. |
| | 739. 751. |
| | 787. 947 . . 16 |
| 17 | 383. 991 . . 2 |
| 19 | 311. 359. |
| | 919 . . . . 3 |
| 21 | 251. 431. |
| | 467. 503. |
| | 587. 743. |
| | 811. 827. |
| | 859. 863 . . 10 |
| 25 | 479. 599. |
| | 647 . . . . . 3 |
| 27 | 419. 491. |
| | 563. 983 . . 4 |
| 29 | 887 . . . . . 1 |
| 31 | 719. 911 . . 2 |
| 33 | 659. 839 . . 2 |
| 45 | 971 . . . . . 1 |

Irreg. 2 pr. 2130

| | |
|---|---|
| G. II . . . . . . (402) . . . . . . . (6068) | |
| 1 | 5. 6. 8. 9. 10. |
| | 12. 13. 15. 16. 18. |
| | 22. 25. 28. 37. 58 . . . . 15 |
| 2 | 14. 17. 20. 32. 34. |
| | 36. 39. 46. 49. 52. |
| | 55. 63. 64. 73. 82. |
| | 97. 100. 142. 148. 193 . . 20 |
| 3 | 26. 29. 35. 38. 44. |
| | 50. 51. 53. 54. 61. |
| | 75. 76. 81. 87. 91. |
| | 92. 99. 106. 108. 109. |
| | 115. 118. 121. 123. 124. |
| | 135. 147. 157. 162. 169. |
| | 172. 175. 187. 202. 207. |
| | 214. 235. 247. 262. 267. |
| | 268. 277. 298. 358. 397. |
| | 403. 427. 541. 652 . . . . . . 49 |
| 4 | 41. 62. 68. 94. 95. |
| | 98. 111. 113. 128. 137. |
| | 158. 178. 183. 196. 226. |
| | 256. 289. 292. 295. 313. |
| | 337. 382. 388. 415. 457. |
| | 466. 478. 562. 577. 583. |
| | 772. 862 . . . . . . . . . . . . . . 32 |
| 5 | 74. 86. 119. 122. 125. |
| | 143. 159. 166. 181. 188. |
| | 197. 218. 229. 242. 250. |
| | 303. 316. 317. 319. 346. |
| | 361. 373. 375. 394. 412. |
| | 421. 422. 423. 508. 538. |
| | 613. 625. 694. 709. 757. |
| | 847. 853. 877. 982 . . . . . . 39 |
| 6 | 89. 216. 155. 171. 203. |
| | 212. 219. 233. 241. 244. |
| | 259. 274. 275. 279. 291. |
| | 302. 323. 324. 327. 334. |
| | 351. 355. 363. 387. 433. |
| | 436. 475. 484. 507. 526. |
| | 529. 543. 567. 603. 617. |
| | 621. 628. 655. 667. 673. |
| | 676. 687. 718. 723. 763. |
| | 775. 802. 898. 955 . . . . . . 49 |
| 7 | 101. 134. 149. 173. 215. |
| | 278. 284. 287. 338. 349. |
| | 391. 447. 454. 502. 511. |
| | 535. 604. 634. 639. 653. |
| | 703. 733. 778. 807. 838. |
| | 841. 892. 997 . . . . . . . . . . 28 |
| 8 | 146. 164. 254. 257. 353. |
| | 407. 409. 452. 471. 512. |
| | 514. 527. 548. 559. 578. |
| | 722. 799. 895. 943. 958. |
| | 961 . . . . . . . . . . . . . . . . 22 |

9 194. 236. 293. 332. 335.
339(*3*). 362. 411. 428.
451. 459. 486. 515. 519.
531. 556. 557. 575. 586.
661. 675(*3*). 679. 707.
729. 747. 771. 783. 796.
835. 843. 844. 867. 886.
891(*3*). 922. 931. 963.
972 ................ 37
10 206. 281. 386. 398. 401.
449. 482. 500. 601. 711.
724. 769. 788. 878. 916.
927. 937. 977 ........ 18
11 269. 326. 389. 551. 554.
591. 623. 662. 668. 758.
767. 829. 842. 871. 879 . 15
12 299. 356. 371. 395. 539.
542. 579. 593. 674. 695.
706. 766. 932. 939. 964.
979. 995. 999 ........ 18
13 314. 458. 698. 746. 764.
773. 934. 951. 998 ..... 9
14 404. 596. 641. 686. 692.
818. 831 ............. 7
15 461. 509. 524. 566. 611.
635. 671. 677. 699. 716.
779. 797. 803. 815. 821.
851. 875. 908. 923. 956 . 20
16 446. 521. 569. 791. 809.
857. 953 ............. 7
17 614. 701 ............. 2
18 626. 731. 755(*3*). 914.
929. 959. 974(*3*) .... 7
20 734. 761. 881. 926 .... 4
21 794. 899 ............ 2
22 866 ............... 1
23 941 ............... 1
Irreg. 5 omnes *3* pr. 7394

G. IV ..... (417) ....... (6620)
1 21. 24. 30. 33. 40.
42. 45. 48. 57. 60.
70. 72. 78. 85. 88.
93. 102. 112. 130. 133.
177. 190. 232. 253 ..... 24
2 56. 65. 66. 69. 77.
80. 84. 90. 96. 114.
117. 126. 132. 136. 138.
141. 144. 145. 150. 153.
154. 156. 160. 180. 184.
192. 198. 205. 208. 213.
217. 220. 225. 228. 238.
252. 258. 265. 282. 288.
301. 310. 322. 328. 333.
340. 352. 372. 400. 418.
438. 442. 445. 448. 498.
505. 522. 553. 568. 592.
598. 658. 697. 708. 742.
793. 928 ............. 67
3 104. 110. 129. 140. 152.
170. 174. 176. 182. 186.
189. 195. 200. 201. 204.
216. 222. 231. 234. 237.
245. 246. 249. 255. 261.
270. 286. 294. 297. 300.
304. 309. 315. 318. 325.
342. 348. 364. 366. 368.
370. 378. 393. 396. 405.
417. 424. 430. 432. 435.
450. 453. 460. 472. 473.
477. 483. 490. 492. 493.
496. 513. 517. 533. 537.
540. 550. 555. 565. 588.
595. 597. 606. 610. 618.
627. 637. 648. 669. 670.
682. 685. 688. 700. 702.
715. 730. 748. 753. 762.
784. 795. 808. 813. 814.
817. 826. 827. 837. 856.
913. 918. 925. 933. 940.
942. 949. 970. 973. 988 . 110
4 161. 185. 221. 224. 248.
260. 272. 276. 305. 306.
308. 320. 350. 354. 369.
376. 377. 380. 384. 392.
399. 402. 406. 410. 414.
441. 444. 468. 469. 481.
485. 495. 501. 518. 532.
544. 558. 564. 573. 574.
576(*2*). 580(*2*). 582.
589. 612. 632. 640. 642.
646. 657. 663. 712. 717.
721. 732. 735. 736. 738.
745. 768. 785. 786. 790.
820(*2*). 832. 834. 850.
852. 855. 865. 868. 873.
882. 889. 909(*2*). 903.
904. 933. 938. 946. 975.
994 ................ 82
5 209. 230. 266. 290. 296.
321. 344. 365. 381. 413.
425. 437. 455. 470. 474.
476. 488. 489. 534. 572.
590. 608. 615. 629. 633.
636. 638. 649. 664. 666.
678. 681. 726. 737. 750.
752. 754. 774. 781. 822.
830. 872. 874. 917. 921.
968. 1000 .......... 47
6 329. 416. 426. 434. 464.
497. 516. 549. 594. 602.
605. 620. 621. 650. 651.
684. 704. 713. 725. 756.
759. 782. 800. 801. 804.
810. 812. 819. 833. 848.
864. 876. 890. 894. 901
905. 915. 948. 954. 976.
978. 980. 981. 985. 987.
996 ................ 46
7 341. 374. 494. 506. 530.
536. 581. 654. 806. 845.
849. 860. 893. 902. 906.
909. 935. 962 ........ 18
8 545. 584. 644. 656. 710.
740. 749. 789. 846. 869.
884(*2*). 896. 992 ..... 13
9 944. 950. 989 ........ 3
10 689. 776. 824. 836 ..... 4
11 854. 965. 986 ........ 3
pr. 6904

G. VIII .... (87) ......... (1496)
1 105. 120. 165. 168. 210.
240. 273. 280. 312. 330.
345. 357. 385. 408. 462.
520. 760 ............. 17
2 264. 285. 336. 360. 390.
420. 429. 456. 465. 480.
504. 510. 525. 528. 552.
561. 570. 585. 600. 609.
616. 624. 630. 645. 660.
672. 690. 693. 720. 765.
777. 792. 798. 805. 858.
870. 880. 897. 910. 912.
952. 957. 960 ........ 43
3 440. 546. 560. 665. 680
696. 705. 714. 728. 741.
744. 780. 816. 825 861.
885. 888. 924. 930. 936.
945. 966. 969. 984. 990 . 25
4 770 ................ 1
5 920 ................ 1
G. XVI ...... (1) .......... (16)
1 840 ................ 1

Multitudo integra omnium

generum $= 3277$
classium $p.p.p = 15467$
$\sqrt{1} + \sqrt{2} + .. + \sqrt{1000} = 21097,661$
Quotiens $= 0,733$

Irreg. 11. 5(*2*). 6(*3*)

DETERMINANTES NEGATIVI.

## Millias III.

G. I . . . . . . (64) . . . . . . (2470)

| | | |
|---|---|---|
| 13 | 2143 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 15 | 2203. 2347. 2647. 2683 . . | 4 |
| 21 | 2011. 2083. 2179. 2251. | |
| | 2467. 2503. 2707. 2767 . . | 8 |
| 23 | 2671 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 25 | 2887 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 27 | 2003. 2187*. 2803 . . . . | 3 |
| 29 | 2287. 2311. 2383 . . . . . | 3 |
| 31 | 2927 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 33 | 2027. 2267. 2423. 2539. | |
| | 2731. 2851. 2971 . . . . . | 7 |
| 35 | 2087. 2239. 2543 . . . . . | 3 |
| 37 | 2447 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 39 | 2131. 2207. 2371. 2659. | |
| | 2791. 2963 . . . . . . . . | 6 |
| 41 | 2551. 2719 . . . . . . . . | 2 |
| 43 | 2663 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 45 | 2039. 2063. 2243*. 2699*. | |
| | 2843 . . . . . . . . . . . | 5 |
| 49 | 2111 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 51 | 2531. 2687 . . . . . . . . | 2 |
| 53 | 2711 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 57 | 2099. 2339. 2459. 2591. | |
| | 2879 . . . . . . . . . . . | 5 |
| 59 | 2399. 2903 . . . . . . . . | 2 |
| 63 | 2351. 2579. 2819 . . . . . | 3 |
| 69 | 2411 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 73 | 2999 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 87 | 2939 . . . . . . . . . . . | 1 |

Irreg. 3

G. II . . . . . (311) . . . . . (11646)

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 2017. 2062 . . . . . . . . . | 2 |
| 7 | 2293. 2335 . . . . . . . . . | 2 |
| 8 | 2095. 2113. 2137. 2302. | |
| | 2308. 2377. 2578. 2878. | |
| | 2962 . . . . . . . . . . . . | 9 |
| 9 | 2023 2038. 2047. 2053. | |
| | 2122 2167. 2188 2221. | |
| | 2227. 2283. 2403 (*3*). | |
| | 2437 (*3*). 2443. 2458. | |
| | 2515. 2557. 2563 (*3*). | |
| | 2566. 2572. 2787. 2797. | |
| | 2902. 2923. 2998 . . . . . | 24 |
| 10 | 2164. 2281. 2407. 2452. | |
| | 2473. 2487. 2500. 2527. | |
| | 2638. 2722. 2743. 2818. | |
| | 2836. 2857. 2983 . . . . . | 15 |
| 11 | 2182. 2215. 2263 2326. | |
| | 2374. 2623. 2662. 2677. | |
| | 2815. 2863. 2917. 2935 . . | 12 |
| 12 | 2059. 2098. 2107. 2116. | |
| | 2209. 2307. 2323. 2395. | |
| | 2419. 2468. 2479. 2587. | |
| | 2593. 2611. 2689. 2692. | |
| | 2713. 2827. 2947. 2953 | |
| | 2995 . . . . . . . . . . . . | 21 |
| 13 | 2102. 2197. 2218. 2362. | |
| | 2367. 2428. 2524 2762. | |
| | 2809. 2823. 2839. 2854. | |
| | 2908 . . . . . . . . . . . . | 13 |
| 14 | 2007. 2018. 2127. 2258. | |
| | 2359. 2401. 2446. 2455. | |
| | 2612. 2734. 2753. 2932 . . | 12 |
| 15 | 2043. 2071. 2092. 2151. | |
| | 2191. 2237. 2269. 2284. | |
| | 2299. 2303. 2319. 2341. | |
| | 2363. 2476. 2523. 2575. | |
| | 2578. 2599. 2602. 2643. | |
| | 2727. 2732. 2764. 2875. | |
| | 2883. 2899. 2956. 2986 . . | 28 |
| 16 | 2048. 2153. 2194. 2206. | |
| | 2386. 2434. 2462. 2521. | |
| | 2617. 2633. 2657. 2833 . . | 12 |
| 17 | 2026. 2029. 2103. 2119. | |
| | 2234. 2333. 2389. 2391. | |
| | 2463. 2918 . . . . . . . . . | 10 |
| 18 | 2155. 2161. 2199. 2228. | |
| | 2417. 2491. 2511. 2547. | |
| | 2619 (*3*). 2627. 2644. | |
| | 2723. 2763 (*3*). 2783. | |
| | 2867. 2897. 2916. 2943. | |
| | 2979 . . . . . . . . . . . . | 19 |
| 19 | 2031. 2069. 2381. 2477. | |
| | 2554. 2738. 2746. 2799. | |
| | 2858. . . . . . . . . . . . . | 9 |
| 20 | 2078. 2297. 2375. 2402. | |
| | 2404. 2498. 2559. 2777. | |
| | 2866. 2942. 2959 . . . . . | 11 |
| 21 | 2012. 2123. 2138. 2147. | |
| | 2171. 2183. 2186. 2213. | |
| | 2259. 2342. 2348. 2357. | |
| | 2427. 2507. 2571. 2693. | |
| | 2749. 2779. 2911. 2931. | |
| | 2972. . . . . . . . . . . . . | 21 |
| 22 | 2089. 2271. 2439. 2567. | |
| | 2594. 2798 . . . . . . . . . | 6 |
| 23 | 2614. 2615. 2837. . . . . . | 3 |
| 24 | 2019. 2195. 2273. 2327. | |
| | 2372. 2631. 2654. 2811. | |
| | 2974. 2991 . . . . . . . . . | 10 |
| 25 | 2042. 2396. 2582. 2588 . . | 4 |
| 26 | 2642. 2807. 2969. . . . . . | 3 |
| 27 | 2051. 2075 (*3*). 2252. | |
| | 2291. 2315 (*3*). 2426. | |
| | 2675 (*3*). 2747. 2759. | |
| | 2859. 2891 (*3*). 2951. | |
| | 2957 . . . . . . . . . . . . | 13 |
| 28 | 2066. 2129. 2279. 2495. | |
| | 2564 . . . . . . . . . . . . | 5 |
| 29 | 2231. 2741 . . . . . . . . . | 2 |
| 30 | 2036. 2081. 2126. 2159. | |
| | 2393. 2483. 2603. 2606. | |
| | 2708. 2801. 2855. 2978. | |
| | 2987 . . . . . . . . . . . . | 13 |
| 31 | 2471. 2621. 2735. 2876 . . | 4 |
| 32 | 2084 2174. 2276. 2306. | |
| | 2519. 2558 . . . . . . . . . | 6 |
| 33 | 2309. 2435. 2636. 2861. | |
| | 2906 . . . . . . . . . . . . | 5 |
| 34 | 2804. 2831. 2894 . . . . . | 3 |
| 35 | 2549 2909 . . . . . . . . . | 2 |
| 36 | 2219 (*3*). 2846 . . . . . . | 2 |
| 38 | 2441 . . . . . . . . . . . . | 1 |
| 39 | 2141. 2246. 2474. 2651. | |
| | 2771 . . . . . . . . . . . . | 5 |
| 40 | 2729 . . . . . . . . . . . . | 1 |
| 41 | 2789 . . . . . . . . . . . . | 1 |
| 42 | 2609 . . . . . . . . . . . . | 1 |
| 43 | 2966 . . . . . . . . . . . . | 1 |

Irreg. 10

G. IV . . . . (430) . . . . . . (16232)

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 2608 . . . . . . . . . . . . . | 1 |
| 4 | 2020. 2077. 2212. 2242. | |
| | 2248. 2272. 2332. 2353 | |
| | 2368. 2410. 2533. 2542(*2*) | |
| | 2605. 2773. 2788. 2842. | |
| | 2893 . . . . . . . . . . . . . | 17 |
| 5 | 2032. 2073. 2074. 2101. | |
| | 2118. 2125. 2152. 2158. | |
| | 2173. 2178. 2202. 2230. | |
| | 2247. 2290. 2398. 2422. | |
| | 2433. 2494. 2577. 2641. | |
| | 2776. 2830. 2853. 2965 . . | 24 |
| 6 | 2022. 2025. 2028. 2035. | |
| | 2050. 2052. 2067. 2068. | |
| | 2082. 2086. 2096. 2104. | |
| | 2115. 2132. 2139. 2148. | |
| | 2157. 2163. 2172. 2223. | |
| | 2257. 2260. 2268. 2275. | |
| | 2278. 2305 2317. 2322. | |
| | 2338. 2358. 2388. 2412. | |
| | 2413. 2425. 2451. 2475. | |
| | 2482 2488. 2493. 2512. | |
| | 2517. 2538. 2545. 2548. | |
| | 2592. 2598. 2610. 2629. | |
| | 2650. 2653. 2658. 2667. | |
| | 2668 2676. 2682. 2695. | |
| | 2698. 2704. 2710. 2715. | |
| | 2718. 2725. 2740. 2748. | |
| | 2752. 2755. 2758. 2794. | |

NACHLASS.

2802. 2872. 2892. 2907.
2914. 2938. 2977. 2997 . . 76
7 2008. 2033. 2044. 2055.
2058. 2094. 2110. 2140.
2146. 2149. 2165. 2217.
2238. 2270. 2314. 2382.
2416. 2431. 2438. 2497.
2502. 2509. 2535. 2536.
2556. 2583. 2607. 2703.
2761. 2766. 2782. 2812.
2881. 2913. 2930. 2941.
2973 . . . . . . . . . . . 37
8 2004. 2005. 2034. 2041.
2056. 2134. 2176 (*2*).
2192. 2236. 2245. 2254 (*2*).
2286. 2292. 2298. 2304.
2312. 2313. 2329 (*2*).
2343. 2350. 2356. 2454.
2506. 2513. 2528. 2560.
2569. 2589. 2601. 2628 (*2*).
2655. 2674. 2686. 2733.
2742 2775. 2785. 2817.
2845. 2847. 2848 (*2*).
2868. 2884. 2944. 2946.
2949. 2980 (*2*) . . . . . 47
9 2014. 2049. 2060. 2076.
2079. 2091. 2106 2108.
2117. 2124. 2133 (*3*).
2175. 2181. 2198. 2214.
2221. 2235 (*3*). 2241.
2253. 2266. 2295. 2300.
2318. 2344. 2349. 2355.
2361. 2387. 2430 (*3*).
2461. 2522. 2555. 2581.
2595. 2626. 2634. 2635.
2637. 2646 (*3*). 2673.
2700 (*3*). 2716. 2770.
2778. 2781. 2795. 2806.
2828. 2835 (*3*). 2862.
2887. 2888. 2890. 2895.
2950. 2955. 2988. 2989 . . 58
10 2057. 2061. 2150. 2154.
2166. 2177. 2249. 2250.
2255 2282. 2449. 2514.
2529. 2532. 2596. 2656.
2678. 2724. 2751. 2810.
2844. 2869. 2871. 2874.
2896. 2919. 2929. 2948.
2975 . . . . . . . . . . . 29
11 2135. 2204. 2216. 2334.
2364. 2421. 2489. 2492.
2570. 2573. 2645. 2648.
2649 2672. 2757. 2841.
2922. 2933. 2934. 2967 . . 20
12 2006. 2009. 2045. 2105.
2156. 2168. 2169. 2196.
2211. 2225. 2229. 2316.
2331. 2366. 2379 (*2*).
2390. 2420 (*2*). 2432.
2450. 2466. 2484. 2499.
2597. 2661. 2691. 2696.
2701. 2702 (*2*). 2739.
2754. 2780. 2816. 2822.
2824. 2825. 2852. 2873.
2900. 2993 (*2*) . . . . . 39
13 2015. 2222 2453. 2469.
2481. 2510. 2679. 2721.
2792. 2826. 2901. 2984 . . 12
14 2114. 2144. 2162. 2274.
2324. 2354. 2384. 2429.
2486. 2501. 2525. 2587.
2744. 2768. 2774 . . . . . 15
15 2096. 2189. 2264. 2285.
2321. 2330. 2378. 2406.
2444. 2526. 2534. 2537.
2540. 2630. 2684. 2690.
2694. 2750. 2796. 2813.
2864. 2889. . . . . . . . . 22
16 2180. 2201. 2336. 2546.
2561. 2624 (*2*). 2639.
2669. 2882. 2921. 2994.
2996 . . . . . . . . . . . 12
17 2021. 2456. 2666. 2726 . . 4
18 2054. 2369. 2414. 2504.
2516. 2681. 2705. 2786.
2915. 2924 . . . . . . . . 10
19 2294 . . . . . . . . . . . 1
20 2714. 2756 (*2*). 2936.
2954. 2981 . . . . . . . . 5
21 2834 . . . . . . . . . . . 1

Irreg. 13 (2). 6 (3). Sa . . 19

G. VIII . . . . (184) . . . . (6344)
2 2002. 2013. 2080. 2088.
2128. 2170. 2233. 2277.
2392. 2632. 2737. 2832.
2968 . . . . . . . . . . . 13
3 2037. 2065. 2160. 2185.
2190. 2193. 2200. 2205.
2220. 2262. 2325. 2346.
2352. 2370. 2373. 2380.
2418. 2424. 2440. 2457.
2472. 2485. 2508. 2530.
2550. 2553. 2562. 2590.
2613. 2622. 2680. 2685.
2697. 2728. 2800. 2808.
2860. 2905. 2920. 2937.
2970. 2982. 2992 . . . . . 43
4 2010. 2016. 2046. 2072.
2100. 2112 (*2*). 2130.
2142. 2208. 2232. 2244.
2256. 2265. 2289. 2296.
2320. 2328. 2337. 2340.
2365. 2385 (*2*). 2397.
2400 (*2*). 2436. 2442.
2445. 2448 (*2*). 2464.
2465. 2470. 2478. 2490.
2496. 2568. 2580. 2584.
2652. 2665. 2688. 2706.
2709. 2717. 2745. 2772.
2790. 2793. 2821. 2829.
2850 (*2*). 2865. 2880.
2898. 2928. 2940. 2952.
2958. 2985 . . . . . . . . 57
5 2030. 2070. 2085. 2093.
2109. 2121. 2136. 2226.
2288. 2360. 2394. 2405.
2409. 2415. 2460. 2505.
2541. 2544. 2552. 2585.
2610. 2618. 2625. 2664.
2670. 2712. 2769. 2814.
2838. 2877. 2886. 2904.
2910. 2926. 2990. 3000 . . 36
6 2001. 2064. 2090. 2240.
2301. 2376. 2408. 2480.
2564. 2574. 2600. 2604.
2660. 2720. 2736. 2784.
2820. 2912. 2925. 2961.
2964. 2976 . . . . . . . . 22
7 2024. 2120. 2210. 2345.
2616. 2765. 2870 . . . . 7
8 2576. 2840. 2849. 2945.
2960 . . . . . . . . . . . 5
9 2261 . . . . . . . . . . . 1

Irreg. 5 (2)

G. XVI . . . . (11) . . . . . (400)
2 2040. 2145. 2280. 2310.
2520. 2640. 2730. 2760 . . 8
3 2184. 2805. 2856 . . . . . 3

Summa omnium

gener. $p.p.p =$ 4054 exsp. 4051,3
class. $p.p.p =$ 37092 . . 37074,3
.. impr. $p.p =$ 6182

Irreg. 18 (*2*). 19 (*3*). Sa = 37

DETERMINANTES NEGATIVI.

## Millias X.

### Genera I.

| | |
|---|---|
| 27 | 9067 |
| 33 | 9283. 9403. 9643 |
| 35 | 9007 |
| 39 | 9547. 9739. 9787. 9967 |
| 41 | 9319 |
| 45 | 9043. 9463. 9907 (*3*) |
| 49 | 9871 |
| 51 | 9199. 9343. 9883 |
| 55 | 9391 |
| 57 | 9103. 9127. 9619 |
| 63 | 9091. 9187. 9811 (*3*) 9859 |
| 67 | 9151 |
| 69 | 9511. 9587. 9931 |
| 71 | 9679 |
| 75 | 9227. 9439. 9887. 9923 |
| 77 | 9631 |
| 87 | 9323 |
| 89 | 9767 |
| 91 | 9431. 9839 |
| 93 | 9203 |
| 95 | 9623 |
| 97 | 9311 |
| 99 | 9011 |
| 101 | 9479 |
| 105 | 9419. 9743 |
| 111 | 9059. 9803 |
| 119 | 9791 |
| 123 | 9467 |
| 129 | 9551 |
| 133 | 9719 |
| 135 | 9491. 9851 |
| 139 | 9239 |
| 147 | 9371 |
| 165 | 9539 |

57 . . . 4401.

### Genera II.

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 9667 | 1 |
| 13 | 9157. 9277 | 2 |
| 14 | 9172 | 1 |
| 15 | 9013. 9307. 9388 | 3 |
| 16 | 9433. 9508. 9991 | 3 |
| 17 | 9223. 9535. 9703 | 3 |
| 18 | 9003 (*3*). 9055. 9241. 9298. 9355. 9475. 9523. 9583. 9748 (*3*). 9783. 9934 (*3*) | 11 |
| 19 | 9034. 9133. 9466. 9487. 9661. 9727 | 6 |
| 20 | 9124. 9183. 9442. 9598. 9697. 9892 | 6 |
| 21 | 9004. 9046. 9115. 9235. 9397. 9427. 9607. 9613. 9733. 9829. 9862. 9868 | 12 |
| 22 | 9742. 9847 | 2 |
| 23 | 9181. 9382. 9927. 9973 | 4 |
| 24 | 9406. 9409. 9423. 9502. 9507. 9601. 9763. 9817. 9874 | 9 |
| 25 | 9293. 9375. 9559. 9781. 9949 | 5 |
| 26 | 9079. 9337. 9543. 9655. 9769. 9778. 9838 | 7 |
| 27 | 9031. 9094. 9109. 9123. 9167. 9175. 9211. 9247. 9349. 9531 (*3*). 9563. 9574 (*3*). 9627 (*3*). 9663. 9683 (*3*). 9747 (*3*) 9751. 9963 (*3*) | 18 |
| 28 | 9137. 9327. 9604. 9634. 9649. 9886. 9895. 9903. 9943 | 9 |
| 29 | 9098. 9148. 9244. 9532 | 4 |
| 30 | 9001. 9076. 9147. 9271. 9346. 9358. 9363. 9364. 9459. 9571. 9687. 9691. 9755. 9857. 9938. 9979 | 16 |
| 31 | 9263. 9901 | 2 |
| 32 | 9111. 9377. 9662. 9986 | 4 |
| 33 | 9068. 9267. 9421. 9527. 9692. 9799 | 6 |
| 34 | 9122. 9166. 9328. 9332. 9458. 9556. 9586. 9826. 9998 | 9 |
| 35 | 9279. 9754 | 2 |
| 36 | 9049. 9083. 9143. 9259. 9347. 9379. 9395. 9451. 9497 (*3*). 9668 | 10 |
| 37 | 9274. 9788 | 2 |
| 38 | 9524. 9567. 9908 | 3 |
| 39 | 9107. 9171. 9242. 9286. 9287. 9484. 9707. 9771. 9914. 9987 | 10 |
| 40 | 9023. 9188. 9278. 9473 | 4 |
| 41 | 9302 | 1 |
| 42 | 9041. 9428 9518. 9651. 9827. 9939. 9947 | 7 |
| 43 | 9578. 9647. 9722 | 3 |
| 44 | 9047. 9662 | 2 |
| 45 | 9019 (*3*). 9251 (*3*). 9411. 9437. 9626. 9899 (*3*). | 6 |
| 46 | 9038. 9351. 9407. 9722. 9759. 9983 | 6 |
| 47 | 9173. 9935. 9946 | 3 |
| 48 | 9092. 9566. 9731. 9863 | 4 |
| 49 | 9221. 9335. 9599. 9677. 9818 | 5 |
| 50 | 9902 | 1 |
| 51 | 9383. 9413. 9575. 9819 | 4 |
| 52 | 9359. 9689. 9833 | 3 |
| 54 | 9099 (*3*). 9134. 9155. 9209 | 4 |
| 55 | 9629 | 1 |
| 56 | 9182. 9314 | 2 |
| 57 | 9029. 9179. 9356. 9461. 9659. 9836 | 6 |
| 59 | 9596 | 1 |
| 60 | 9131. 9257. 9572. 9875. 9995 | 5 |
| 61 | 9533 | 1 |
| 62 | 9119 | 1 |
| 63 | 9194. 9206. 9404. 9671. 9971 | 5 |
| 64 | 9521 | 1 |
| 65 | 9959 | 1 |
| 66 | 9236. 9611 | 2 |
| 67 | 9941 | 1 |
| 69 | 9014. 9071. 9341. 9644 | 4 |
| 70 | 9806 | 1 |
| 71 | 9446 | 1 |
| 72 | 9161 | 1 |
| 75 | 9299 | 1 |
| 76 | 9764. 9929 | 2 |
| 77 | 9866 | 1 |
| 80 | 9026. 9281 | 2 |
| 81 | 9749 | 1 |
| 85 | 9974 | 1 |

Summa 265 . . 19580

Irreg. 14

### Genera IV.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 9823 | 1 |
| 7 | 9178. 9262. 9340. 9367. 9718. 9802. 9937 | 7 |
| 8 | 9087. 9088. 9118 (*2*). 9193. 9202. 9208. 9232. 9412 (*2*). 9457 (*2*). 9472. 9538. 9562. 9577. 9865 | 14 |
| 9 | 9022. 9037. 9073. 9097. 9132. 9139. 9162. 9163 (*3*). 9342 (*3*). 9370. 9493. 9612 (*3*). 9615. 9622. 9678. 9772. 9832. 9843. 9853. 9898. 9925. 9958. 9997 | 23 |
| 10 | 9025. 9058. 9190. 9238. 9289. 9517. 9553. 9573. 9628. 9732. 9793. 9808. 9837. 9850. 9913. 9942. 9948. 10000 | 18 |
| 11 | 9052. 9237. 9258. 9304. | |

9322. 9402. 9447. 9496.
9670. 9738. 9753. 9813.
9970 . . . . . . . . . . . . . . 13

12 9018. 9027. 9028. 9121.
9142. 9153. 9186. 9207.
9219. 9220 (*2*). 9228.
9243 (*2*). 9268. 9292.
9295. 9297. 9378. 9387.
9445. 9469. 9483. 9498.
9505. 9522. 9526. 9550.
9580. 9595 (*2*). 9652.
9673 (*2*). 9676. 9682.
9700. 9706. 9745. 9762.
9835. 9872. 9916. 9922.
9952. 9955 (*2*). 9972 (*2*) 43

13 9082. 9117. 9249. 9255.
9313. 9318. 9415. 9418.
9448. 9454. 9468. 9478.
9514. 9549. 9557. 9637.
9712. 9713. 9846. 9993 . . 20

14 9017. 9032. 9066. 9217.
9226. 9253. 9353. 9354.
9436. 9501. 9529. 9542.
9642. 9658. 9664. 9757.
9775. 9784. 9820. 9878.
9988 . . . . . . . . . . . . . 21

15 9033. 9051. 9063. 9106.
9136. 9195. 9196. 9212.
9250. 9276. 9325. 9331.
9339. 9443. 9452. 9582.
9639. 9766. 9777. 9795.
9822. 9882. 9904. 9921.
9969. 9978 . . . . . . . . . . 26

16 9214 (*2*). 9216 (*2*).
9248 (*2*). 9252. 9301.
9316 (*2*). 9544. 9610.
9736. 9797. 9807. 9814.
9848. 9961. 9985 . . . . . 15

17 9002. 9057. 9070. 9158.
9254. 9303. 9410. 9564.
9606. 9711 9852. 9893.
9897. 9919. 9965 . . . . . 15

18 9012. 9015. 9069 (*3*).
9075 (*3*). 9154. 9234.
9315 (*3*). 9357. 9362.
9376. 9385 (*3*). 9396.
9398. 9444. 9477. 9482.
9495. 9558. 9603. 9675 (*3*).
9693 (*3*). 9715. 9723.
9782. 9801 (*3*). 9844.
9873. 9891. 9910. 9915.
9964 . . . . . . . . . . . . . 31

19 9053. 9095. 9146. 9565.
9638. 9694. 9773. 9815.
9879. 9951. 9957. 9977 . 12

20 9039. 9054. 9062. 9081.
9169. 9500. 9503 (*2*).
9589. 9591. 9593. 9608.
9616. 9650. 9653. 9724.
9796. 9992 . . . . . . . . . 17

21 9036. 9126. 9197. 9201.
9229. 9261. 9334. 9368.
9392. 9414. 9481. 9489.
9499. 9515. 9561. 9699.
9708. 9710. 9770. 9774.
9855. 9909 . . . . . . . . . 22

22 9084. 9138. 9189. 9233.
9245. 9305. 9317. 9441.
9654. 9684. 9725. 9756.
9841. 9953. 9956. 9962.
9999 . . . . . . . . . . . . . 17

23 9365. 9695. 9917. 9994 . . 4

24 9113. 9159. 9275. 9291.
9308. 9399. 9422 (*2*).
9426. 9474. 9488. 9519.
9579. 9641. 9666. 9728 . . 15

25 9101. 9125. 9231. 9294.
9530. 9584. 9609. 9830.
9981 . . . . . . . . . . . . . 9

26 9218. 9290. 9794. 9812.
9876. 9924 . . . . . . . . . 6

27 9008. 9050. 9074. 9164.
9260 (*3*). 9369. 9374.
9509. 9704. 9726. 9832.
9989 . . . . . . . . . . . . . 22

28 9089. 9116. 9494. 9536.
9716. 9734. 9881 (*2*).
9926. 9980 . . . . . . . . . 9

29 9215. 9449. 9617. 9674.
9698. 9761 . . . . . . . . 6

30 9005. 9035. 9056. 9077.
9140. 9284. 9386. 9455.
9506. 9621. 9746. 9932.
9950 . . . . . . . . . . . . . 13

31 9191. 9884 . . . . . . . . . 2

32 9104 (*2*). 9224. 9344 (*2*).
9665. 9809 (*2*) . . . . . 5

33 9149. 9329. 9389. 9635.
9740 . . . . . . . . . . . . 5

34 9110. 9824. 9911 . . . 3

35 9470 . . . . . . . . . . . . 1

36 9266 (*2*). 9476. 9779 . . 3

37 9854 . . . . . . . . . . . . 1

38 9569. 9701 . . . . . . . . . 2

39 9896 . . . . . . . . . . . . . 1

40 9554 . . . . . . . . . . . . . 1

41 9869 . . . . . . . . . . . . . 1

42 9434. 9686 . . . . . . . . . 2

Summa 416 . . . 30144

Irreg. 20 (*2*). 11 (*3*)

Genera VIII.

4 9108. 9310. 9328. 9373.
9430. 9568. 9640. 9982.

5 9010. 9102. 9160. 9333.
9417. 9592. 9618. 9625.
9685. 9688. 9717. 9730.
9877. 9976 . . . . . . . . 14

6 9040. 9042. 9045. 9072.
9085. 9100. 9112. 9130.
9145. 9150. 9206. 9213.
9265. 9270. 9288. 9300.
9352. 9408. 9432. 9438.
9465. 9492. 9552. 9585.
9597. 9648. 9696. 9760.
9790. 9804. 9810. 9828.
9867. 9888. 9900. 9928.
9940. 9990 . . . . . . . . 38

7 9078. 9080. 9090. 9093.
9174. 9256. 9321. 9361.
9381. 9453. 9462. 9528.
9633. 9646. 9724. 9752.
9805. 9858. 9885. 9906 . . 20

8 9016 (*2*). 9024. 9060.
9135. 9144. 9156. 9168.
9184 9192 9198. 9222.
9225. 9273. 9280 (*2*).
9285. 9312 (*2*). 9348.
9372. 9393. 9394. 9400.
9424. 9460. 9485. 9486.
9490. 9510 (*2*). 9513 (*2*).
9537 9540 (*2*). 9588.
9600 (*2*). 9645. 9669.
9702 (*2*). 9729. 9735.
9758. 9780. 9792 (*2*).
9816. 9856. 9860. 9930.
9975. 9984 . . . . . . . . 46

9 9061. 9064. 9105. 9114.
9180. 9185. 9200. 9272.
9390. 9420. 9450 (*3*).
9471. 9541. 9548. 9555 (*3*).
9630. 9657. 9705. 9709.
9720 (*3*). 9825 (*3*).
9849 (*3*). 9889 . . . . . 23

10 9020. 9128. 9152. 9210.
9330. 9338. 9366. 9440.
9525. 9534. 9594. 9620.
9636. 9741. 9750 9798.
9821. 9834. 9918 . . . . . 19

11 9006. 9129. 9170. 9230.
9306. 9309. 9336. 9429.
9456. 9681. 9737. 9786.
9894. 9968 . . . . . . . . 14

12 9021. 9065. 9141. 9204.
9264. 9324. 9425. 9435.
9464. 9504. 9516 (*2*).

| | | |
|---|---|---|
| | 9560. 9605. 9632. 9680(*2*). 9800. 9861. 9864. 9905. 9920. 9936. 9954. 9996. | 23 |
| 13 | 9545. 9594. 9842. 9966 | 4 |
| 14 | 9096. 9269. 9296. 9350. 9380. 9416. 9581. 9789. 9944 | 9 |
| 15 | 9246. 9320. 9512. 9590. 9624. 9776. 9785 | 7 |
| 16 | 9401. 9614. 9845 | 3 |
| 17 | 9086. 9890 | 2 |
| 18 | 9044. 9656 | 2 |
| 19 | 9176 | 1 |
| | Summa 233 | 16680 |

Irreg. 11(*2*). 5(*3*)

Genera XVI.

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 9030. 9048. 9177. 9281. 9384. 9480. 9510. 9570. 9672. 9870. 9933 | 11 |
| 4 | 9120. 9165. 9345. 9360. 9405. 9690. 9744. 9765. 9768. 9880. 9912. 9945. 9960 | 13 |
| 5 | 9009. 9576. 9660. 9840. | 4 |
| | 28 ... 1680. | |

Genera XXXII.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9240 | 1 |
| | 1 ... 64 | |

Summam omnium
classium $p.p.p.$ 72549
exsp. 72572
$\Sigma \gamma \sqrt{D}$ 72775
generum $p.p.p.$ 4595
exsp. 4594,9
Irreg. 31(*2*). 32(*3*) ... 63
Quotiens maximus
1,729662 ex 9434. IV, 42
minimus
0,2421048 ex 9823. IV, 6
Multitudo classium
minor quam semissis radicis 244
minor quam radix
maior semissi 566
maior radice 199

## Octingenti determ. neg.

formae $-(15n+7)$.

| | | |
|---|---|---|
| G. I | (93) | (2793) |
| 1 | 7 | 1 |
| 3 | 67 | 1 |
| 5 | 127 | 1 |
| 7 | 487 | 1 |
| 9 | 307(*3*). 367. 547. 907. 1087 | 5 |
| 11 | 967 | 1 |
| 13 | 607. 727 | 2 |
| 15 | 787. 1327. 1567. 1747. 1867. 2347. 2647 | 7 |
| 17 | 4447 | 1 |
| 19 | 3607. 4327. 5527 | 3 |
| 21 | 1627. 1987. 2467. 2707. 2767. 3067. 3187. 3907. 5107. 5647 | 10 |
| 23 | 1447. 3847 | 2 |
| 25 | 2887 | 1 |
| 27 | 3307. 3547(*3*). 4027(*3*). 4987. 6007. 6427. 7027. 9067. 10627 | 9 |
| 29 | 2187. 7207. 7687 | 3 |
| 31 | 3727. 8647 | 2 |
| 33 | 3967. 4567. 5167. 6547. 6967. 7867. 8167. 10987 | 8 |
| 35 | 9007 | 1 |
| 37 | 6367 | 1 |
| 39 | 4507. 5347. 7507. 9547. 9787. 9967. 10567. 11467. 11587. 11827 | 10 |
| 41 | 11047 | 1 |
| 43 | 5407. 6247. 8527. 8887 | 4 |
| 45 | 5127(*3*). 5827. 6067(*3*). 6607. 8287. 8467. 8707. 9907(*3*). 10267 | 9 |
| 47 | 7927. 11887 | 2 |
| 51 | 6907. 10687 | 2 |
| 53 | 11287 | 1 |
| 57 | 9127 | 1 |
| 61 | 11527 | 1 |
| 63 | 9187 | 1 |
| 69 | 10867 | 1 |
| | Irreg. 6 | |

| | | |
|---|---|---|
| G. II | (343) | (10010) |
| 1 | 22. 37 | 2 |
| 2 | 52. 82. 97. 142 | 4 |
| 3 | 157. 172. 187. 202. 247. 262. 277. 397. 427. 652 | 10 |
| 4 | 292. 337. 382. 457. 562. 577. 772. 862 | 8 |
| 5 | 412. 757. 847. 877. 982 | 5 |
| 6 | 622. 667. 802. 1027. 1042. 1182. 1297. 1387. 1507. 1807. 2017. 2062 | 12 |
| 7 | 502. 892. 997. 1117. 1237. 1372. 1402. 1597. 1642. 1852 | 10 |
| 8 | 1252. 1657. 1822. 2137. 2302. 2377. 2962. 3217. 4687 | 9 |
| 9 | 922. 1132. 1147. 1207. 1267(*3*). 1687. 1882. 1927. 2047. 2122. 2167. 2227. 2437(*3*). 2557. 2572. 2797. 2902. 3037. 3292. 3427. 3532. 5692 | 22 |
| 10 | 937. 1492. 1522. 2407. 2452. 2527. 2722. 2857. 3007. 3412. 3697. 4057. 4162. 4372. 4852 | 15 |
| 11 | 1942. 2182. 2662. 2677. 2917. 3637. 3802. 4957. 5077. 5212. 6127. 6637 | 12 |
| 12 | 1732. 1762. 1777. 2107. 2587. 2692. 2827. 2947. 3127. 3202. 3742. 3787. 4132. 4222. 4167. 4387. 4657. 4747. 4867. 4882. 5182. 5587. 5707. 5947. 7417. 7492. 7522. 7987. 8002. 9667 | 30 |
| 13 | 2197. 2362. 3622. 3862. 4207. 4282. 5482. 6742. 6847. 6997. 8422. 8572. 8842. 9157. 9277. 10207. 11302 | 17 |
| 14 | 2932. 3022. 3457. 3487. 5422. 5602. 5812. 5887. 6337. 8017. 8782. 9172 | 12 |
| 15 | 2092. 2602. 3142. 3517. 3667. 3877. 4087. 4357. 4492. 4627. 5047. 5062. 5437. 6022. 6442. 6667. 6727. 6892. 6922. 7087. 7162. 7387. 7477. 7627. 8227. 8677. 8812. 8947. 9307. 10147. 10732. 10957 | 32 |
| 16 | 2617. 3247. 4612. 4702. 6217. 7177. 8452. 8962. 10327. 10462. 11617 | 11 |
| 17 | 4762. 4927. 5197. 5287. 5557. 6037. 6502. 6652. 6982. 7132. 7327. 7402. 7642. 7702. 8047. 8317. 10042. 11482 | 18 |
| 18 | 4297. 5737. 5767. 5857(*3*) 6187. 6382. 6577. 6787. | |

7057. 7267 (*3*). 7732.
7807. 8107 (*3*). 8212.
8347. 8497. 8482. 8737.
8767. 10747 (*3*). 10882.
11257. 11347. 11707 . . . 24
19 4252. 4597. 4822. 5722.
6172. 9487. 9727. 10597.
10837. 11062. 11197. 11677 12
20 3442. 4177. 7012. 8542.
9442. 9697. 9892. 10162.
10177 . . . . . . . . . . . 9
21 5242. 5932. 6487. 7147.
7447. 8182. 8332. 9397.
9427. 9607. 9862. 10012.
10102. 10342. 10927. 11002.
11227. 11317. 11767. 11962 20
22 6082. 6772. 7297. 7537.
7822. 9742. 9847. 11167 . 8
23 6277. 6397. 7237. 7717.
8902. 9382. 10522. 10762 . 8
24 7747. 7972. 8377. 9502.
9817. 10372. 10657. 10807.
10852. 10942. 11107. 11422.
11812 . . . . . . . . . . . 13
25 10477 . . . . . . . . . . . 1
26 7342. 7762. 9337. 11647 . 4
27 8587. 9247. 10357. 10447.
11212 . . . . . . . . . . . 5
28 11497 . . . . . . . . . . . 1
29 9532. 11722 . . . . . . . . 2
30 10027. 11182. 11602. 11947 4
32 11332 . . . . . . . . . . . 1
34 10702 . . . . . . . . . . . 1
35 11437 . . . . . . . . . . . 1

Irreg. 6

G. IV . . . . . (310) . . . . (9688)
1 112. 232 . . . . . . . . . . 2
2 217. 322. 352. 442. 532.
592. 697. 742. 1012 . . . 9
3 472. 517. 637. 682. 817.
1072. 1162. 1177. 1192.
1222. 1432. 1612 . . . . . 12
4 712. 832. 1057. 1312 (*2*).
1357. 1417. 1462. 1477.
1537. 1552. 1582 (*2*).
1717. 1792. 1897. 1912.
1957. 2077. 2212. 2242.
2272. 2332. 2542 (*2*).
2842. 3172 (*2*). 3322.
3502 (*2*). 3712 . . . . . 27
5 1102. 1342. 1702. 2032.
2152. 2422. 3082. 3367.
3382. 3397. 3817. 3922.
4102. 4342. 5272. 5377 . 16
6 1837. 1972. 2257. 2317.
2482. 2512. 2752. 2872.
2977. 3052. 3232. 3337.
3577. 3592. 3652. 3892.
3937. 3997. 4012. 4117.
4192. 4237. 4417. 4432.
4477. 4537. 4552. 4642.
4717. 4792. 4942. 4972.
5317. 5362. 5467. 5497.
5842. 6157. 6262. 6307.
6352. 6472. 6682. 6862.
7282. 7837. 10432 . . . . 47
7 2497. 2782. 2812. 3097.
3112. 3277. 3352. 3562.
3982. 4582. 4732. 5122.
5137. 5302. 5902. 5977.
6142. 6517. 7792. 9262.
9367. 9802. 9937 . . . . . 23
8 3262 (*2*). 3682. 3757.
3772. 3832. 4402. 4672 (*2*).
4777 (*2*). 5002. 5017.
5257. 5392. 5572. 5632.
5752. 5917. 5962. 6052 (*2*).
6112. 6202. 6532. 6697.
6757. 6817. 7252. 7312.
7357. 7582 (*2*). 7597.
8122. 8197. 8257. 8497.
8992 (*2*). 9202. 9232.
9412 (*2*). 9457 (*2*).
9472. 9562. 9577. 10132 (*2*).
10312. 10537. 10642. 11092.
11377. 11512. 11572. 11797 50
9 4042. 4072. 4147. 4837.
4897. 4912 (*3*). 5452.
5542. 5677. 5782. 5872.
6322. 6412. 6457. 7102.
7117. 7372. 7852. 7942.
8062. 8092. 8152. 8242 (*3*).
8752. 8827 (*3*). 9022.
9037. 9097. 9622. 9772.
9832. 9997. 10222.
10252 (*3*). 10717. 10822.
11407. 11692. 11782. 11992 40
10 4462. 4807. 5092. 5332.
6292. 6592. 6712. 6802.
6937. 7432. 7897. 8077.
8137. 8302. 8557. 8617.
8692. 8857. 8977. 9517.
10057. 10087. 10297. 10402.
10552. 10777. 10972. 11122.
11272. 11932 . . . . . . . 30
11 5662. 7222. 7567. 7612.
7882. 8362. 8662. 8917.
9052. 9322. 10417. 10492.
11452. 11902 . . . . . . . 14
12 5617. 6562. 6877. 7042.
7552. 7957. 8392. 8722.
9142. 9292. 9652. 9682.
9922. 9952. 10237. 10387.
10612. 10672. 11017. 11542.
11737. 11917 . . . . . . . 22
13 8872. 9082. 9637. 9712.
10117. 11632 . . . . . . . 6
14 8032. 9217. 9757. 11662.
11842 . . . . . . . . . . . 5
15 8797. 10072. 10507 . . . 3
16 10282. 10897. 11392 (*2*).
11857 . . . . . . . . . . . 4

Irreg. 19

G. VIII . . . . . (54) . . . . (1856)
2 952. 1672. 2002. 2392.
2632. 2737 . . . . . . . . 6
3 2992. 3157. 3952. 4522.
5032. 5797. 6097. 6232.
6832. 7912 . . . . . . . . 10
4 3472. 4312. 5152 (*2*).
5992. 6622. 6952. 7072 (*2*).
7672 (*2*). 8437. 8512.
8932. 9982. 11152. 11872 14
5 5512. 7192. 7462. 7657.
7777. 8632. 9592. 9877.
11242. 11362. 11557 . . . 11
6 8272. 9112. 9352. 10192.
10582. 10792. 10912. 11032.
11077. 11137. 11752. 11977 12
7 8602 . . . . . . . . . . . . 1

Irreg. 3

Omnia gen. 2451 exsp. 2445,10
omnes class. 24347 exsp. 24358,82

| | | |
|---|---|---|
| $8n$ . . . . . 3068 | 6078 | 12174 |
| $8n+4$ . . 3010 | | |
| $8n+2$ . . 3062 | 6096 | |
| $8n+6$ . . 3034 | | |
| $8n+1$ . . 3076 | 6102 | 12173 |
| $8n+5$ . . 3026 | | |
| $8n+3$ . . 3033 | 6071 | |
| $8n+7$ . . 3038 | | |

$7n$ . . . . . 115 . . 3411
$7n+1$ . . 115 . . 3009
$7n+2$ . . 114 . . 2975
$7n+4$ . . 114 . . 2993
$R7$ . . . 343 . . 8977
$7n+3$ . . 114 . . 3979
$7n+5$ . . 114 . . 3998
$7n+6$ . . 114 . . 3982
$N7$ . . . 342 . 11959

Classes impr. 4049
Propriae cum impropriis
28396 exsp. 28418,62

## Octingenti det. neg.

formae $-(15n+13)$

| | | |
|---|---|---|
| **G. I** | . . . . . (91) . . . . . . | (2561) |
| 3 | 43. 163 . . . . . . . . . . | 2 |
| 5 | 103 . . . . . . . . . . . . | 1 |
| 7 | 223. 343. 463 . . . . . . . | 3 |
| 9 | 283. 643. 823. 883. 1423 . | 5 |
| 11 | 1303 . . . . . . . . . . . . | 1 |
| 13 | 2143 . . . . . . . . . . . . | 1 |
| 15 | 523. 1123. 1723. 2203. 2683 . . . . . . . . . . . . | 5 |
| 17 | 1663. 1783 . . . . . . . . . | 2 |
| 19 | 1063. 1543. 3343. 3463 . . | 4 |
| 21 | 1483. 2083. 2503. 4603. 5923 . . . . . . . . . . . . | 5 |
| 23 | 4783. 6703 . . . . . . . . . | 2 |
| 25 | 5023. 5503 . . . . . . . . . | 2 |
| 27 | 2803. 3163. 3643. 3943. 4243. 4363. 4483. 4723. 4903. 5443 (*3*). 6043. 6763. 6883. 7723 (*3*). 8563. 8803 (*3*). 11383 . | 17 |
| 29 | 2383. 3583. 3823. 5743. 8863 . . . . . . . . . . . . | 5 |
| 31 | 11863 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 33 | 4423. 4663. 5623. 5683. 6163. 6343. 6823. 7603. 8443. 9283. 9403. 9643 . . | 12 |
| 35 | 11503 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 39 | 4003. 7243. 7963. 11743. 11923 . . . . . . . . . . . | 5 |
| 41 | 10903 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 43 | 8263 . . . . . . . . . . . . | 1 |
| 45 | 5323. 5563 (*3*). 9043. 9463. 10243. 10663. 10723 (*3*). 11083 . . . . | 8 |
| 51 | 8623. 9343. 9883. 10303. 11443 . . . . . . . . . . . . | 5 |
| 57 | 8923. 9103 . . . . . . . . . | 2 |
| **G. II** | . . . . (340) . . . . . | (10110) |
| 1 | 13. 28. 58 . . . . . . . . | 3 |
| 2 | 73. 148. 193 . . . . . . . | 3 |
| 3 | 118. 268. 298. 358. 403 . | 5 |
| 4 | 178. 313. 388. 478. 583 . | 5 |
| 5 | 373. 508. 538. 613. 853. 1093. 1213. 1318 . . . . . | 8 |
| 6 | 433. 628. 673. 718. 763. 898. 1003. 1033. 1108. 1138. 1198. 1243. 1588. 1618. 1873 . . . . . . . . | 15 |
| 7 | 703. 733. 778. 838. 1183. 1453. 1948. 2293 . . . . . | 8 |
| 8 | 943. 958. 1153. 1348. 1438. 1828. 2113. 2308. 2578. 2878 . . . . . . . . | 10 |
| 9 | 1018. 1228 (*3*). 1363. 1468. 1603. 1843. 1933. 1963. 2023. 2038. 2053. 2188. 2443. 2458. 2563 (*3*). 2923. 2998. 3238. 3523. 3628. 3733. 3763. 4348. 4678. 5413 . . . . . . . . | 25 |
| 10 | 1678. 1753. 1858. 2473. 2638. 2743. 2818. 2983. 3028. 3103. 3118. 3508. 4153 . . . . . . . . . . . | 13 |
| 11 | 1693. 1903. 2263. 2623. 2863. 3418. 3703. 3868. 3958. 4918. 5098. 8023. 8143 . . . . . . . . . . . . | 13 |
| 12 | 1993. 2098. 2323. 2593. 2713. 2953. 3283. 3313. 3403. 3433. 3778. 3883. 4063. 4258. 4273. 4513. 4843. 5188. 5233. 5758. 5938. 6073. 6238. 8068 . | 24 |
| 13 | 2218. 2428. 2908. 3373. 3613. 3853. 3898. 4093. 4618. 4933. 5383. 5818. 5878. 6598. 7078. 8383. 8743. 10333. 10543 . . . . | 19 |
| 14 | 3673. 3988. 4078. 4183. 4468. 4948. 5218. 5263. 6103. 6388. 6658. 6673. 7438. 7753. 7858. 8233. 8353. 11113. 11278 . . . . | 19 |
| 15 | 2518. 3148. 3223. 4138. 4813. 5203. 5398. 5653. 5803. 6268. 6403. 6463. 6778. 6988. 7123. 7303. 7363. 7468. 7483. 8053. 8458. 8698. 9013. 9388. 10483. 10588. . . . . . . | 26 |
| 16 | 2833. 4993. 6178. 6628. 7183. 7393. 8548. 8578. 9433. 9508. 10558 . . . . | 11 |
| 17 | 3253. 4303. 5308. 5578. 7333. 7558. 8038. 9223. 9703 . . . . . . . . . . . . | 9 |
| 18 | 3043. 3793. 4963. 5458. 5998. 6283 (*3*). 6418. 6553. 6583 (*3*). 6793. 7543. 9298. 9523. 9583. 9748 (*3*). 10003. 10018. 10228. 10603. 10753. 10798 (*3*). 11698 . . . . | 22 |
| 19 | 5158. 5638. 6373. 6733. 7573. 7933. 8983. 9133. 10198. 11173 . . . . . . . | 10 |
| 20 | 3748. 5143. 6223. 6718. 6898. 7063. 7423. 8098. 8158. 9598. 10063- 10513. 10993. 11428. 11953 . . . | 15 |
| 21 | 4198. 6133. 6508. 6523. 7213. 7318. 7948. 7978. 8518. 9613. 9733. 9868. 10093. 10123. 10363. 10378. 10453. 10828. 11023. 11068. 11263. 11323. 11878 . . . . | 23 |
| 22 | 5113. 5953. 5983. 7663. 7783. 7873. 7903. 7993. 8713. 10273. 10708. 11668. 11758 . . . . . . . . . . . | 13 |
| 23 | 5788. 8278. 8293. 8893. 9973. 10423. 10618 . . . . | 7 |
| 24 | 4798. 6943. 7003. 7108. 8083. 8503. 8683. 8818. 9763. 10843. 10963. 11143. 11203. 11353. 11563 . . . . | 15 |
| 25 | 10783. 11548 . . . . . . . | 2 |
| 26 | 8788. 9778. 9838 . . . . . | 3 |
| 27 | 8203. 11683 (*3*) . . . . . | 2 |
| 28 | 9943. 10078. 11038. 11593 . | 4 |
| 29 | 9148 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 30 | 9358. 11623 . . . . . . . | 2 |
| 31 | 11983 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 32 | 10183. 10468 . . . . . . . | 2 |
| 33 | 11338 . . . . . . . . . . . | 1 |
| 40 | 11833 . . . . . . . . . . . | 1 |
| **G. IV** | . . . . (320) . . . . | (10088) |
| 1 | 88. 133. 253 . . . . . . . | 3 |
| 2 | 208. 238. 328. 418. 448. 553. 568. 598. 658. 793. 928 . . . . . . . . . . . . | 11 |
| 3 | 493. 688. 748. 808. 913. 973. 988. 1048. 1258. 1558. 1708. 1978. 2608 . | 13 |
| 4 | 868. 1078. 1168. 1393. 1408. 1498. 1513 (*2*). 1528. 1633. 1738. 1813. 1918 (*2*). 2248. 2353. 2368. 2533. 2773. 2788 (*2*). 2893. 3088. 3193. 3298. 3448 . . . . . . . . . . . | 23 |
| 5 | 1273. 1333. 1378. 1573. 1648. 1798. 2158. 2173. 2398. 3133. 3178. 3388. 3928. 3973. 4558. 4873 . | 16 |
| 6 | 1888. 2068. 2278. 2338. 2413. 2488. 2548. 2653. 2668. 2698. 2758. 2938. 3073. 3208. 3268. 3478. | |

## Determinantes negativi.

| in Cent. | Quotiens | |
|---|---|---|
| 1 | max. 1,271998 | ex det. 89 |
| | min. 0,2626128 | 58 |
| 2 | 1,435917 | 194 |
| | 0,2349782 | 163 |
| 22 | 1,685723 | 2141 |
| | 0,2808228 | 2143 |
| 23 | 1,645848 | 2246 |
| | 0,2923654 | 2293 |
| 24 | 1,479278 | 2369 |
| | 0,2897240 | 2335 |
| 27 | 1,6445315 | 2609 |
| | 0,2895883 | 2683 |
| 28 | 1,5527075 | 2789 |
| | 0,3030216 | 2788 |
| 29 | 1,5778996 | 2834 |
| | 0,2974718 | 2893 |
| 30 | 1,604748 | 2939 |
| | 0,2936893 | 2968 |
| 91 | 1,684117 | 9026 |
| | 0,2835515 | 9067 |
| 92 | 1,586777 | 9176 |
| | 0,2717044 | 9157 |
| 93 | 1,660820 | 9281 |
| | 0,2699414 | 9277 |
| 94 | 1,518533 | 9371 |
| | 0,2893063 | 9367 |
| 95 | 1,729662 | 9434 |
| | 0,3287980 | 9472 |
| 96 | 1,689400 | 9539 |
| | 0,3269906 | 9577 |
| 97 | 1,707014 | 9686 |
| | 0,2440986 | 9667 |
| 99 | 1,650848 | 9869 |
| | 0,2420048 | 9823 |
| 100 | 1,702214 | 9974 |
| | 0,2808862 | 9937 |
| 117 | 1,6654535 | 11681 |
| | 0,2964744 | 11650 |
| 118 | 1,810938 | 11714 |
| | 0,294621 | 11797 |
| 119 | 1,579112 | 11864 |
| | 0,2846194 | 11863 |
| 120 | 1,5326965 | 11921 |
| | 0,3287433 | 11992 |

## Determinantes positivi.

Centas 1.

Excidunt determinantes quadrati 10.

G. I . . . . (12)
1 2. 5. 13.
17. 29. 41.
53. 61. 73.
89. 97
3 37

G. II . . . . (51)
1 3. 6. 7.
8. 10. 11.
12. 14. 18.
19. 20. 21.
22. 23. 26.
27. 28. 31.
32. 33. 38.
43. 44. 45.
46. 47. 50.
52. 54. 57.
58. 59. 62.
65. 67. 68.
69. 71. 74.
76. 77. 83.
85. 86. 92.
93. 94. 98.
2 34. 82
3 79

G. IV . . . (27)
1 15. 24. 30.
35. 39. 40.
42. 48. 51.
55. 56. 60.
63. 66. 70.
72. 75. 78.
80. 84. 87.
88. 90. 91.
95. 96. 99

Centas 2.

Excidunt 4.

G. I . . . . (11)
1 109. 113. 125.
137. 149. 157.
173. 181. 193
3 101. 197

G. II . . . . (41)
1 103. 106. 107.
108. 116. 117.
118. 122. 124.
127. 128. 129.
131. 133. 134.
139. 142. 151.
153. 158. 161.
162. 163. 164.
166. 167. 172.
174. 177. 179.
185. 188. 191.
199
2 145. 146. 178.
194
3 141. 148. 189

G. IV . . . (40)
1 102. 104. 105.
110. 111. 112.
114. 115. 119.
123. 126. 130.
132. 135. 136.
138. 140. 143.
147. 152. 154.
155. 156. 159.
160. 165. 170.
171. 175. 176.
180. 182. 183.
184. 186. 187.
190. 192. 198.
200

G. VIII . . . (4)
1 120. 150. 168.
195

Centas 3.

G. I
1 233. 241. 277.
281. 293
3 229. 257. 269

G. II
1 201. 202. 206.
211. 212. 213.
214. 217. 218.
229. 236. 237.
239. 242. 243.
244. 245. 249.
250. 251. 253.
261. 262. 263.
265. 268. 271.
278. 283. 284.
292. 297. 298
2 205. 221. 274
3 223. 226. 254.
291

G. IV
1 203. 204. 207.
215. 216. 222.
228. 230. 232.
234. 238. 246.
247. 248. 252.
258. 259. 260.
266. 267. 270.
272. 273. 275.
276. 279. 282.
285. 286. 287.
290. 294. 295.
296. 299. 300
2 219. 220. 224.
288
3 235

G. VIII
1 210. 231. 240.
255. 264. 280

## NACHLASS. DETERMINANTES POSITIVI.

### Centas 9.

**G. I . . . . . (7)**

| | |
|---|---|
| 1 | 809. 821. 853. 857. 881 |
| 3 | 829. 877 |

**G. II . . . . (32)**

| | |
|---|---|
| 1 | 801. 811. 823. 827. 833. 838. 844. 845. 849. 859. 862. 863. 865. 869. 873. 878. 883. 886. 887. 889. 893 |
| 2 | 802. 818. 866 |
| 3 | 813. 837. 839. 842. 892 |
| 5 | 817. |
| 6 | 898 |
| 14 | (841) |

**G. IV . . . . (52)**

| | |
|---|---|
| 1 | 803. 804. 805. 806. 807. 808. 810. 814. 815. 822. 824. 825. 826. 830. 831. 832. 834. 835. 836. 843 846. 847. 848. 850. 851. 852. 854. 856. 860. 861. 864. 867. 868. 871. 872. 875. 879. 882. 885 |
| 2 | 812. 820. 828. 876. 884. 890. 891. 896. 897 |
| 3 | 874. 894. 895. 899. |

**G. VIII . . . (8)**

| | |
|---|---|
| 1 | 816. 819. 855. 858. 888 |
| 2 | 870. 880. (900) |

**G. XVI . . . (1)**

| | |
|---|---|
| 1 | 840 |

### Centas 10.

**G. I . . . . (6) . . . . . (8)**

| | |
|---|---|
| 1 | 929. 937. 941. 953. 977 |
| 3 | 997 |

**G. II . . . (38) . . . . (130)**

| | |
|---|---|
| 1 | 907. 908. 911. 913. 917. 919. 921. 922. 926. 932. 947. 949. 956. 958. 964. 965. 967. 971. 972. 974. 981. 983. 989. 991. 998 |
| 2 | 914 |
| 3 | 905. 909. 916. 925. 933. 934. 973. 985. 993 |
| 5 | 982 |
| 6 | 901 |
| [15 | 961] |

**G. IV . . . . (40) . . . (224)**

| | |
|---|---|
| 1 | 902. 918. 923. 927. 928. 931. 938. 942. 944. 945. 946. 948. 950. 951. 954. 955. 957. 962. 968. 969. 970. 976. 978. 980. 986. 988. 995. 996. 999. 1000 |
| 2 | 939. 943. 959. 963. 979. 992 |
| 3 | 906. 940 |
| 4 | 904. 994 |

**G. VIII . . . (16) . . . (144)**

| | |
|---|---|
| 1 | 903. 912. 915. 920. 924. 930. 935. 936. 952. 966. 975. 984. 987. 990 |
| 2 | 910. 960 |

Summa 370

---

**G. I**

| | |
|---|---|
| 1 | 313. 317 |
| 3 | 349. 373. 389. 397. 557. 677. 701. 709. 733. 757. 761 |
| 5 | 401 |
| 7 | 577 |

**G. II**

| | |
|---|---|
| 1 | 301. 302. 307. 309. 311. 314. |
| 2 | 305 |
| 3 | 316. 321. 325. 326 |
| 5 | 727 |

**G. IV**

| | |
|---|---|
| 1 | 303. 304. 308. 310. 318. 319. 320. 327 |
| 2 | 306. 322. 323 |

**G. VIII**

| | |
|---|---|
| 1 | 312. 315 |

# TAFEL

ZUR

# CYKŁOTECHNIE.

## NACHLASS. ZERLEGBARE $aa+1$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 119 | 73.97 | 500 | 53.53.89 | 1341 | 73.109.113 | 3405 | 29.29.61.113 |
| 3 | 5 | 123 | 5.17.89 | 507 | 5.5.53.97 | 1385 | 41.149.157 | 3458 | 5.73.181.181 |
| 4 | 17 | 128 | 5.29.113 | 512 | 5.13.37.109 | 1393 | 5.5.197.197 | 3521 | 29.37.53.109 |
| 5 | 13 | 129 | 53.157 | 515 | 13.101.101 | 1407 | 5.5.17.17.137 | 3532 | 5.5.17.149.197 |
| 6 | 37 | 132 | 5.5.17.41 | 524 | 37.41.181 | 1432 | 5.5.5.5.17.193 | 3583 | 5.13.17.37.157 |
| 7 | 5.5 | 133 | 5.29.61 | 538 | 5.13.61.73 | 1433 | 5.29.73.97 | 3740 | 41.41.53.157 |
| 8 | 5.13 | 142 | 5.37.109 | 557 | 5.5.5.17.73 | 1467 | 5.29.41.181 | 3782 | 5.5.29.109.181 |
| 9 | 41 | 157 | 5.5.17.29 | 560 | 53.61.97 | 1477 | 5.13.97.173 | 3793 | 5.5.53.61.89 |
| 10 | 101 | 162 | 5.29.181 | 568 | 5.5.5.29.89 | 1560 | 17.37.53.73 | 3957 | 5.5.13.13.17.109 |
| 11 | 61 | 172 | 5.61.97 | 577 | 5.13.13.197 | 1567 | 5.41.53.113 | 4193 | 5.5.5.5.5.29.97 |
| 12 | 5.29 | 173 | 5.41.73 | 599 | 17.61.173 | 1568 | 5.5.5.13.17.89 | 4217 | 5.13.29.53.89 |
| 13 | 5.17 | 174 | 13.17.137 | 606 | 13.13.41.53 | 1597 | 5.37.61.113 | 4232 | 5.5.41.101.173 |
| 14 | 197 | 182 | 5.5.5.5.53 | 616 | 13.17.17.101 | 1607 | 5.5.13.29.137 | 4246 | 13.17.29.29.97 |
| 15 | 113 | 183 | 5.17.197 | 621 | 29.61.109 | 1636 | 17.29.61.89 | 4327 | 5.89.109.193 |
| 17 | 5.29 | 185 | 109.157 | 657 | 5.5.89.97 | 1744 | 137.149.149 | 4484 | 17.89.97.137 |
| 18 | 5.5.13 | 191 | 17.29.37 | 660 | 37.61.193 | 1772 | 5.17.17.41.53 | 4535 | 17.53.101.113 |
| 19 | 181 | 192 | 5.73.101 | 682 | 5.5.5.61.61 | 1818 | 5.5.5.137.193 | 4545 | 13.57.109.197 |
| 21 | 13.17 | 193 | 5.5.5.149 | 684 | 13.17.29.73 | 1823 | 5.17.113.173 | 4581 | 13.53.97.157 |
| 22 | 5.97 | 200 | 13.17.181 | 693 | 5.5.5.17.113 | 1832 | 5.5.17.53.149 | 4594 | 13.17.29.37.89 |
| 23 | 5.53 | 211 | 113.197 | 697 | 5.13.37.101 | 1893 | 5.5.13.37.149 | 4662 | 5.13.13.17.17.89 |
| 27 | 5.73 | 212 | 5.89.101 | 701 | 17.97.149 | 1918 | 5.5.37.41.97 | 4747 | 5.17.41.53.61 |
| 28 | 5.157 | 216 | 13.37.97 | 743 | 5.5.61.181 | 1929 | 13.13.101.109 | 4906 | 13.53.181.193 |
| 30 | 17.53 | 233 | 5.61.89 | 746 | 13.13.37.89 | 1955 | 13.29.37.137 | 4937 | 5.73.173.193 |
| 31 | 13.37 | 237 | 5.41.137 | 757 | 5.5.73.157 | 1984 | 13.29.53.197 | 4952 | 5.37.41.53.61 |
| 32 | 5.5.41 | 239 | 13.13.13.13 | 772 | 5.13.53.173 | 2010 | 13.17.101.181 | 5052 | 5.13.41.61.157 |
| 33 | 5.109 | 242 | 5.13.17.53 | 776 | 73.73.113 | 2013 | 5.29.89.157 | 5087 | 5.17.29.29.181 |
| 34 | 13.89 | 251 | 17.17.109 | 785 | 13.137.173 | 2018 | 5.5.29.41.137 | 5257 | 5.5.13.17.41.61 |
| 37 | 5.137 | 253 | 5.37.173 | 798 | 5.13.97.101 | 2042 | 5.29.149.193 | 5283 | 5.13.17.73.173 |
| 38 | 5.17.17 | 255 | 13.41.61 | 818 | 5.5.5.53.101 | 2059 | 13.41.41.97 | 5357 | 5.5.61.97.97 |
| 41 | 29.29 | 265 | 13.37.73 | 829 | 17.17.29.41 | 2153 | 5.13.181.197 | 5443 | 5.5.5.5.137.173 |
| 43 | 5.5.37 | 268 | 5.5.13.13.17 | 853 | 5.13.29.193 | 2163 | 5.13.17.29.73 | 5507 | 5.5.13.13.37.97 |
| 44 | 13.149 | 278 | 5.13.29.41 | 882 | 5.5.29.29.37 | 2191 | 89.149.181 | 5648 | 5.17.53.73.97 |
| 46 | 29.73 | 293 | 5.5.17.101 | 905 | 13.17.17.109 | 2309 | 13.53.53.73 | 5667 | 5.29.37.41.73 |
| 47 | 5.13.17 | 294 | 13.61.109 | 919 | 37.101.113 | 2350 | 17.17.97.197 | 5701 | 29.53.97.109 |
| 50 | 41.61 | 302 | 5.17.29.37 | 922 | 5.17.73.137 | 2428 | 5.41.149.193 | 5767 | 5.13.17.101.149 |
| 55 | 17.89 | 307 | 5.5.5.13.29 | 924 | 53.89.181 | 2436 | 13.13.13.37.73 | 5928 | 5.29.29.61.137 |
| 57 | 5.5.5.13 | 313 | 5.97.101 | 931 | 13.17.37.53 | 2515 | 101.173.181 | 5962 | 5.13.29.109.173 |
| 68 | 5.5.5.37 | 319 | 17.41.73 | 945 | 29.89.173 | 2540 | 13.29.109.157 | 6065 | 17.53.137.149 |
| 70 | 13.13.29 | 327 | 5.17.17.37 | 948 | 5.17.97.109 | 2547 | 5.37.89.197 | 6107 | 5.5.17.17.29.89 |
| 72 | 5.17.61 | 342 | 5.149.157 | 993 | 5.5.13.37.41 | 2621 | 13.37.37.193 | 6118 | 5.5.13.41.53.53 |
| 73 | 5.13.41 | 343 | 5.5.13.181 | 999 | 17.149.197 | 2673 | 5.13.17.53.61 | 6252 | 5.17.29.101.157 |
| 75 | 29.97 | 360 | 29.41.109 | 1032 | 5.5.13.29.113 | 2697 | 5.41.113.157 | 6481 | 17.37.173.193 |
| 76 | 53.109 | 378 | 5.17.41.41 | 1057 | 5.5.5.41.109 | 2738 | 5.13.29.41.97 | 6682 | 5.5.5.29.109.113 |
| 80 | 37.173 | 394 | 29.53.101 | 1067 | 5.17.37.181 | 2801 | 17.29.73.109 | 6898 | 5.13.17.17.17.149 |
| 81 | 17.193 | 401 | 37.41.53 | 1068 | 5.5.5.5.5.5.73 | 2818 | 5.5.5.17.37.101 | 6908 | 5.13.73.89.113 |
| 83 | 5.13.53 | 403 | 5.109.149 | 1087 | 5.13.61.149 | 2917 | 5.13.29.37.61 | 6943 | 5.5.5.29.61.109 |
| 91 | 41.101 | 408 | 5.13.13.197 | 1118 | 5.5.17.17.173 | 2943 | 5.5.5.5.13.13.41 | 6962 | 5.37.37.73.97 |
| 93 | 5.5.173 | 411 | 13.73.89 | 1123 | 5.13.89.109 | 3039 | 17.61.61.73 | 7093 | 5.5.13.17.29.157 |
| 98 | 5.17.113 | 437 | 5.13.13.113 | 1143 | 5.5.17.29.53 | 3112 | 5.13.13.73.157 | 7161 | 17.101.109.137 |
| 99 | 13.13.29 | 438 | 5.17.37.61 | 1148 | 5.29.61.149 | 3141 | 13.13.17.17.101 | 7443 | 5.5.5.37.53.113 |
| 100 | 73.137 | 443 | 5.5.5.5.157 | 1196 | 53.137.197 | 3149 | 17.29.89.113 | 7697 | 5.17.29.61.197 |
| 105 | 37.149 | 445 | 5.13.29.53 | 1228 | 5.17.113.157 | 3166 | 17.41.73.197 | 7782 | 5.5.13.17.97.113 |
| 111 | 61.101 | 463 | 5.13.17.97 | 1239 | 41.97.193 | 3207 | 5.5.29.41.173 | 8224 | 13.17.29.61.173 |
| 112 | 5.13.193 | 467 | 5.113.193 | 1270 | 61.137.193 | 3323 | 5.13.29.29.101 | 8307 | 5.5.5.5.5.61.181 |
| 117 | 5.37.37 | 499 | 13.61.157 | 1303 | 5.41.41.101 | 3362 | 5.13.17.53.193 | 8368 | 5.5.17.37.61.73 |

| | |
|---|---|
| 8393 | 5.5.13.29.37.101 |
| 8457 | 5.5.53.137.197 |
| 8578 | 5.37.41.89.109 |
| 9133 | 5.17.37.89.149 |
| 9152 | 5.29.41.73.193 |
| 9193 | 5.5.5.5.17.41.97 |
| 9298 | 5.41.53.73.109 |
| 9431 | 17.97.149.181 |
| 9466 | 29.37.37.37.61 |
| 9667 | 5.13.41.89.197 |
| 9703 | 5.13.13.17.29.113 |
| 9762 | 5.17.37.157.193 |
| 9872 | 5.13.13.29.41.97 |
| 9901 | 13.13.29.73.137 |
| 10298 | 5.17.61.113.181 |
| 10312 | 5.29.53.101.137 |
| 10833 | 5.17.41.113.149 |
| 11018 | 5.5.157.157.197 |
| 11471 | 13.17.41.53.137 |
| 11981 | 13.17.41.89.89 |
| 12332 | 5.5.13.41.101.113 |
| 12433 | 5.13.61.101.193 |
| 12882 | 5.5.17.37.61.173 |
| 12943 | 5.5.5.5.13.13.13.61 |
| 13043 | 5.5.17.17.61.193 |
| 13068 | 5.5.5.53.149.173 |
| 13241 | 29.101.173.173 |
| 13252 | 5.13.13.37.41.137 |
| 13545 | 17.17.53.53.113 |
| 13918 | 5.5.13.37.89.181 |
| 14140 | 17.29.37.97.113 |
| 14318 | 5.5.5.13.17.41.181 |
| 14573 | 5.17.73.109.157 |
| 14646 | 13.37.41.73.149 |
| 14773 | 5.13.13.29.61.73 |
| 14942 | 5.13.13.37.37.193 |
| 14998 | 5.13.101.173.197 |
| 15075 | 13.17.53.89.109 |
| 16513 | 5.29.53.113.157 |
| 16928 | 5.17.109.157.197 |
| 17191 | 13.17.61.97.113 |
| 17557 | 5.5.5.17.29.41.61 |
| 27766 | 13.17.73.89.101 |
| 17923 | 5.61.61.89.97 |
| 18258 | 5.29.97.137.173 |
| 18432 | 5.5.5.17.29.37.149 |
| 18543 | 5.5.13.17.29.29.37 |
| 19123 | 5.29.37.173.197 |
| 19283 | 5.37.37.157.173 |
| 19326 | 13.29.61.109.149 |
| 19534 | 13.13.13.29.53.113 |
| 19653 | 5.37.61.109.157 |
| 19703 | 5.13.13.29.89.89 |
| 29902 | 5.73.89.89.137 |
| 19911 | 13.17.29.157.197 |

| | |
|---|---|
| 20080 | 13.29.61.89.197 |
| 20457 | 5.5.13.29.149.149 |
| 21124 | 29.41.53.73.97 |
| 21705 | 13.17.61.101.173 |
| 21907 | 5.5.29.29.101.113 |
| 22008 | 5.41.109.149.197 |
| 22157 | 5.5.13.37.137.149 |
| 22231 | 29.37.41.41.137 |
| 24263 | 5.13.17.41.73.89 |
| 24331 | 13.17.89.101.149 |
| 24778 | 5.29.149.157.181 |
| 24816 | 17.17.61.181.193 |
| 25462 | 5.13.17.37.101.157 |
| 25523 | 5.53.73.113.149 |
| 25683 | 5.13.17.17.97.181 |
| 25793 | 5.5.17.29.137.197 |
| 25943 | 5.5.5.13.29.37.193 |
| 26018 | 5.5.13.97.109.197 |
| 27493 | 5.5.17.17.17.17.181 |
| 28205 | 13.29.73.97.149 |
| 28322 | 5.13.13.13.13.41.137 |
| 28862 | 5.17.17.53.73.149 |
| 29757 | 5.5.41.61.73.97 |
| 30027 | 5.29.89.181.193 |
| 30103 | 5.13.17.41.73.137 |
| 30383 | 5.17.17.37.89.97 |
| 31752 | 5.17.17.37.109.173 |
| 32258 | 5.13.37.41.61.173 |
| 32406 | 17.17.17.37.53.109 |
| 32807 | 5.5.5.13.61.61.89 |
| 32885 | 13.13.109.149.197 |
| 32973 | 5.13.37.37.41.149 |
| 33307 | 5.5.5.5.17.53.197 |
| 34208 | 5.13.13.17.29.53.53 |
| 34367 | 5.13.37.41.53.113 |
| 35857 | 5.5.17.61.137.181 |
| 36673 | 5.17.29.37.73.101 |
| 37057 | 5.5.5.5.73.101.149 |
| 37448 | 5.13.13.53.173.181 |
| 37770 | 13.17.29.41.61.89 |
| 38326 | 29.37.41.173.193 |
| 38807 | 5.5.5.17.37.61.157 |
| 39082 | 5.5.41.73.137.149 |
| 39307 | 5.5.5.13.13.13.29.97 |
| 39818 | 5.5.5.5.17.37.37.109 |
| 40188 | 5.13.37.61.101.109 |
| 40515 | 13.53.61.109.137 |
| 40568 | 5.5.5.13.53.97.197 |
| 41187 | 5.17.37.37.37.197 |
| 41319 | 13.41.101.101.157 |
| 41688 | 5.17.41.53.97.97 |
| 42658 | 5.13.13.97.149.149 |
| 42932 | 5.5.5.29.29.89.197 |
| 43633 | 5.13.29.41.109.113 |
| 43932 | 5.5.5.5.13.17.89.157 |

| | |
|---|---|
| 44179 | 13.13.13.17.17.29.53 |
| 44507 | 5.5.13.113.149.181 |
| 44733 | 5.89.101.113.197 |
| 45050 | 13.41.109.181.193 |
| 45068 | 5.5.5.41.61.73.89 |
| 46444 | 13.41.149.157.173 |
| 46617 | 5.53.137.173.173 |
| 47403 | 5.13.29.37.89.181 |
| 47783 | 5.13.17.53.101.193 |
| 48187 | 5.97.101.137.173 |
| 48737 | 5.29.29.53.73.73 |
| 49083 | 5.13.17.73.109.137 |
| 50052 | 5.17.41.41.89.197 |
| 51115 | 17.17.17.29.53.173 |
| 51387 | 5.17.37.53.89.89 |
| 51412 | 5.17.61.61.61.137 |
| 51917 | 5.13.37.53.97.109 |
| 52571 | 37.41.61.109.137 |
| 54193 | 5.5.5.5.5.41.73.157 |
| 54358 | 5.13.29.73.109.197 |
| 54507 | 5.5.37.53.157.193 |
| 57532 | 5.5.17.41.41.41.113 |
| 66347 | 5.13.13.17.37.41.101 |
| 67333 | 5.17.53.61.73.113 |
| 67852 | 5.13.37.89.137.157 |
| 68463 | 5.13.17.113.137.137 |
| 71564 | 37.61.97.149.157 |
| 71700 | 13.29.37.41.89.101 |
| 72662 | 5.13.17.29.37.61.73 |
| 74043 | 5.5.13.37.37.61.101 |
| 75382 | 5.5.13.17.73.73.193 |
| 78629 | 13.17.41.41.53.157 |
| 80593 | 5.5.17.17.17.137.193 |
| 80802 | 5.37.41.53.109.149 |
| 81241 | 13.61.137.157.193 |
| 81749 | 13.17.17.53.97.173 |
| 83071 | 37.61.89.89.193 |
| 83247 | 5.13.13.13.29.73.149 |
| 84141 | 13.29.29.41.53.149 |
| 85353 | 5.13.17.37.41.41.53 |
| 86143 | 5.5.13.17.61.101.109 |
| 88668 | 5.5.13.17.73.101.193 |
| 88699 | 29.53.89.149.193 |
| 88733 | 5.13.41.97.97.157 |
| 88868 | 5.5.29.37.37.73.109 |
| 89361 | 29.97.137.157.173 |
| 89471 | 13.13.41.41.73.193 |
| 90212 | 5.13.37.89.193.197 |
| 90657 | 5.5.13.17.61.89.137 |
| 93020 | 13.13.17.17.29.41.149 |
| 93197 | 5.37.53.53.61.137 |
| 99557 | 5.5.5.5.41.41.53.89 |
| 99893 | 5.5.29.181.193.197 |
| 101343 | 5.5.13.29.41.97.137 |
| 102163 | 5.37.41.41.97.173 |

| | |
|---|---|
| 104818 | 5.5.5.5.17.29.181.197 |
| 106242 | 5.53.53.73.101.109 |
| 109637 | 5.13.17.29.37.37.137 |
| 112595 | 17.29.41.53.61.97 |
| 112782 | 5.5.17.37.41.109.181 |
| 114669 | 17.37.53.53.61.61 |
| 117251 | 41.97.101.109.157 |
| 117307 | 5.5.5.13.149.157.181 |
| 117372 | 5.13.17.17.53.101.137 |
| 128482 | 5.5.17.29.89.101.149 |
| 129553 | 5.13.13.17.61.61.157 |
| 133749 | 13.13.37.53.137.197 |
| 136293 | 5.5.17.41.53.89.113 |
| 136404 | 13.17.29.97.173.173 |
| 137717 | 5.13.53.89.157.197 |
| 137883 | 5.13.17.29.29.53.193 |
| 141743 | 5.5.89.149.157.193 |
| 143382 | 5.5.13.13.17.17.113.149 |
| 145046 | 13.29.37.101.109.137 |
| 145231 | 13.37.37.41.97.149 |
| 148158 | 5.53.61.61.113.197 |
| 148582 | 5.5.13.53.73.97.181 |
| 150522 | 5.13.17.29.37.97.197 |
| 155317 | 5.41.61.73.73.181 |
| 157308 | 5.13.29.29.41.61.181 |
| 157318 | 5.5.5.5.5.5.13.37.37.89 |
| 159772 | 5.37.53.101.149.173 |
| 160590 | 29.29.89.89.109.109 |
| 161832 | 5.5.13.13.29.37.53.109 |
| 162014 | 13.17.73.89.101.181 |
| 173932 | 5.5.5.5.5.13.73.101.101 |
| 174118 | 5.5.17.41.89.113.173 |
| 177144 | 17.29.73.89.97.101 |
| 180107 | 5.5.13.29.97.113.157 |
| 181343 | 5.5.17.37.53.109.181 |
| 181743 | 5.5.17.17.73.173.181 |

## NACHLASS. ZERLEGBARE $aa+1$.

| | |
|---|---|
| 184133 | 5.29.73.101.101.157 |
| 189782 | 5.5.13.61.89.137.149 |
| 190393 | 5.5.13.13.137.173.181 |
| 191407 | 5.5.13.13.17.37.61.113 |
| 191807 | 5.5.5.13.17.41.109.149 |
| 194708 | 5.5.29.41.73.101.173 |
| 201106 | 17.17.61.89.149.173 |
| 208048 | 5.53.89.109.113.149 |
| 210195 | 61.113.137.149.157 |
| 210943 | 5.5.5.13.37.37.73.137 |
| 211765 | 13.17.53.89.137.157 |
| 216676 | 13.29.41.97.173.181 |
| 219602 | 5.17.17.53.53.109.109 |
| 221382 | 5.5.13.73.101.113.181 |
| 228068 | 5.5.5.17.29.61.101.137 |
| 232643 | 5.5.13.13.13.41.61.197 |
| 236151 | 17.17.41.89.137.193 |
| 247643 | 5.5.17.29.73.173.197 |
| 249501 | 13.53.53.61.89.157 |
| 251103 | 5.13.17.17.89.109.173 |
| 256638 | 5.13.29.37.61.113.137 |
| 260359 | 13.13.17.41.53.61.89 |
| 262433 | 5.17.29.29.53.61.149 |
| 263317 | 5.17.17.17.89.101.157 |
| 263557 | 5.5.5.13.37.41.73.193 |
| 265842 | 5.13.17.17.101.193.193 |
| 267657 | 5.5.41.41.61.89.157 |
| 281897 | 5.13.29.37.37.89.173 |
| 286018 | 5.5.13.13.53.53.61.113 |
| 287228 | 5.17.17.29.73.149.181 |
| 289038 | 5.17.17.37.89.97.181 |
| 292362 | 5.13.17.41.61.157.197 |
| 298307 | 5.5.5.5.41.53.181.181 |
| 307939 | 13.29.61.101.137.149 |
| 309070 | 13.29.101.113.149.149 |
| 320078 | 5.13.41.61.73.89.97 |
| 322392 | 5.13.17.41.89.149.173 |
| 330182 | 5.5.5.5.5.13.29.37.41.61 |
| 331068 | 5.5.5.5.53.101.181.181 |
| 383807 | 5.5.5.13.37.73.97.173 |
| 385692 | 5.13.17.61.89.137.181 |
| 389163 | 5.13.29.41.89.101.109 |
| 390112 | 5.13.17.17.17.17.17.17.97 |
| 403639 | 29.29.37.97.137.197 |
| 409557 | 5.5.5.5.13.13.73.73.149 |
| 411787 | 5.17.17.53.97.101.113 |
| 418048 | 5.97.97.109.173.197 |
| 444753 | 5.53.109.113.157.193 |
| 447342 | 5.17.29.41.97.137.149 |
| 464307 | 5.5.5.29.37.73.101.109 |
| 465525 | 13.13.29.89.97.113.197 |
| 465694 | 13.13.17.29.73.181.197 |
| 478707 | 5.5.13.13.13.17.41.41.73 |
| 485298 | 5.13.13.13.13.29.29.37.53 |
| 494607 | 5.5.29.89.101.137.137 |
| 500150 | 41.61.73.73.137.137 |
| 508929 | 13.13.37.53.53.73.101 |
| 518734 | 13.17.37.37.53.97.173 |
| 520463 | 5.13.41.61.73.101.113 |
| 534568 | 5.5.5.13.89.89.149.149 |
| 538275 | 17.61.73.97.109.181 |
| 548630 | 37.41.89.109.113.181 |
| 566793 | 5.5.17.29.29.41.97.113 |
| 567923 | 5.13.17.17.17.41.109.113 |
| 571459 | 13.13.13.13.17.37.61.149 |
| 586455 | 29.41.73.89.113.197 |
| 606325 | 13.37.97.137.149.193 |
| 607533 | 5.17.29.73.97.97.109 |
| 617427 | 5.13.13.17.29.53.89.97 |
| 623888 | 5.13.37.41.113.181.193 |
| 627391 | 41.41.53.113.113.173 |
| 662843 | 5.5.17.113.137.173.193 |
| 672717 | 5.89.97.157.173.193 |
| 683982 | 5.5.17.29.61.61.101.101 |
| 700107 | 5.5.13.17.41.53.137.149 |
| 703175 | 13.17.17.29.97.149.157 |
| 704683 | 5.13.29.61.97.113.197 |
| 721068 | 5.5.5.5.17.29.109.113.137 |
| 780262 | 5.17.17.29.37.41.61.157 |
| 783568 | 5.5.5.5.17.29.101.109.181 |
| 791532 | 5.5.53.89.149.181.197 |
| 793921 | 17.17.17.29.73.157.193 |
| 812447 | 5.29.29.41.89.137.157 |
| 832902 | 5.13.13.13.17.109.173.197 |
| 848871 | 29.53.73.113.157.181 |
| 899168 | 5.5.17.37.53.73.97.137 |
| 907567 | 5.29.37.41.89.109.193 |
| 911111 | 17.41.101.173.173.197 |
| 936513 | 5.37.37.41.89.97.181 |
| 1000193 | 5.5.5.29.53.101.149.173 |
| 1010027 | 5.13.61.89.89.109.149 |
| 1024240 | 37.61.109.157.157.173 |
| 1031675 | 13.13.17.53.73.113.157.197 |
| 1049433 | 5.13.61.89.89.89.197 |
| 1059193 | 5.5.5.5.13.13.13.37.61.181 |
| 1067157 | 5.5.41.113.157.173.181 |
| 1068182 | 5.5.5.17.17.41.61.73.173 |
| 1083493 | 5.5.13.61.61.61.73.109 |
| 1089593 | 5.5.61.89.149.149.197 |
| 1131527 | 5.41.53.53.73.97.157 |
| 1139557 | 5.5.5.5.5.5.5.17.37.73.181 |
| 1143007 | 5.5.13.41.61.73.101.109 |
| 1197943 | 5.5.5.5.5.17.17.37.109.197 |
| 1264557 | 5.5.5.5.5.13.13.29.53.197 |
| 1306143 | 5.5.29.37.37.61.73.193 |
| 1351742 | 5.17.53.109.137.157.173 |
| 1373307 | 5.5.5.5.17.29.101.157.193 |
| 1387203 | 5.29.41.41.113.181.193 |
| 1402232 | 5.5.17.37.41.113.137.197 |
| 1413443 | 5.5.13.29.37.41.89.157 |
| 1477034 | 37.37.41.53.53.101.137 |
| 1518057 | 5.5.5.13.13.41.61.113.193 |
| 1528649 | 13.37.53.61.61.109.113 |
| 1615463 | 5.13.17.37.53.73.73.113 |
| 1618855 | 17.29.37.53.89.97.157 |
| 1635786 | 29.29.41.89.89.97.101 |
| 1664957 | 5.5.13.37.73.89.113.157 |
| 1750507 | 5.5.13.53.53.89.109.173 |
| 1766693 | 5.5.5.5.5.5.29.97.157.173 |
| 1824257 | 5.5.17.29.97.109.113.113 |
| 1909461 | 13.13.17.17.41.53.89.193 |
| 1954207 | 5.5.13.61.61.89.113.157 |
| 1984933 | 5.17.37.37.37.53.89.97 |
| 2036069 | 17.41.41.61.61.101.193 |
| 2050706 | 13.17.17.17.41.53.157.193 |
| 2052057 | 5.5.5.5.5.5.5.17.29.73.97.193 |
| 2126007 | 5.5.17.29.29.181.181.193 |
| 2277387 | 5.13.29.29.53.89.89.113 |
| 2298668 | 5.5.13.13.13.17.29.37.37.109 |
| 2343692 | 5.17.41.41.61.73.89.97 |
| 2353918 | 5.5.13.17.29.29.61.113.173 |
| 2379723 | 5.13.29.37.53.53.97.149 |
| 2457057 | 5.5.5.5.13.17.41.53.89.113 |
| 2471717 | 5.37.41.109.137.149.181 |
| 2475918 | 5.5.17.53.61.157.157.181 |
| 2478328 | 5.13.29.37.89.97.101.101 |
| 2484968 | 5.5.13.61.97.113.157.181 |
| 2680168 | 5.5.29.61.73.109.137.149 |
| 2733307 | 5.5.5.5.5.5.13.13.13.17.37.173 |
| 2809305 | 13.17.29.37.37.61.73.101 |
| 2923783 | 5.13.17.37.41.109.149.157 |
| 2959007 | 5.5.17.37.97.101.157.181 |
| 3014557 | 5.5.5.5.5.5.5.5.41.53.53.101 |
| 3025001 | 13.13.17.17.61.73.109.193 |
| 3136570 | 13.13.29.37.53.61.97.173 |
| 3139557 | 5.5.5.5.5.5.13.29.73.73.157 |
| 3272693 | 5.5.5.13.37.41.101.137.157 |
| 3370437 | 5.13.13.13.13.41.73.97.137 |
| 3449051 | 13.13.13.53.61.89.97.97 |
| 3637197 | 5.13.17.29.61.89.193.197 |
| 3800438 | 5.13.29.29.97.101.149.181 |
| 3801448 | 5.29.37.53.61.73.101.113 |
| 3815076 | 13.13.17.37.53.109.157.173 |
| 3894873 | 5.13.13.37.89.101.137.197 |
| 3911450 | 29.29.41.97.137.173.193 |
| 3931663 | 5.13.29.37.41.109.137.181 |
| 4000300 | 13.13.13.17.17.73.137.181.181 |
| 4079486 | 13.17.17.53.61.73.137.137 |
| 4218932 | 5.5.5.5.29.41.41.61.61.157 |
| 4466678 | 5.13.17.73.97.109.149.157 |
| 4650839 | 17.17.89.113.137.157.173 |
| 4697282 | 5.5.13.113.113.137.197.197 |
| 4751232 | 5.5.13.17.29.73.97.101.197 |
| 4773557 | 5.5.5.29.29.41.113.149.157 |
| 5033696 | 13.17.37.37.89.89.97.109 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5982670 | 13.13.13.17.41.53.53.53.157 | 23747457 | 5.5.17.17.17.17.17.17.37.73.173 |
| 6151956 | 13.17.29.29.73.97.113.149 | 24208144 | 29.29.29.37.37.53.61.61.89 |
| 6208047 | 5.17.17.17.17.29.41.41.197.197 | 24280807 | 5.5.5.5.13.13.17.53.109.157.181 |
| 6225244 | 29.37.41.53.53.53.61.97 | 24310918 | 5.5.13.13.37.41.53.89.113.173 |
| 6315768 | 5.5.17.17.53.61.73.149.157 | 31011557 | 5.5.5.13.17.61.97.109.137.197 |
| 6356150 | 13.29.37.37.61.61.109.193 | 32944452 | 5.13.13.29.29.41.53.53.89.149 |
| 6367252 | 5.13.17.29.29.61.73.97.101 | 34436768 | 5.5.17.61.97.101.137.173.197 |
| 6656382 | 5.5.13.29.41.41.137.137.149 | 34602875 | 13.17.17.29.37.53.113.137.181 |
| 6817837 | 5.17.17.53.61.149.173.193 | 45500682 | 5.5.5.37.53.53.61.89.149.197 |
| 6829610 | 13.17.17.53.61.101.193.197 | 53365057 | 5.5.5.13.37.89.97.101.157.173 |
| 6981694 | 13.41.97.137.181.193.197 | 58305593 | 5.5.13.17.37.37.101.109.137.149 |
| 7138478 | 5.29.37.41.73.89.181.197 | 75505943 | 5.5.5.37.37.53.89.137.149.173 |
| 7620661 | 5.17.37.73.101.101.137.181 | 95665578 | 5.13.37.41.73.181.181.197.197 |
| 7691443 | 5.5.5.37.53.97.101.109.113 | 111530944 | 13.13.13.13.13.17.37.37.53.157.173 |
| 8082212 | 5.13.17.17.37.53.97.101.181 | 121042733 | 5.17.41.73.97.97.101.157.193 |
| 8571779 | 13.13.29.41.73.101.137.181 | 160007778 | 5.13.13.17.17.29.29.73.73.149.157 |
| 8809432 | 5.5.5.13.89.101.149.181.197 | 167207057 | 5.5.5.5.17.17.17.29.73.109.109.181 |
| 9407318 | 5.5.5.5.5.5.37.41.53.73.193 | 168623905 | 13.13.13.13.17.29.29.37.89.97.109 |
| 9548768 | 5.5.13.13.17.41.53.61.61.157 | 185507821 | 13.13.17.29.29.53.61.101.113.193 |
| 9614382 | 5.5.29.37.53.61.61.101.173 | 193788912 | 5.13.17.17.37.37.37.53.73.101.101 |
| 9639557 | 5.5.5.5.5.5.13.17.17.53.109.137 | 201229582 | 5.5.13.13.17.17.17.17.17.53.97.101 |
| 9689961 | 13.29.29.37.61.113.113.149 | 211829957 | 5.5.17.17.53.101.137.149.157.181 |
| 10328193 | 5.5.5.13.17.29.53.53.137.173 | 284862638 | 5.13.17.17.17.17.29.29.41.41.97.109 |
| 10669731 | 17.89.97.101.101.193.197 | 299152491 | 13.29.37.97.109.109.113.157 |
| 11131086 | 13.13.17.17.37.61.73.89.173 | 317742693 | 5.5.5.13.29.41.73.89.137.149.197 |
| 12477035 | 17.17.17.29.29.29.37.97.181 | 327012132 | 5.5.13.17.17.29.89.109.149.157.173 |
| 12514913 | 5.13.41.53.137.149.157.173 | 599832943 | 5.5.5.5.13.17.29.37.37.41.73.97.113 |
| 12750353 | 5.13.17.17.41.61.73.137.173 | 830426722 | 5.13.13.61.97.149.157.173.173.197 |
| 14698000 | 13.13.17.17.29.61.97.149.173 | 1112115023 | 5.17.17.61.73.113.157.173.173.181 |
| 15165445 | 5.5.5.5.37.53.61.97.101.157 | 1282794079 | 13.17.29.29.73.89.97.113.181.197.197 |
| 15986082 | 5.5.13.17.109.109.137.157.181 | 2189376182 | 5.5.5.17.17.29.29.53.61.61.89.89.101 |
| 16917267 | 5.13.17.17.61.61.101.109.173 | 2971354088 | 5.5.13.17.29.41.53.53.113.149.157.181 |
| 18378313 | 5.13.13.17.37.61.137.193.197 | 3955080927 | 5.13.17.17.17.17.53.53.61.61.101.149.173.197 |
| 18975991 | 13.17.17.17.53.61.89.97.101 | 8193535810 | 13.13.29.29.61.109.109.137.157.157.193 |
| 20198495 | 13.17.41.89.101.101.137.181 | 14033378718 | 5.5.13.13.17.17.61.61.61.61.73.73.157.181 |
| 22866693 | 5.5.5.5.41.61.73.101.113.197 | | |

| | |
|---|---|
| 5 | 2. 3. 7 |
| 13 | 5. 8. 18. 57. 239 |
| 17 | 4. 13. 21. 38. 47. 268 |
| 29 | 12. 17. 41. 70. 99. 157. 307 |
| 37 | 6. 31. 43. 68. 117. 191. 302. 327. 882. 18543° |
| 41 | 9. 32. 73. 132. 278. 378. 829. 993. 2943 |
| 53 | 23. 30. 83. 182. 242. 401. 447. 606. 931. 1143°. 1772. 6118. 34208. 44179. 85353. 485298 |
| 61 | 11. 50. 72. 133. 255. 438. 682. 2673. 2917. 4747°. 4952. 5257. 9466. 12943. 17557. 114669. 330182 |
| 73 | 27. 46. 173. 265. 319. 538. 557. 684. 1068. 1560°. 2163. 2309. 2436. 3039. 5667. 8368. 14773. 48737. 72662. 478707° |
| 89 | 34. 55. 123. 233. 411. 500. 568. 746. 1568. 1636°. 3793. 4217. 4594. 4662. 6107. 11981. 19703. 24263. 32807. 37770°. 45068. 51387. 99557. 157318. 260359. 24208144 |
| 97 | 22. 75. 119. 172. 216. 463. 507. 560. 657. 1433°. 1918. 2059. 2738. 4193. 4246. 5357. 5507. 5648. 6962. 9193°. 9872. 17923. 21124. 29757. 30383. 39307. 41688. 112595. 320078. 390112°. 617427. 1984933. 2343692. 3449051. 6225244 |
| 101 | 10. 91. 111. 192. 212. 293. 313. 394. 515. 616°. 697. 798. 818. 1303. 2818. 3141. 3323. 8393. 17766. 36673°. 66347. 71700. 74043. 173932. 177144. 508929. 683982. 1635786. 2478328. 2809305°. 3014557. 6367252. 18975991. 193788911. 201229582. 2189376182 |
| 109 | 33. 76. 142. 251. 294. 360. 512. 621. 905. 948°. 1057. 1123. 1929. 2801. 3521. 3957. 5701. 6943. 8578. 9298°. |

15075. 32406. 39818. 40188. 51917. 86143. 88868. 106242. 160590. 161832*. 219602. 389163. 464307. 607533. 1083493. 1143007. 2298668. 5033696. 168623905. 284862638*

113 | 15. 98. 128. 437. 693. 776. 919. 1032. 1341. 1567*. 1597. 3149. 3405. 4535. 6682. 6908. 7443. 7782. 9703. 12332*. 13545. 14140. 17192. 19534. 21907. 34367. 43633. 57532. 67333. 136293*. 191407. 286018. 411787. 520463. 566793. 567923. 1528649. 1615463. 1824257. 2277387*. 2457057. 3801448. 7691443. 599832943

137 | 37. 100. 174. 237. 922. 1407. 1607. 1955. 2018. 4484*. 5928. 7161. 9901. 10312. 11471. 13252. 19902. 22231. 28322. 30103*. 40517. 49083. 51412. 52571. 68463. 90657. 93197. 102343. 109637. 117372*. 145046. 210943. 228068. 256638. 494607. 500150. 721068. 899168. 1477034. 3370434*. 4079486. 9639557

149 | 44. 105. 193. 403. 702. 1087. 1148. 1744. 1832. 1893*. 5767. 6065. 6898. 9133. 10833. 14646. 18432. 19326. 20457. 22157*. 24331. 25523. 28205. 28862. 32973. 37057. 39082. 42658. 80802. 83247*. 84141. 93020. 128482. 143382. 145631. 189782. 191807. 208048. 262433. 307939*. 309070. 409557. 447342. 534568. 571459. 700107. 1010027. 2379723. 2680168. 6151956*. 6656382. 9689961. 32944452. 58305593

157 | 28. 129. 185. 242. 443. 499. 757. 1228. 1385. 2013*. 2540. 2697. 3112. 3583. 3740. 4581. 5052. 6252. 7093. 14573*. 16513. 19653. 22008. 25462. 38807. 41319. 43932. 54193. 67852. 71564*. 78629. 88733. 117251. 129553. 180107. 184133. 210195. 211765. 249503. 263317*. 267657. 703175. 780262. 812447. 1131527. 1413443. 1618855. 1664957. 1954207. 2923783*. 5139557. 3272693. 4218932. 4466678. 4773557. 5982670. 6315768. 9548768. 15165443. 16000778*. 299252491

173 | 80. 93. 253. 599. 772. 785. 945. 1118. 1477. 1823*. 3207. 4232. 5283. 5443. 5962. 8224. 12882. 13068. 13241. 18258*. 19283. 21705. 31752. 32258. 46444. 46617. 48187. 51115. 81749. 89361*. 102163. 136404. 159772. 174118. 194718. 201106. 251103. 282897. 322392. 383807*. 518734. 627391. 1000193. 1024240. 1068182. 1351742. 1750507. 1766693. 2353918. 2733307*. 3136570. 3815076. 4650839. 9614382. 10328193. 11131086. 12514913. 12750353. 14698000. 16317267*. 23747457. 24310918. 53365057. 75505943. 111530944. 327012132

181 | 19. 162. 200. 343. 524. 743. 924. 1067. 1467. 2010*. 2191. 2515. 3458. 3782. 5087. 8307. 9431. 10298. 13918. 14318*. 24778. 25683. 27493. 35857. 37448. 44507. 47403. 112782. 117307. 148582*. 155317. 157308. 162014. 181343. 181743. 190393. 216676. 221382. 287228. 289038*. 298307. 331068. 385692. 538275. 548630. 783568. 848871. 936523. 1059193. 1067157*. 1139557. 2471717. 2475918. 2484968. 2959007. 3800438. 3931663. 4000300. 7620662. 8082212*. 8571779. 12477035. 15986092. 20198495. 24280807. 34602875. 167207057. 211823957. 1112115023. 2971354082*. 14033378718

193 | 81. 112. 467. 660. 853. 1239. 1270. 1432. 1818. 2042*. 2428. 2621. 3362. 4327. 4906. 4937. 6481. 9152. 9762. 12433*. 13043. 14942. 24816. 25943. 30027. 28326. 45050. 47783. 54507. 75382*. 80593. 81141. 83071. 88668. 88699. 89471. 137883. 141743. 236151. 263557*. 265842. 444753. 606385. 623888. 662843. 672717. 793921. 907567. 1306143. 1373307*. 1387205. 1518057. 1909461. 2036069. 2050706. 2052057. 2126007. 3025001. 3911450. 6356159*. 6817837. 9407318. 121042733. 185507821. 8193535810

197 | 14. 183. 211. 408. 577. 999. 1196. 1393. 1984. 2153*. 2350. 2547. 3166. 3532. 4548. 7697. 8457. 9667. 11018. 14958*. 16928. 19123. 19911. 20080. 25793. 26018. 32885. 33307. 40568. 41187*. 42932. 44733. 50052. 54358. 90212. 99893. 104818. 133749. 137719. 148158*. 150522. 232643. 247643. 292362. 403639. 418048. 465525. 465694. 586455. 704683*. 791532. 832902. 911111. 1031675. 1049433. 1089593. 1197943. 1264557. 1402232. 3637197*. 3894873. 4697282. 4751232. 6208047. 6829610. 6981694. 7138478. 8809432. 10669731. 18378313*. 22866693. 32011557. 34436768. 45500682. 95665578. 317742693. 850426722. 1282794079. 3955080927

Zerlegbare $aa+4$.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 39 | 5.5.61 | 127 | 13.17.73 | 283 | 13.61.101 | 691 | 5.29.37.89 | 1159 | 5.37.53.137 |
| 3 | 13 | 43 | 17.109 | 141 | 5.41.97 | 309 | 5.13.13.113 | 705 | 13.13.17.173 | 1305 | 97.97.181 |
| 5 | 29 | 49 | 5.13.37 | 143 | 113.181 | 311 | 5.5.53.73 | 749 | 5.29.53.73 | 1351 | 5.17.109.197 |
| 7 | 53 | 53 | 29.97 | 161 | 5.5.17.61 | 335 | 13.89.97 | 759 | 5.29.29.137 | 1371 | 5.41.53.173 |
| 9 | 5.17 | 59 | 5.17.41 | 169 | 5.29.197 | 359 | 5.149.173 | 761 | 5.5.5.41.113 | 1381 | 5.13.13.37.61 |
| 11 | 5.5.5 | 61 | 5.5.149 | 179 | 5.13.17.29 | 393 | 13.109.109 | 829 | 5.13.97.109 | 1499 | 5.41.97.113 |
| 13 | 173 | 63 | 29.137 | 199 | 5.89.89 | 417 | 17.53.193 | 841 | 5.17.53.157 | 1581 | 5.41.89.137 |
| 19 | 5.73 | 81 | 5.13.101 | 205 | 13.53.61 | 419 | 5.13.37.73 | 943 | 17.17.17.181 | 1745 | 13.29.41.197 |
| 21 | 5.89 | 83 | 61.113 | 211 | 5.5.13.137 | 469 | 5.29.37.41 | 961 | 5.5.17.41.53 | 1801 | 5.37.89.197 |
| 23 | 13.41 | 99 | 5.37.53 | 213 | 17.17.157 | 485 | 17.101.137 | 1011 | 5.5.5.13.17.37 | 1899 | 5.37.101.193 |
| 25 | 17.37 | 101 | 5.13.157 | 219 | 5.53.181 | 527 | 29.61.157 | 1043 | 13.13.41.157 | 2025 | 13.29.73.149 |
| 29 | 5.13.13 | 111 | 5.5.17.29 | 237 | 13.29.149 | 535 | 17.113.149 | 1047 | 89.109.113 | 2343 | 13.37.101.113 |
| 31 | 5.193 | 121 | 5.29.101 | 247 | 17.37.97 | 611 | 5.5.109.137 | 1089 | 5.5.13.41.89 | 2355 | 17.41.73.109 |
| | | | | 261 | 5.5.5.5.109 | 679 | 5.13.41.173 | 1131 | 5.17.101.149 | 2441 | 5.13.29.29.109 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2677 | 17.17.137.181 | 29929 | 5.13.17.61.97.137 | 317039 | 5.5.53.61.89.89.157 |
| 3039 | 5.5.13.157.181 | 31351 | 5.37.149.181.197 | 326957 | 37.37.41.101.109.173 |
| 3339 | 5.5.41.73.149 | 32003 | 13.17.17.41.61.109 | 349835 | 17.41.73.97.137.181 |
| 3351 | 5.13.13.97.137 | 32139 | 5.5.13.17.73.197 | 355989 | 5.5.5.5.13.17.37.137.181 |
| 3377 | 13.61.73.197 | 32239 | 5.5.5.5.5.37.89.101 | 387921 | 5.61.101.137.181.197 |
| 3717 | 29.53.89.101 | 37579 | 5.17.29.41.89.157 | 396783 | 13.13.29.61.61.89.97 |
| 3749 | 5.17.37.41.109 | 44301 | 5.13.37.53.89.173 | 408489 | 5.5.5.5.13.29.73.89.109 |
| 4021 | 5.17.37.53.97 | 47389 | 5.5.53.97.101.173 | 466489 | 5.5.5.13.17.29.61.61.73 |
| 4123 | 17.29.29.29.41 | 47761 | 5.5.5.5.17.17.73.173 | 563235 | 13.17.41.61.61.97.97 |
| 4215 | 13.73.97.113 | 47829 | 5.17.37.41.113.157 | 567629 | 5.13.37.73.109.113.149 |
| 4761 | 5.5.5.13.13.29.37 | 49813 | 13.53.101.181.197 | 582997 | 37.41.73.113.157.173 |
| 4989 | 5.5.5.13.17.17.53 | 57989 | 5.5.5.53.53.61.157 | 588489 | 5.5.5.5.5.61.89.137.149 |
| 5041 | 5.13.13.17.29.61 | 63911 | 5.5.13.13.17.29.37.53 | 628261 | 5.5.5.13.17.29.41.61.197 |
| 5567 | 13.17.17.73.113 | 66361 | 5.5.41.113.193.197 | 634205 | 37.53.73.109.149.173 |
| 5573 | 29.61.97.181 | 79011 | 5.5.5.5.13.89.89.97 | 637855 | 13.37.41.41.61.73.113 |
| 5717 | 13.13.41.53.89 | 79871 | 5.29.37.61.101.193 | 834267 | 17.17.17.29.137.181.197 |
| 5821 | 5.13.37.73.193 | 81487 | 13.13.73.73.73.101 | 840421 | 5.13.17.197.149.173.181 |
| 6061 | 5.5.13.17.61.109 | 81669 | 5.13.29.113.173.181 | 851929 | 5.17.53.73.89.137.181 |
| 6261 | 5.5.5.53.61.97 | 86487 | 17.17.41.41.89.173 | 922769 | 5.13.13.17.41.61.137.173 |
| 6989 | 5.5.5.53.73.101 | 91587 | 17.29.29.37.101.157 | 966391 | 5.13.17.29.29.37.157.173 |
| 7319 | 5.17.73.89.97 | 95963 | 13.13.41.89.109.137 | 1029353 | 61.61.89.109.149.197 |
| 7745 | 13.13.37.53.181 | 99011 | 5.5.5.5.5.13.29.53.157 | 1169689 | 5.5.29.41.41.53.109.193 |
| 8049 | 5.17.53.73.197 | 99407 | 17.29.37.41.73.181 | 1230349 | 5.13.13.17.17.29.37.53.109 |
| 8579 | 5.29.53.61.157 | 108111 | 5.5.13.17.97.113.193 | 1299241 | 5.13.13.37.89.89.173.197 |
| 8879 | 5.29.41.89.149 | 110211 | 5.5.13.37.73.101.137 | 1341429 | 5.29.61.73.89.173.181 |
| 9801 | 5.17.73.113.137 | 114611 | 5.5.13.13.89.181.193 | 1362611 | 5.5.13.37.89.89.101.193 |
| 9817 | 17.37.37.41.101 | 115983 | 13.17.37.61.149.181 | 1493911 | 5.5.13.29.101.109.137.157 |
| 9947 | 73.89.97.157 | 117281 | 5.29.61.89.101.173 | 1499001 | 5.13.13.17.73.73.149.197 |
| 10039 | 5.5.13.17.17.29.37 | 128359 | 5.13.17.29.53.89.109 | 1780489 | 5.5.5.29.37.41.53.73.149 |
| 12383 | 37.109.193.197 | 139701 | 5.13.53.149.193.197 | 1996199 | 5.13.13.17.17.37.53.53.157 |
| 12605 | 17.37.41.61.101 | 140489 | 5.5.5.41.113.173.197 | 2028211 | 5.5.13.17.41.41.53.61.137 |
| 12815 | 13.13.41.137.173 | 140871 | 5.13.17.37.61.73.109 | 2050005 | 17.29.61.73.89.137.157 |
| 13251 | 5.17.101.113.181 | 142047 | 29.29.41.53.61.181 | 2159739 | 5.5.5.5.13.17.37.41.113.197 |
| 13489 | 5.5.5.5.5.5.5.17.137 | 148939 | 5.5.29.29.73.97.149 | 3376311 | 5.5.13.13.13.17.17.61.61.193 |
| 13507 | 17.17.41.89.173 | 183739 | 5.5.5.13.29.41.101.173 | 3666653 | 13.13.17.41.53.97.149.149 |
| 14261 | 5.5.5.89.101.181 | 191279 | 5.13.13.29.73.113.181 | 3872099 | 5.13.13.17.37.41.41.97.173 |
| 14901 | 5.13.13.13.17.29.41 | 203091 | 5.17.17.41.61.101.113 | 4370811 | 5.5.13.17.53.61.89.197 |
| 16041 | 5.73.89.89.89 | 205111 | 5.5.13.73.97.101.181 | 4490249 | 5.13.29.61.73.89.137.197 |
| 20511 | 5.5.5.13.17.97.157 | 206707 | 29.37.53.61.109.113 | 4705711 | 5.5.13.17.17.17.17.41.101.197 |
| 20769 | 5.29.37.37.41.53 | 207171 | 5.13.17.29.89.101.149 | 5125339 | 5.5.17.17.29.37.97.181.193 |
| 20875 | 13.29.53.113.193 | 211111 | 5.13.13.37.61.149.157 | 5472411 | 5.5.17.29.41.41.89.109.149 |
| 21139 | 5.5.17.37.157.181 | 228179 | 5.13.13.61.73.101.137 | 6101547 | 13.13.13.17.29.37.61.97.197 |
| 21161 | 5.5.13.89.113.137 | 234333 | 17.17.37.41.137.193 | 6489011 | 5.5.5.5.17.37.41.89.149.197 |
| 21189 | 5.5.37.61.73.109 | 234881 | 5.13.13.17.17.17.97.137 | 8175989 | 5.5.5.5.5.13.17.37.97.149.181 |
| 22805 | 13.17.89.137.193 | 241511 | 5.5.5.5.13.17.37.101.113 | 8644761 | 5.5.5.13.17.37.61.101.109.269 |
| 23311 | 5.5.29.41.101.181 | 244299 | 5.13.17.37.97.101.149 | 8812979 | 5.17.17.17.29.73.89.97.173 |
| 23901 | 5.29.137.149.193 | 245293 | 109.113.137.181.197 | 9530277 | 13.13.17.17.17.73.89.113.149 |
| 23915 | 13.29.73.113.173 | 247699 | 5.13.17.41.61.149.149 | 10126399 | 5.13.17.29.29.53.89.149.157 |
| 25689 | 5.5.29.41.149.149 | 257065 | 13.17.101.109.157.173 | 10251621 | 5.13.17.17.29.61.101.173.181 |
| 27355 | 13.37.53.149.197 | 263489 | 5.5.5.5.5.5.5.29.37.41.101 | 10763489 | 5.5.5.5.5.5.61.61.101.109.181 |
| 27411 | 5.5.41.61.61.197 | 269459 | 5.17.37.37.53.61.193 | 10831321 | 5.17.29.29.41.61.73.89.101 |
| 27429 | 5.17.29.37.73.113 | 289589 | 5.5.29.61.97.113.173 | 11398611 | 5.5.13.17.53.97.137.173.193 |
| 27611 | 5.5.41.61.89.137 | 302111 | 5.5.41.61.97.101.149 | 11483821 | 5.29.53.61.101.113.157.157 |
| 29169 | 5.13.29.41.101.109 | 306757 | 17.29.53.101.181.197 | 15035789 | 5.5.37.41.41.53.101.157.173 |
| 29691 | 5.17.17.29.109.193 | 313489 | 5.5.5.5.5.17.17.17.37.173 | 17363031 | 5.13.13.41.73.89.89.101.149 |

## NACHLASS. ZERLEGBARE $aa+4$ UND $aa+9$.

| | |
|---|---|
| 23866411 | 5.5 13.17.17.17.61.157.193.193 |
| 25252451 | 5.13.29.37.41.97.97.137.173 |
| 31456571 | 5.13.17.41.97.101.109.113.181 |
| 34411159 | 5.13.37.41.61.73.89.157.193 |
| 35272357 | 13.13.13.13.17.29.61.97.101.137 |
| 35944451 | 5.13.17.17.17.29.73.89.109.197 |
| 61017271 | 13.13.13.17.29.37.61.97.157 |
| 107402539 | 5.5.13.29.37.61.109.149.173.193 |
| 143828743 | 29.29.37.37.53.97.113.157.197 |
| 148757489 | 5.5.5.13.13.17.37.41.41.61.109.149 |
| 150446761 | 5.5.5.13.17.37.53.113.137.137.197 |
| 322564791 | 5.13.17.29.29.29.37.53.101.101.193 |
| 657182319 | 5.17.17.61 97.97.113.149.157.197 |
| 1359685525 | 13.17.53.61.61.97.113.157.157.157 |
| 4949475989 | 5.5.5.5.5.5.13.13.29.29.37.37.41.61.89.181 |
| 28608252345 | 13.29.29.29.37.53.61.73.97.113.149.181 |
| 112899039159 | 5.13.13.17.17.17.17.29.37.41.61.73 73.73.173 |

| | |
|---|---|
| 5 | 1. 11 |
| 13 | 3. 29 |
| 17 | 9 |
| 29 | 5. 111. 179 |
| 37 | 25. 49. 1011. 4761. 10039 |
| 41 | 23. 59. 469. 4123. 14901 |
| 53 | 7. 99. 961. 4989. 20769 63911 |
| 61 | 39. 61. 205 1381. 5041 |
| 73 | 19. 127. 311. 419. 749. 466489 |
| 89 | 21. 199. 691. 1089 5717. 16041 |
| 97 | 53. 141. 247. 335. 4021. 6261. 7319. 79011. 396783. 563235* |
| 101 | 81. 121. 283. 3717. 6989. 9817. 12605. 32239. 81487. 263489*. 10831321 |
| 109 | 43. 261. 393. 829. 2355. 2449. 3749. 6061. 21189. 29169*. 32003. 128359. 140871. 408489. 1230349. 8649761 |
| 113 | 83. 309. 761. 1047. 1499. 2343. 6567. 27429. 203091. 206707*. 244299. 637895 |
| 137 | 63. 211. 485. 611. 759. 1159. 1581. 3351. 9801. 13489*. 21161. 27611. 29929. 95963. 110211. 228179. 234881. 2028211. 35272357 |
| 149 | 61. 137. 535. 1131. 2025. 3339. 8879. 25689. 148939. 207171*. 244299. 247699 302111. 567629. 588489. 1780489. 3666653. 5472411. 9530277. 17363031*. 148757489 |
| 157 | 101. 213. 527. 841. 1043. 8579. 9947. 20511 37579. 47829*. 57989. 91587. 99011. 211221. 317039. 1493911. 1996199. 2050005. 6101547 10126399*. 11483821. 61017271, 1359685525 |
| 173 | 13. 359. 679. 705. 1371. 12815. 13507. 23915. 44301. 47389*. 47761. 86487. 117281. 183739. 257065. 289589. 313489. 326957. 582997. 634205*. 922769. 966391. 3872099 8812979. 15035789. 25252451. 112899039159 |
| 181 | 143. 219. 943. 1305. 2677. 3039. 5573. 7745. 13251. 14261*. 21139. 23311. 81669. 99407. 115983. 142047. 191279. 205111. 349835. 355989*. 840421. 851929. 1341429. 8175989. 10251621. 10763489. 31456571 4949475989. 28608252345. |
| 193 | 31. 417. 1899. 4215. 5821. 20875. 22805. 23901. 29691. 79871*. 108111. 114611. 234333. 269459. 1165689. 1362611. 3376311. 5125339. 11398611. 23866411*. 34411159. 107402539. 322564791 |
| 197 | 169. 1351. 1745. 1801. 3377. 8049. 12383. 27355. 27411. 31351*. 32139. 49813. 66361. 139701 140489. 245293. 306757 387921. 628261. 834267*. 1029353. 1299241. 1499001. 2159739. 4370811. 4490249. 4705711. 6489011. 35944451. 143828743*. 150446761. 657182319 |

Zerlegbare $aa+9$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 722 | 37.73.193 |
| 1 | 5 | 143 | 53.193 | 746 | 5.5.113.197 |
| 2 | 13 | 154 | 5.5.13.73 | 796 | 5.5.5.37.137 |
| 4 | 5.5 | 155 | 61.197 | 811 | 5.17.53.73 |
| 5 | 17 | 158 | 13.17.113 | 821 | 5 5.13.17.61 |
| 7 | 29 | 163 | 97.137 | 848 | 29.137.181 |
| 8 | 73 | 166 | 5.37.149 | 869 | 5.13.37.157 |
| 10 | 109 | 167 | 13.29.37 | 943 | 37.61.197 |
| 11 | 5.13 | 175 | 17.17.53 | 971 | 5.5.109.173 |
| 13 | 89 | 181 | 5.29.113 | 991 | 5.17.53.109 |
| 14 | 5.41 | 191 | 5.41.89 | 1015 | 17.157 193 |
| 16 | 5.53 | 196 | 5.5.29.53 | 1042 | 13.17.17.17.17 |
| 17 | 149 | 211 | 5.61.73 | 1055 | 13.13.37.89 |
| 19 | 5.37 | 232 | 13.41.101 | 1070 | 61.137.137 |
| 22 | 17.29 | 239 | 5.29.197 | 1081 | 5.13 89.101 |
| 26 | 5.137 | 241 | 5.37.157 | 1129 | 5.5.13.37.53 |
| 28 | 13.61 | 254 | 5.5.29.89 | 1144 | 5.17 89.173 |
| 29 | 5.5.17 | 271 | 5.5.13.113 | 1175 | 41.113.149 |
| 31 | 5.97 | 281 | 5.53.149 | 1259 | 5.13 89.137 |
| 37 | 13.53 | 284 | 5.13.17.73 | 1298 | 13 29.41.109 |
| 41 | 5.13.13 | 301 | 5.13.17.41 | 1309 | 5.53.53.61 |
| 46 | 5.5.5.17 | 314 | 5.13.37.41 | 1324 | 5.13.149.181 |
| 50 | 13.193 | 352 | 17.37.197 | 1421 | 5.5.5 41.197 |
| 55 | 37.41 | 379 | 5.5.13.13.17 | 1559 | 5.17.17.29.29 |
| 56 | 5.17.37 | 413 | 17.29.173 | 1618 | 97.137.197 |
| 65 | 29.73 | 419 | 5.97.181 | 1627 | 13.17.53.113 |
| 67 | 13.173 | 430 | 17.73.149 | 1646 | 5.5.29.37.101 |
| 68 | 41.113 | 436 | 5.193.197 | 1675 | 13.29.61.61 |
| 71 | 5.5.101 | 437 | 17.41.137 | 1687 | 73.101.193 |
| 73 | 17.157 | 446 | 5.5.73.109 | 1805 | 13.29.29.149 |
| 76 | 5.13.89 | 454 | 5.5.5.17.97 | 1831 | 5.13.17.37.41 |
| 79 | 5.5.5.5.5 | 464 | 5.17.17.149 | 1909 | 5.13.17 17.97 |
| 80 | 13.17.29 | 521 | 5.5.61.89. | 1979 | 5.5.29.37.73 |
| 89 | 5.13.61 | 529 | 5.5.29.193 | 2069 | 5.13.13.17.149 |
| 94 | 5.29.61 | 535 | 13.101.109 | 2184 | 13 29.73.173 |
| 106 | 5.13.173 | 544 | 5.13.29.157 | 2351 | 5.13 17.41.61 |
| 109 | 5.29.41 | 547 | 41.41.89 | 2528 | 17.41.53 173 |
| 119 | 5.13.109 | 574 | 5.13.37.137 | 2596 | 5 5.17.101.157 |
| 124 | 5.17.181 | 610 | 37.89.113 | 2719 | 5.13.29.37.53 |
| 128 | 13.13.97 | 629 | 5.5.41.193 | 2839 | 5.61.73.181 |
| 131 | 5.17.101 | 704 | 5.5.5.5.13.61 | 2953 | 13.17.109.181 |

| | |
|---|---|
| 3038 | 17.29.97.193 |
| 3089 | 5.17.37.37.41 |
| 3458 | 19.41.89.113 |
| 3496 | 5.5.37.73.181 |
| 3571 | 5.5.37.61.113 |
| 3677 | 13.13.13.17.181 |
| 4136 | 5.13.17.113.137 |
| 4171 | 5.5.5.13.53.101 |
| 4196 | 5.5.41.89.193 |
| 4237 | 37.41.61.97 |
| 4459 | 5.17.29.37.109 |
| 4489 | 5.53.193.197 |
| 4496 | 5.5.13.37.41.41 |
| 4565 | 13.41.113.173 |
| 4786 | 5.13.53.61.109 |
| 5029 | 5.5.13.13.41.73 |
| 5111 | 5.13.13.13.29.41 |
| 5125 | 37.37.53.181 |
| 5198 | 13.13.29.37.149 |
| 5401 | 5.17.19.61.97 |
| 5549 | 5.13.41.53.109 |
| 5579 | 5.5.5.13.61.157 |
| 5605 | 13.17.17.37.113 |
| 5911 | 5.5.5.17.73.113 |
| 6329 | 5.5.5.5.5.5.13.17.29 |
| 6346 | 5.5.13.17.37.197 |
| 6421 | 5.5.5.17.89.109 |
| 6494 | 5.37.37.61.101 |
| 6641 | 5.13.37.53.173 |
| 6821 | 5.5.53.97.181 |
| 7196 | 3.5.17.37.37.89 |
| 7171 | 5.5.17.37.41.41 |
| 7489 | 5.29.41.53.89 |
| 7616 | 5.13.53.113.1[illegible] |
| 7646 | 5.5.13.13.101.137 |
| 7729 | 5.5.97.109.113 |
| 7934 | 5.17.53.89.157 |
| 9650 | 29.113.157.181 |
| 10012 | 13.13.29.113.181 |
| 10154 | 5.5.17.41.61.97 |
| 10447 | 29.73.149.173 |
| 10736 | 5.13.97.101.181 |
| 11074 | 5.13.61.157.197 |
| 11671 | 5.5.5.41.97.137 |
| 11109 | 5.17.41.109.193 |
| 12191 | 5.37.41.97.101 |
| 13561 | 5.13.13.17.37.173 |
| 14029 | 5.5.13.19.53.197 |
| 15004 | 5.5.13.37.97.193 |
| 16096 | 5.5.13.13.13.53.89 |
| 16291 | 5.13.17.29.41.101 |
| 17029 | 5.5.17.41.53.157 |
| 17357 | 13.41.41.61.113 |
| 17668 | 17.19.37.109.157 |
| 18671 | 5.5.5.5.5.17.17.193 |

| | |
|---|---|
| 19504 | 5.5.17.89.89.113 |
| 20652 | 5.61.61.73.157 |
| 20813 | 17.37.53.73.89 |
| 22085 | 13.41.53.89.97 |
| 22367 | 17.17.37.149.157 |
| 22700 | 13.17.29.37.41.53 |
| 23425 | 19.19.41.73.109 |
| 23671 | 5.5.5.5.13.29.29.41 |
| 23879 | 5.5.13.61.73.197 |
| 24001 | 5.61.61.113.137 |
| 24311 | 5.53.61.101.181 |
| 25645 | 89.137.149.181 |
| 26141 | 5.13.17.37.61.137 |
| 27341 | 5.13.17.17.101.197 |
| 27731 | 5.13.29.37.37.149 |
| 17805 | 13.37.73.101.109 |
| 27844 | 5.13.13.13.13.61.89 |
| 28804 | 5.5.29.37.157.197 |
| 18973 | 17.41.73.73.113 |
| 30544 | 5.17.29.37.53.193 |
| 33619 | 5.5.13.89.113.173 |
| 34010 | 13.13.29.53.61.73 |
| 38608 | 13.41.137.137.149 |
| 39704 | 5.5.5.13.73.97.137 |
| 40030 | 17.41.97.137.173 |
| 40304 | 5.5.73.73.89.137 |
| 41173 | 29.29.89.109.109 |
| 42411 | 5.5.5.5.13.37.41.73 |
| 43864 | 5.13.37.89.89.101 |
| 47296 | 5.5.5.13.73.109.173 |
| 47335 | 13.29.89.173.193 |
| 48046 | 5.5.5.5.13.29.97.101 |
| 48829 | 5.5.5.5.17.29.53.73 |
| 49883 | 13.17.17.41.41.197 |
| 49924 | 5.17.41.73.97.101 |
| 54871 | 5.5.13.17.53.53.97 |
| 54926 | 5.37.41.41.89.109 |
| 55709 | 5.97.109.149.197 |
| 57701 | 5.37.41.41.53.101 |
| 57839 | 5.13.13.13.13.13.17.53 |
| 62402 | 13.17.17.89.97.157 |
| 66584 | 5.13.17.17.53.61.73 |
| 70171 | 5.5.5.17.17.173.181 |
| 71021 | 5.5.13.13.13.17.37.73 |
| 71176 | 5.17.61.89.101.109 |
| 71354 | 5.5.17.37.41.53.149 |
| 73971 | 13.17.29.53.89.181 |
| 78819 | 5.5.5.5.29.37.41.113 |
| 79051 | 5.13.13.37.37.37.73 |
| 84563 | 13.17.17.17.17.37.89 |
| 84818 | 17.29.29.61.73.113 |
| 86311 | 5.5.61.73.173.193 |
| 88411 | 5.13.37.73.113.197 |
| 95071 | 5.5.13.37.61.61.101 |
| 95188 | 13.13.13.17.41.61.97 |

| | |
|---|---|
| 105274 | 5.41.53.73.89.157 |
| 109179 | 5.5.29.37.41.61.89 |
| 109991 | 5.13.53.89.109.181 |
| 111171 | 5.5.5.17.109.157.173 |
| 114499 | 5.19.19.41.193.197 |
| 114896 | 5.5.13.41.61.109.149 |
| 115079 | 5.5.5.5.29.53.61.113 |
| 116881 | 5.13.53.73.157.173 |
| 117114 | 5.17.29.19.37.41.149 |
| 133513 | 17.29.41.53.53.157 |
| 134764 | 5.17.97.101.113.193 |
| 137659 | 5.13.37.137.149.193 |
| 141581 | 5.13.13.17.37.109.173 |
| 146794 | 5.13.41.41.53.61.61 |
| 147409 | 5.13.13.41.53.61.97 |
| 154679 | 5.5.29.37.41.73.149 |
| 154729 | 5.5.17.17.61.157.173 |
| 157454 | 5.5.5.13.37.41.89.113 |
| 167689 | 5.13.13.13.73.89.197 |
| 170107 | 13.17.17.19.37.37.97 |
| 174427 | 61.89.113.137.181 |
| 178336 | 5.13.13.41.[illegible].101.149 |
| 178988 | 17.37.37.75.109.173 |
| 180416 | 5.13.17.29.89.101.113 |
| 190021 | 5.5.17.41.53.113.173 |
| 190541 | 5.17.41.137.193.197 |
| 193546 | 5.5.5.13.13.97.101.181 |
| 193829 | 5.5.5.5.5.5.29.89.137 |
| 119754 | 5.5.13.17.17.53.89.109 |
| 249871 | 5.5.13.17.17.29.73.157 |
| 250250 | 37.41.53.61.113.113 |
| 252328 | 13.41.89.97.101.137 |
| 163681 | 5.13.13.37.101.1[illegible]1.109 |
| 265156 | 5.17.19.41.61.101.113 |
| 280750 | 13.13.17.61.61.73.101 |
| 286904 | 5.5.17.29.29.41.41.137 |
| 293687 | 17.37.61.73.89.173 |
| 311921 | 5.5.5.17.53.61.73.97 |
| 313454 | 5.5.5.13.13.13.13.13.29.73 |
| 314257 | 17.17.73.109.109.197 |
| 316739 | 5.17.37.41.73.73.73 |
| 324952 | 29.37.41.89.149.181 |
| 341569 | 5.17.29.29.53.89.173 |
| 347543 | 17.29.41.113.137.193 |
| 356809 | 5.13.19.37.41.113.197 |
| 377804 | 5.5.13.109.113.181.197 |
| 386711 | 13.19.109.109.173.193 |
| 393079 | 5.5.5.13.17.137.137.149 |
| 419815 | 17.37.37.109.173.197 |
| 419246 | 5.5.29.53.137.173.193 |
| 423475 | 17.41.89.89.109.149 |
| 448280 | 41.41.41.89.181.181 |
| 496004 | 5.5.13.17.37.41.149.197 |
| 522579 | 5.5.5.5.5.5.13.17.37.53.97 |
| 520921 | 5.5.5.13.53.97.109.149 |

| | |
|---|---|
| 524704 | 5.5.5.13.13.29.41.97.113 |
| 528967 | 17.29.101.109.149.173 |
| 539996 | 5.5.13.13.37.109.109.157 |
| 541829 | 5.5.5.13.17.29.41.41.109 |
| 550985 | 37.41.61.101.109.149 |
| 554279 | 5.5.13.13.37.61.89.181 |
| 599510 | 13.17.29.29.109.113.157 |
| 693775 | 17.17.17.41.97.109.113 |
| 700061 | 5.13.41.53.89.101.193 |
| 713291 | 5.17.29.29.29.41.41.73 |
| 744421 | 5.5.5.13.37.149.157.197 |
| 745249 | 5.13.13.29.29.53.73.101 |
| 791113 | 29.61.89.101.109.181 |
| 847319 | 5.17.37.73.101.113.137 |
| 859379 | 5.5.17.29.29.53.101.193 |
| 895208 | 13.17.17.17.29.41.61.173 |
| 895861 | 5.17.29.89.97.109.173 |
| 937766 | 5.13.17.19.41.53.73.173 |
| 947329 | 5.5.5.37.73.89.109.137 |
| 970454 | 5.5.5.37.73.97.149.193 |
| 984934 | 5.13.17.29.19.61.109.157 |
| 987406 | 5.17.53.73.101.149.197 |
| 1196173 | 53.89.97.101.113.137 |
| 1202704 | 5.5.5.17.17.37.61.113.157 |
| 1256084 | 5.13.17.29.53.61.97.157 |
| 1297090 | 13.29.37.41.109.137.197 |
| 1460288 | 13.13.13.17.29.101.101.193 |

| | |
|---|---|
| 1717025 | 13.29.41.53.73.157.157 |
| 1799921 | 5.5.5.5.5.17.29.37.157.181 |
| 1800254 | 5.5.17.37.97.101.109.193 |
| 2153956 | 5.17.101.101.157.173.197 |
| 2253046 | 5.5.5.5.5.29.41.53.149.173 |
| 2347195 | 17.29.41.53.137.137.137 |
| 2362579 | 5.5.5.5.5.5.5.13.29.37.197 |
| 2382560 | 13.29.37.101.113.181.197 |
| 2454779 | 5.5.13.41.73.109.157.181 |
| 2473954 | 5.5.5.13.17.17.29.41.97.113 |
| 2579296 | 5.5.5.5.17.29.41.61.89.97 |
| 2710934 | 5.17.17.17.37.41.53.61.61 |
| 2867521 | 5.5.17.61.73.101.137.157 |
| 2960596 | 5.5.13.17.41.53.73.73.137 |
| 3045079 | 5.5.5.5.13.17.17.101.113.173 |
| 3287839 | 5.17.17.17.29.53.53.73.73 |
| 3386888 | 13.13.17.29.37.137.157.173 |
| 3569269 | 5.13.29.41.53.89.101.173 |
| 4046132 | 5.13.17.29.89.101.157.181 |
| 4546271 | 5.5.13.17.41.53.53.109.149 |
| 4699704 | 5.5.5.13.61.73.113.137.197 |
| 4889605 | 37.41.53.61.73.173.193 |
| 8026096 | 5.5.17.37.37.89.101.109.113 |
| 8182343 | 17.17.29.41.73.73.101.181 |
| 8931226 | 5.37.53.61.89.89.113.149 |
| 9237421 | 5.5.5.5.5.13.17.17.29.29.29.149 |
| 9250762 | 41.89.97.101.101.137.173 |
| 10419736 | 5.13.13.29.37.73.101.109.149 |
| 21077571 | 5.5.13.13.41.109.113.149.193 |
| 12519856 | 5.13.37.37.41.53.61.97.137 |
| 13237028 | 17.29.37.41.61.149.149.173 |
| 13382956 | 5.13.17.29.29.37.137.193.197 |
| 14937769 | 5.13.17.37.53.61.61.101.137 |
| 19912579 | 5.5.5.5.5.13.41.41.97.173.173 |
| 20620229 | 5.5.37.37.61.73.73.97.197 |
| 22181629 | 5.5.13.13.13.17.29.37.41.53.113 |
| 25504986 | 5.13.13.13.29.29.29.41.53.73 |
| 25674911 | 5.13.29.37.41.73.89.113.157 |
| 26999399 | 5.13.13.29.37.97.109.193.197 |
| 33399844 | 5.17.27.29.37.37.41.73.73.89 |
| 33753059 | 5.13.13.41.89.97.101.109.173 |
| 34618846 | 5.5.13.13.13.17.17.37.97.109.193 |
| 34792409 | 5.13.13.13.17.29.41.101.137.197 |
| 40103726 | 5.17.37.41.109.109.197 |
| 41494546 | 5.5.5.13.61.61.89.109.149.197 |
| 48279454 | 5.5.5.5.13.29.41.41.41.61.181 |
| 60740461 | 5.13.17.17.17.41.73.97.101.197 |
| 64370954 | 5.5.5.13.17.37.53.61.73.89.193 |
| 96499349 | 5.13.17.29.37.41.61.73.137.157 |
| 105742171 | 5.5.5.13.17.29.29.37.41.41.53.73 |
| 110518796 | 5.5.5.13.37.53.53.61.73.109.149 |
| 111009121 | 5.5.13.17.17.37.37.37.73.113.157 |
| 113737804 | 5.5.13.13.29.29.53.73.89.97.109 |
| 117290203 | 17.29.37.41.53.73.109.113.193 |
| 149574656 | 5.29.41.61.73.137.173.181.197 |
| 163030454 | 5.5.5.13.13.17.37.37.53.73.89.157 |
| 165248573 | 15.29.37.41.73.97.109.157.197 |
| 178643779 | 5.5.13.41.41.61.113.137.157.197 |
| 200760094 | 5.13.17.17.37.37.37.41.53.101.193 |
| 323643829 | 5.5.5.5.5.5.5.13.13.17.37.61.73.73.97 |
| 401580454 | 5.5.5.23.53.61.73.73.97.137.137.193 |
| 478666540 | 17.27.29.37.41.61.73.149.157.173 |
| 1411168679 | 5.5.13.17.17.89.113.157.173.197.197 |

| | |
|---|---|
| 5 | 1. 4. 79 |
| 13 | 2. 11. 41 |
| 17 | 5. 29. 46. 379. 1042 |
| 29 | 7. 22. 80. 1559. 6329 |
| 37 | 19. 56. 167 |
| 41 | 14. 55. 109. 301. 314. 1831. 3089. 4496. 5111. 7271*. 25671 |
| 53 | 16. 37. 175. 196. 1129. 2719. 22700. 57839. |
| 61 | 28. 89. 94. 704. 821. 1309. 1675. 2351. 146794. 2710934* |
| 73 | 8. 65. 154. 211. 284. 811. 1979. 5029. 34010. 42421*. 48829. 66584. 71028. 79052. 513454. 516739. 713292. 3287839. 23504986. 105742171* |
| 89 | 12. 76. 191. 254. 521. 547. 1055. 7196. 7489. 16096*. 20813. 27844. 84563. 109279. 33399844 |
| 97 | 31. 128. 454. 1909. 4227. 5401. 10154. 22085. 54871. 95188*. 147409. 170107. 311921. 512579. 2579296. 523643829 |
| 101 | 71. 131. 232. 1081. 1646. 4171. 6494. 12191. 16291. 43864*. 48046. 49924. 57701. 95071. 280750. 745249 |
| 109 | 10. 119. 446. 535. 991. 1298. 4459. 4786. 5549. 6421*. 23425. 27805. 42173. 54926. 71276. 219754. 263681. 541829. 113737804 |
| 113 | 68. 158. 181. 271. 610. 1627. 3458. 3571. 5605. 5921*. 7729. 27357. 19504. 28973. 78829. 84818. 115079. 157454. 180416. 250250*. 265256. 524704. 693775. 2473954. 8026096. 22181629 |
| 157 | 26. 163. 437. 574. 796. 1070. 1299. 4136. 7646. 12671*. 24001. 26141. 39704. 40304. 293829. 252328. 286904. 847319. 947329. 1196175*. 2347195. 2960596. 12519856. 14937769 |
| 149 | 17. 166. 281. 430. 464. 1175. 1805. 2069. 5198. 7616*. 27731. 38608. 71354. 114896. 127114. 154679. 178336. 393079. 423475. 520921*. 550985. 4546271. 8931226. 9237421. 10419736. 110518796 |
| 257 | 73. 241. 544. 869. 2596. 5579. 7934. 17029. 17668. 20652*. 22367. 62402. 105274. 133523. 249871. 539996. 599510. 984934. 1202704. 1256084*. 1717025. 2867521. 25674911. 96499349. 111009121. 163030454 |
| 175 | 67. 106. 413. 972. 1244. 2182. 2528. 4565. 6641. 10447*. 13561. 33629. 40030. 47296. 112171. 116881. 241581. 154729. 178988. 190021*. 293687. 341569. 528967. 895208. 895861. 937766. 2253046. 3045079. 3386888. 3569269*. 9250762. 23237028. 19912579. 33753059. 478666540 |
| 181 | 124. 419. 848. 1324. 2839. 2953. 3496. 3677. 5125. 6821*. 9650. 16012. 10736. 24311. 25645. 70171. 73972. 109991. 174427. 195546*. 524952. 448280. 554279. 792113. 1799921. 2454779. 4046131. 8182343. 48279454 |
| 195 | 50. 143. 529. 629. 722. 1015. 1687. 5038. 4196. 12109*. 15004. 18671. 30544. 47335. 86221. 134764. 157659. 347543. 586722. 419246*. 700061. 859379. 970454. 1460288. 1800254. |

4889605. 11077571. 34618846. 64370954. 117290203*. 200760094. 401580454
197 | 155. 239. 352. 436. 746. 943. 1421. 1618. 4489. 6346*. 11074. 14029. 23879. 27341. 28804. 49883. 55709. 88411. 114499. 167689*. 190541. 314257. 356809. 377804. 415825. 496004. 744421. 987406. 1297090. 2153956*. 2362579. 2382560. 4699704. 13382956. 20620229. 26999399. 34792409. 40103726. 41494546. 60740461*. 149574656. 165242573. 178643779. 1411168679

Zerlegbare $aa+16$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 4897 | 5.5.5.5.17.37.61 | 40853 | 5.5.5.13.61.113.149 |
| 1 | 17 | 579 | 13.17.37.41 | 5337 | 5.13.17.149.173 | 41373 | 5.13.29.29.173.181 |
| 3 | 5.5 | 619 | 29.73.181 | 5473 | 5.17.53.61.109 | 44269 | 17.53.61.181.197 |
| 5 | 41 | 647 | 5.5.5.17.197 | 5635 | 13.13.13.97.149 | 44947 | 5.5.13.17.17.137.157 |
| 7 | 5.13 | 677 | 5.29.29.109 | 5897 | 5.5.5.29.53.181 | 45793 | 5.13.37.89.97.101 |
| 9 | 97 | 747 | 5.5.13.17.101 | 5921 | 13.89.157.193 | 52157 | 5.17.17.17.37.41.73 |
| 11 | 137 | 851 | 13.17.29.113 | 6051 | 13.17.29.29.197 | 52379 | 37.73.89.101.113 |
| 13 | 5.37 | 897 | 5.5.5.41.157 | 6081 | 37.53.109.173 | 52393 | 5.17.29.41.157.173 |
| 17 | 5.61 | 903 | 5.5.13.13.193 | 6427 | 5.17.53.53.173 | 57323 | 5.13.17.29.41.41.61 |
| 19 | 13.29 | 987 | 5.17.73.157 | 6605 | 61.73.97.101 | 57803 | 5.5.89.97.113.137 |
| 23 | 5.109 | 1021 | 13.17.53.89 | 6727 | 5.13.61.101.113 | 66333 | 5.13.17.17.29.41.197 |
| 27 | 5.149 | 1203 | 5.5.13.61.73 | 7345 | 17.89.181.197 | 67327 | 5.37.41.61.97.101 |
| 33 | 5.13.17 | 1237 | 5.29.61.173 | 7413 | 5.17.37.101.173 | 68215 | 37.61.101.137.149 |
| 35 | 17.73 | 1293 | 5.13.17.17.89 | 7547 | 5.5.13.13.13.17.61 | 69347 | 5.5.101.102.109.173 |
| 39 | 29.53 | 1353 | 5.5.5.5.29.101 | 7683 | 5.17.37.137.137 | 73467 | 5.29.41.89.101.101 |
| 45 | 13.157 | 1359 | 13.17.61.137 | 7703 | 5.5.13.41.61.73 | 74133 | 5.13.13.41.41.53.73 |
| 47 | 5.5.89 | 1463 | 5.13.13.17.149 | 7963 | 5.13.89.97.113 | 81413 | 5.13.29.29.29.37.113 |
| 53 | 5.5.113 | 1553 | 5.5.13.41.181 | 8141 | 73.89.101.101 | 82817 | 5.13.73.89.109.149 |
| 61 | 37.101 | 1717 | 5.41.73.197 | 8523 | 5.37.41.61.157 | 82893 | 5.17.37.73.173.173 |
| 67 | 5.17.53 | 1837 | 5.17.29.37.37 | 8747 | 5.5.101.157.193 | 103317 | 5.13.13.29.37.61.193 |
| 77 | 5.29.41 | 1929 | 137.157.173 | 9133 | 5.13.61.109.193 | 104293 | 5.13.61.101.157.173 |
| 87 | 5.37.41 | 2203 | 5.5.13.109.137 | 9353 | 5.5.5.13.13.41.101 | 113699 | 29.29.29.53.73.137 |
| 97 | 5.5.13.29 | 2323 | 5.29.173.197 | 10003 | 5.5.13.37.53.157 | 126497 | 5.5.13.53.61.97.157 |
| 103 | 5.5.5.5.5.17 | 2343 | 5.13.17.29.197 | 11967 | 5.13.17.29.41.109 | 130553 | 5.5.13.53.97.101.101 |
| 105 | 61.181 | 2301 | 29.41.61.73. | 12045 | 13.29.53.53.137 | 132143 | 5 29.53.193.193 |
| 131 | 89.193 | 2447 | 5.5.17.37.193 | 12257 | 5.29.53.113.173 | 139477 | 5.37.41.97.137.193 |
| 135 | 17.29.37 | 2455 | 29.37.41.137 | 12603 | 5.5.5.5.13.113.173 | 150897 | 5.5.5.13.29.61.89.89 |
| 137 | 5.13.17.17 | 2477 | 5.13.13.53.137 | 12667 | 5.37.73.109.109 | 154821 | 29.37.41.41.97.137 |
| 141 | 101.197 | 2593 | 5.13.13.73.109 | 13397 | 5.5.5.13.17.73.89 | 158373 | 5.13.17.37.61.89.113 |
| 147 | 5.5.5.173 | 2687 | 5.17.29.29.101 | 16897 | 5.5.5.17.29.41.113 | 158509 | 17.17.53.101.109.149 |
| 173 | 5.53.113 | 2823 | 5.17.29.53.61 | 17477 | 5.17.17.29.37.197 | 161399 | 17.17.53.89.97.197 |
| 227 | 5.13.13.61 | 2957 | 5.13.17.41.193 | 17635 | 13.41.53.101 109 | 162383 | 5.17.89.149.149.157 |
| 241 | 13.41.109 | 3095 | 17.37.97.157 | 17853 | 5.5.5.109.149.157 | 171293 | 5.17.29.41.41.73.97 |
| 253 | 5.5.13.197 | 3113 | 5.13.29.53.97 | 19991 | 17.29.61.97.137 | 172569 | 13.29.29.101.149.181 |
| 257 | 5.73.181 | 3153 | 5.5.13.13.13.181 | 20167 | 5.41.97.113.181 | 174727 | 5.13.17.37.53.73.193 |
| 263 | 5.101.137 | 3247 | 5.5.53.73.109 | 23677 | 5.53.97.113.193 | 232147 | 5.5.5.13.41.41.109.181 |
| 271 | 17.29.149 | 3293 | 5.101.109.197 | 24447 | 5.5.13.13.17.53.157 | 239387 | 5.53.97.109.113.181 |
| 279 | 13.53.113 | 3603 | 5.5.5.17.41.149 | 24785 | 13.13.17.29.73.101 | 240347 | 5.5.17.41.89.193.193 |
| 309 | 29.37.89 | 3607 | 5.13.13.89.173 | 25617 | 5.13.29.37.97.97 | 242897 | 5.5.5.17.17.97.113.149 |
| 357 | 5.13.37.53 | 3777 | 5.13.41.53.101 | 28581 | 13.53.73.109.149 | 251817 | 5.13.29.41.53.113.137 |
| 383 | 5.13.37.61 | 3847 | 5.5.29.137.149 | 29217 | 5.13.37.37.53.181 | 260033 | 5.13.13.17.29.29.29.193 |
| 397 | 5.5.5.13.97 | 4453 | 5.5.17.37.97 | 29853 | 5.5.5.17.41.53.193 | 260575 | 17.29.61.73.157.197 |
| 403 | 5.5.73.89 | 4497 | 5.5.61.89.149 | 36107 | 5.13.17.53.113.197 | 300527 | 5.13.17.37.113.113.173 |
| 487 | 5.13.41.89 | 4505 | 13.13.29.41.101 | 36823 | 5.13.17.41.173.173 | 374203 | 5.5.17.89.113.181.181 |
| 505 | 17.61.113 | 4601 | 29.37.109.181 | 37579 | 5.17.29.41.89.157 | 378671 | 13.13.37.41.53.61.173 |
| 545 | 17.101.173 | 4647 | 5.5.5.13.97.137 | 38863 | 5.13.17.17.37.41.53 | 434443 | 13.13.37.37.41.101.197 |
| 569 | 41.53.149 | 4853 | 5.5.5.29.73.89 | 39653 | 5.5.29.101.109.197 | 577603 | 5.5.5.5.29.29.41.113.137 |

| | |
|---|---|
| 648447 | 5.5.13.17.61.61.113.181 |
| 630103 | 5.5.5.5.29.37.73.89.97 |
| 658783 | 5.17.17.29.41.41.61.101 |
| 696353 | 3.5.5.5.17.17.37.37.37.53 |
| 748853 | 5.5.5.5.5.61.109.137.197 |
| 870487 | 3.13.61.73.97.137.197 |
| 873503 | 5.5.13.13.61.109.157.173 |
| 970497 | 5.5.17.37.53.73.113.137 |
| 1193679 | 13.29.41.41.101.113.197 |
| 1229533 | 5.13.13.53.53.33.61.197 |
| 1239837 | 5.13.19.13.17.29.37.89.89 |
| 1335487 | 5.17.89.97.113.137.157 |
| 1404163 | 5.13.13.37.41.97.101.157 |
| 1626475 | 13.29.41.73.109.137.157 |
| 2008103 | 5.5.5.13.41.53.61.97.193 |
| 2083893 | 5.13.17.53.73.89.101.113 |
| 2116091 | 17.29.37.101.113.137.157 |
| 2373167 | 5.17.29.37.41.53.157.181 |
| 2960653 | 5.5.13.13.17.17.17.101.113 |
| 3258603 | 5.5.5.37.41.61.61.101.149 |
| 3611583 | 5.17.29.37.61.109 137.157 |
| 3898603 | 5.5.5.13.13.37.41.73.73.89 |
| 4945505 | 13.13.17.17.17.29.89.101.113 |
| 3431603 | 3.5.3.17.17.29.41.73.97.97 |
| 8180243 | 5.13.29.29.37.37.41.53.53.113.193 |
| 8268383 | 5.13.13.29.41.73.73.113.113 |
| 9993613 | 3.13.29.37.33.33.61.61.137 |
| 10311423 | 5.41.41.61.109.113.113.149 |
| 15305803 | 5.5.13.37.53.101.109.173.193 |
| 16626883 | 5.17.73.101.109.149.137.173 |
| 17545053 | 5.3.13.17.17.41.33.101.109.137 |
| 17916571 | 17.37.37.61.73.109.157.181 |
| 18300917 | 5.13.29.41.41.61.89.101.197 |
| 19344643 | 5.13.13.29.41.73.73.113.113 |
| 20278927 | 5.13.17.29.53.73.113.149.197 |
| 22858302 | 3.5.17.17.17.17.17.29.53.61.157 |
| 38648107 | 5.17.17.29.97.109.109.157.197 |
| 40473647 | 3.3.3.3.13.37.41.73.97.137.137 |
| 46113113 | 5.13.13.17.29.37.53.73.181.197 |
| 1082687431 | 13.17.29.53.61.97.109.157.173.197 |
| 1254102921 | 13.13.17.17.41.53.61.97.101.137.181 |

| | |
|---|---|
| 5 | 3 |
| 13 | 7 |
| 17 | 1. 33. 103. 137 |
| 29 | 19. 97 |
| 37 | 13. 135. 1837 |
| 41 | 5. 77. 87. 379 |
| 53 | 39. 67. 357. 38863. 696353 |
| 61 | 17. 227. 383. 2823. 4897. 7547. 57323 |
| 73 | 35. 1203. 2301. 7703. 52137. 74133 |
| 89 | 47. 309. 403. 487. 1021. 1293. 4853. 13397. 130897. 1239837°. 3898603 |

| | |
|---|---|
| 97 | 9. 397. 3113. 4453. 23617. 171293. 650103. 3431603 |
| 101 | 61. 747. 2353. 2687. 3777. 4505. 6605. 8141. 9353. 24785°. 45793. 67327. 73467. 130553. 658783 |
| 109 | 23. 241. 677. 2593. 3247. 3473. 11967. 12667. 17635 |
| 113 | 53. 173. 279. 505. 851. 6727. 7963. 16897. 32379. 81413°. 138373. 2083893. 2960633. 4943305. 8268383. 19344643 |
| 137 | 11. 263. 1369. 2203. 2433. 2477. 4647. 7683. 12045. 19991°. 37803. 113699. 154821. 251817. 377603. 970497. 9993613. 17545053. 40473647 |
| 149 | 11. 271. 369. 1463. 3603. 3849. 4497. 5635. 28581. 40853°. 68215. 82817. 138509. 242897. 3258603. 10311423 |
| 157 | 43. 897. 987. 2243. 3095. 8523. 10003. 17853. 24447. 37579°. 44947. 126497. 162384. 1335487. 1404163. 1626473. 2116091. 3611383. 22838302 |
| 173 | 147. 545. 1237. 1929. 3607. 3337. 6081. 6427. 7413. 12257°. 12603. 36823. 52398. 69347. 82893. 104293. 300327. 378671. 873303. 16626883° |
| 181 | 105. 257. 619. 1553. 3133. 4601. 5897. 20167. 29217. 41373°. 172569. 232147. 239387. 374203. 648447. 2373167. 17916571. 1234102921 |
| 193 | 131. 903. 2447. 2957. 5921. 8747. 9133. 23677. 29853. 103317°. 132143. 139477. 174727. 240347. 260033. 2008103. 8180243. 15305803. |
| 197 | 141. 253. 647. 1717. 2223. 3293. 6051. 7345. 17477. 36107°. 39633. 44269. 66333. 161399. 260575. 434441. 748853. 870487. 1193679. 1229533°. 18500917. 20278927. 38648107. 46113113. 1082687431 |

Zerlegbare $aa+25$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 67 | 37.61 | 274 | 13.53.109 | 837 | 13.13.41.53 |
| 2 | 29 | 71 | 17.149 | 303 | 17.37.73 | 858 | 37.101.197 |
| 3 | 17 | 78 | 41.149 | 309 | 17.33.53 | 898 | 13.17.41.89 |
| 4 | 41 | 81 | 37.89 | 311 | 13.61.61 | 939 | 29.101.157 |
| 6 | 61 | 84 | 73.97 | 324 | 13.41.197 | 984 | 29.173.193 |
| 7 | 37 | 86 | 41.181 | 326 | 13.13.17.37 | 1092 | 61.113.173 |
| 8 | 89 | 89 | 29.137 | 354 | 17.73.101 | 1104 | 13.29.53.61 |
| 9 | 53 | 97 | 53.89 | 363 | 13.37.137 | 1177 | 37.97.193 |
| 11 | 73 | 99 | 17.17.37 | 376 | 13.73.149 | 1252 | 73.109.197 |
| 12 | 13.13 | 116 | 13.17.61 | 377 | 17.37.113 | 1364 | 13.13.101.109 |
| 13 | 97 | 118 | 13.29.37 | 414 | 37.41.113 | 1431 | 13.17.41.113 |
| 14 | 13.17 | 119 | 41.173 | 433 | 29.53.61 | 1442 | 13.17.97.97 |
| 17 | 157 | 127 | 41.197 | 437 | 29.37.89 | 1544 | 17.17.73.113 |
| 19 | 193 | 151 | 101.113 | 454 | 13.101.157 | 1561 | 13.17.37.149 |
| 27 | 13.29 | 157 | 13.13.73 | 488 | 37.41.157 | 1733 | 97.113.137 |
| 31 | 17.29 | 168 | 13.41.53 | 521 | 13.53.197 | 1767 | 13.29.41.101 |
| 37 | 17.41 | 174 | 157.193 | 373 | 13.73.173 | 1887 | 29.29.29.73 |
| 38 | 13.113 | 181 | 13.13.97 | 611 | 29.41.157 | 2128 | 17.41.73.89 |
| 44 | 37.53 | 201 | 17.29.41 | 636 | 13.29.29.37 | 2144 | 13.29.89.137 |
| 48 | 17.137 | 207 | 13.17.97 | 638 | 13.173.181 | 2341 | 13.41.53.97 |
| 51 | 13.101 | 209 | 13.41.41 | 677 | 13.17.17.61 | 2434 | 17.29.61.197 |
| 53 | 13.109 | 227 | 149.173 | 733 | 37.53.137 | 2731 | 17.41.61.89 |
| 54 | 17.173 | 252 | 17.37.101 | 753 | 13.113.193 | 2887 | 13.17.109.173 |
| 56 | 29.109 | 259 | 13.29.89 | 768 | 13.17.17.157 | 2989 | 13.17.17.29.41 |
| 62 | 53.73 | 267 | 181.197 | 816 | 41.109.149 | | |
| | | | | 819 | 17.109.181 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3199 | 13.13 13.17.137 | 33381 | 29.37.53.97.101 |
| 3323 | 37.37.37.109 | 38011 | 13.41.89.97.157 |
| 3471 | 17.37.61.157 | 38134 | 17.41.97.137.157 |
| 3522 | 13.17.37.37.41 | 40559 | 13.17.17.37.61.97 |
| 3654 | 13.61.113.149 | 41037 | 29.41.73.89.109 |
| 3686 | 17.41.101.193 | 41891 | 17.37.73.97.197 |
| 3788 | 17.61.101.137 | 44407 | 13.17.17.37.41.173 |
| 4219 | 17.41.113.113 | 48062 | 13.17.53.53.61.61 |
| 4264 | 17.61.89.197 | 49943 | 17.37.73.157.173 |
| 4458 | 13.89.89.193 | 50051 | 13.17.173.181.181 |
| 4798 | 13.89.101.197 | 56913 | 13.17.37.37.53.101 |
| 4814 | 17.17.17.53.89 | 60347 | 13.17.29.29.97.101 |
| 5154 | 17.89.97.181 | 68626 | 13.13.17.53.157.197 |
| 5251 | 13.13.29.29.97 | 85699 | 37.61.89.101.181 |
| 5706 | 13.101.137.181 | 87989 | 17.53.113.193.197 |
| 5927 | 13.13.37.53.53 | 93469 | 13.13.13.17.29.37.109 |
| 6001 | 29.73.97.173 | 95473 | 13.13.13.73.157.181 |
| 6157 | 17.53.109.193 | 101151 | 37.41.101.173.193 |
| 6581 | 29.53.73.193 | 108871 | 17.53.173.193.197 |
| 6616 | 13.17.37.53.101 | 121479 | 17.17.29.41.109.197 |
| 7359 | 13.97.109.197 | 141777 | 13.17.37.73.113.149 |
| 7676 | 53.73.97.157 | 144808 | 13.41.61.61.97.109 |
| 7753 | 41.61.61.197 | 152762 | 13.41.41.97.101.109 |
| 8147 | 29.37.157.197 | 152803 | 13.29.37.41.137.149 |
| 8231 | 17.101.109.181 | 155187 | 73.97.101.113.149 |
| 8776 | 13.13.37.109.113 | 160314 | 29.37.41.61.61.157 |
| 9209 | 73.73.73.109 | 172561 | 13.13.13.13.37.73.193 |
| 10049 | 41.89.101.137 | 183971 | 17.37.41.73.89.101 |
| 10061 | 13.17.29.53.149 | 188618 | 13.17.17.29.53.61.101 |
| 10501 | 37.73.137.149 | 214482 | 29.37.53.61.89.149 |
| 12468 | 13.29.41.89.113 | 214631 | 13.29.41.73.137.149 |
| 12526 | 17.17.29.97.193 | 234852 | 17.41.53.73.113.181 |
| 13786 | 73.101.149.173 | 249014 | 13.73.73.89.89.113 |
| 13787 | 89.97.101.109 | 257841 | 13.29.61.89.101.149 |
| 14067 | 13.29.37.41.173 | 279007 | 13.13.17.29.29.89.181 |
| 14756 | 13.37.41.61.181 | 329219 | 17.37.73.89.89.149 |
| 15807 | 13.17.29.101.193 | 329848 | 13.17.17.29.37.137.197 |
| 17057 | 13.13.53.109.149 | 382537 | 13.17.17.29.61 101.109 |
| 18123 | 13.29.37.61.193 | 422419 | 17.17.17.41.53.61.137 |
| 18771 | 13.13.13.17.53.89 | 458742 | 17.17.113.173.193.193 |
| 18823 | 13.29.41.73.157 | 484041 | 13.29.37.37.61.61.61 |
| 19553 | 13.17.17.17.41.73 | 546534 | 13.13.37.41.41.157.181 |
| 19751 | 17.17.17.29.37.37 | 564812 | 13.37.37.41.53.73.113 |
| 20502 | 13.53.61.73.137 | 735331 | 13.13.37.41.53.101.197 |
| 21009 | 13.17.37.137.197 | 743781 | 13.13.13.13.17.37.89.173 |
| 21319 | 13.37.37.113.113 | 867847 | 17.89.89.137.137.149 |
| 21527 | 13.53.61.37.149 | 938003 | 13.29.53.61.61.61.97 |
| 21644 | 13.13 17.41.41.97 | 1000154 | 13.13.29.29.37.37.53.97 |
| 23488 | 29.37.53.89.109 | 1964806 | 13.13.17.29.41.73.113.137 |
| 24101 | 13.29.61.73.173 | 2144583 | 13.41.53.61.73.101.181 |
| 24358 | 17.29.41.149.197 | 3589859 | 17.17.73.109.113.137.181 |
| 25401 | 13.17.97.101.149 | 3879591 | 13.37.53.89.113.149.197 |
| 26707 | 29.29.37.73.157 | 5693622 | 13.13.13.53.97.101.157.181 |
| 30467 | 17.41.41.109.149 | 6991009 | 13.17.17.37.53.113.149.197 |
| 31226 | 17.53.61.113.157 | 7062082 | 13.29.29.41.53.73.149.193 |

| | |
|---|---|
| 8489259 | 13.17.29.29.29.41.41.41.97 |
| 8717008 | 13.13.17.17.37.37.89.113.113 |
| 9707868 | 13.29.29.37.101.113.137.149 |
| 10305788 | 13.17.37.53.101.109.113.197 |
| 17462342 | 13.37.61.61.89.89.137.157 |
| 38722306 | 13.13.29.37.61.89.89.109.157 |
| 48162204 | 13.17.37.37.41.53.101.181.193 |
| 60920523 | 13.17.17.53.61.61.101.137.181 |
| 63769026 | 17.29.37.41.53.89.101.101.113 |
| 111771087 | 13.17.37.61.61.89.113.137.149 |
| 141757784 | 13.17.53.61.89.113.137.137.149 |
| 172642653 | 13.17.29.73.89.89.137.149.197 |
| 190067607 | 73.89.97.101.101.109.149.173 |
| 308956283 | 13.29.29.37.41.53.61.73.89.137 |
| 569329071 | 13.13.29.37.41.97.101.109.137.149 |

| | |
|---|---|
| 13 | 1. 12. |
| 17 | 3. 14. 99 |
| 29 | 2. 27. 31 |
| 37 | 7. 118. 326. 636. 19751 |
| 41 | 4. 27. 201. 209. 2989. 3522 |
| 53 | 9. 44. 168. 309. 857. 5927 |
| 61 | 6. 67. 116. 311. 433. 677. 1104. 48062. 484041 |
| 73 | 11. 62. 197. 303. 1887. 19553 |
| 89 | 8. 81. 97. 259. 437. 898. 2128. 2751. 4814. 18771° |
| 97 | 13. 84. 181. 207. 1442. 2341. 5251. 21644. 40559. 938003°. 1000154. 8489259 |
| 101 | 51. 252. 354. 1767. 6616. 33381. 56913. 60347. 183971. 188618° |
| 109 | 53. 56. 274. 1364. 3323. 9209. 13787. 23488. 41037. 93469°. 144808. 152762. 382537 |
| 113 | 38. 151. 377. 414. 1431. 1944. 4219. 8776. 12468. 21319°. 249014. 564812. 8717008. 63769026 |
| 137 | 48. 89. 363. 733. 1733. 2144. 3199. 3788. 10049. 20502°. 422419. 1964806. 308956283 |
| 149 | 72. 78. 376. 816. 1561. 3654. 10061. 10501. 17057. 21527°. 25401. 30467. 141777. 152803. 155187. 214482. 214631. 257841. 329219. 867847°. 9707868. 111771087. 141757784. 569329071 |
| 157 | 17. 454. 488. 611. 768. 959. 3471. 7676. 18823. 26707°. 31226. 38011. 38134. 160314. 17462342. 38722306 |
| 173 | 54. 119. 227. 573. 1092. 2887. 6001. 13786. 14067. 24101°. 44407. 49943. 743781. 190067607 |
| 181 | 86. 638. 819. 5154. 5706. 8231. 14756. 50051. 85699. 95473°. 234852. 279007. 546534. 2144583. 3589859. 5693622. 60920523 |
| 193 | 19. 174. 753. 984. 1177. 3686. 4458. 6157. 6581. 12526°. 15807. 18123. 101151. 172561. 458742. 7062082. 48162204 |
| 197 | 127. 267. 324. 521. 858. 1252. 2434. 4264. 4798. 7359°. 7753. 8147. 21009. 24358. 41891. 68626. 87989. 108871. 121479. 329848°. 735331. 3879591. 6991009. 10305788. 172642653 |

Zerlegbare $aa+36$.

| | |
|---|---|
| 1 | 37 |
| 5 | 61 |
| 7 | 5.17 |
| 11 | 157 |
| 13 | 5.41 |
| 17 | 5.5.13 |
| 25 | 5.113 |
| 35 | 13.97 |
| 41 | 17.101 |
| 43 | 5.13.29 |
| 61 | 13.17.17 |
| 67 | 5.5.181 |
| 73 | 5.29.37 |
| 85 | 53.137 |
| 89 | 73.109 |
| 95 | 13.17.41 |
| 113 | 5.13.197 |
| 115 | 89.149 |
| 127 | 5.53.61 |
| 191 | 13.53.53 |
| 203 | 5.73.113 |
| 217 | 5.5.5.13.29 |
| 233 | 5.5.41.53 |
| 293 | 5.89.193 |
| 295 | 13.37.181 |
| 307 | 5.109.173 |
| 347 | 5.13.17.109 |
| 445 | 37.53.101 |
| 479 | 29.41.193 |
| 517 | 5.5.17.17.37 |
| 565 | 29.101.109 |
| 617 | 5.5.97.157 |
| 667 | 5.5.13.37.37 |
| 673 | 5.17.73.73 |
| 737 | 5.13.61.137 |
| 763 | 5.13.13.13.53 |
| 953 | 5.13.89.157 |
| 971 | 13.29.41.61 |
| 1183 | 5.5.17.37.89 |
| 1333 | 5.5.17.37.113 |
| 1463 | 5.41.53.197 |
| 1517 | 5.5.13.73.97 |
| 1673 | 5.13.17.17.149 |
| 1717 | 5.5.5.5.53.89 |
| 1873 | 5.41.109.157 |
| 2201 | 13.41.61.149 |
| 2251 | 17.17.89.197 |
| 2383 | 5.5.13.101.173 |
| 2557 | 5.13.17.61.97 |
| 2567 | 5.5.29.61.149 |
| 2963 | 5.89.109.181 |
| 3181 | 13.37.109.193 |
| 3553 | 5.13.29.37.181 |
| 3767 | 5.5.17.173.193 |

| | |
|---|---|
| 4031 | 41.61.73.89 |
| 4277 | 5.17.29.41.181 |
| 4883 | 5.5.37.149.173 |
| 5009 | 13.97.101.197 |
| 5321 | 13.13.29.53.109 |
| 5467 | 5.5.5.5.17.29.97 |
| 5495 | 13.13.29.61.101 |
| 5497 | 5.173.181.193 |
| 6217 | 5.5.5.37.61.137 |
| 6221 | 29.73.101.181 |
| 6655 | 29.41.193.193 |
| 6827 | 5.17.61.89.101 |
| 7547 | 5.37.37.53.157 |
| 7717 | 5.5.5.53.89.101 |
| 7813 | 5.17.61.61.193 |
| 7861 | 13.17.137.157 |
| 7919 | 37.97.101.173 |
| 8459 | 13.17.41.53.149 |
| 10261 | 13.17.53.89.101 |
| 10565 | 13.13.41.89.181 |
| 13763 | 5.13.17.37.41.113 |
| 13823 | 5.13.109.149.181 |
| 14543 | 5.13.29.29.53.73 |
| 15245 | 13.37.61.89.89 |
| 15733 | 5.5.29.29.61.193 |
| 17617 | 5.5.29.41.53.197 |
| 18659 | 13.17.97.109.149 |
| 22345 | 17.29.53.97.197 |
| 22481 | 13.17.17.17.41.193 |
| 22583 | 5.5.17.101.109.109 |
| 22733 | 5.5.13.13.13.97.97 |
| 22867 | 5.5.29.37.101.193 |
| 23753 | 5.37.113.137.197 |
| 29129 | 13.53.89.101.137 |
| 29995 | 13.13.13.13.17.17.109 |
| 30845 | 13.13.17.41.41.197 |
| 31885 | 13.17.29.41.53.73 |
| 32647 | 5.13.17.73.73.181 |
| 38893 | 5.73.109.193.197 |
| 38923 | 5.17.37.53.61.149 |
| 39347 | 5.13.41.53.97.113 |
| 42133 | 5.5.17.17.17.97.149 |
| 44327 | 5.29.29.37.73.173 |
| 48967 | 5.5.5.13.17.29.41.73 |
| 49517 | 5.5.29.113.173.173 |
| 54167 | 5.5.13.13.37.137.137 |
| 61117 | 5.5.13.29.61.73.89 |
| 62825 | 13.17.37.41.61.193 |
| 74603 | 5.13.17.29.29.53.113 |
| 87217 | 5.5.5.17.17.29.53.137 |
| 96227 | 5.17.53.109.109.173 |
| 125909 | 13.17.61.73.89.181 |
| 130613 | 5.41.53.73.137.157 |
| 142709 | 13.13.29.37.37.41.73 |

| | |
|---|---|
| 151163 | 5.29.61.109.137.173 |
| 161035 | 13.41.53.61.101.149 |
| 171655 | 89.97.109.173.181 |
| 174565 | 29.37.37.41.97.193 |
| 182743 | 5.17.29.29.29.89.181 |
| 189353 | 5.17.109.157.157.157 |
| 191203 | 5.53.53.73.181.197 |
| 206407 | 5.17.17.29.41.137.181 |
| 256693 | 5.17.17.29.61.149.173 |
| 387833 | 5.13.37.53.53.61.73 |
| 427795 | 13.17.37.37.53.101.113 |
| 429347 | 5.13.13.37.173.173.197 |
| 449921 | 13.29.37.41.41.89.97 |
| 533789 | 13.13.29.29.113.113.157 |
| 726029 | 17.17.29.29.101.109.197 |
| 837533 | 5.5.5.37.97.101.113.137 |
| 1097105 | 13.17.17.97.109.157.193 |
| 1396529 | 13.13.13.37.41.53.61.181 |
| 2390717 | 5.5.5.13.17.29.29.37.61.109 |
| 2525527 | 5.13.17.61.89.97.97.113 |
| 5318933 | 5.5.13.17.29.89.97.113.181 |
| 6920333 | 5.5.13.17.17.17.37.61.97.137 |
| 9439957 | 5.17.17.17.17.17.37.37.53.173 |
| 11776417 | 5.5.17.41.73.73.89.97.173 |
| 45435967 | 5.5.5.29.41.53.61.113.193.197 |
| 70145903 | 5.13.13.17.41.53.73.97.113.197 |
| 90115783 | 5.5.5.5.5.5.5.5.5.5.5.13.13.13.17.61.73 |
| 716295433 | 5.5.13.13.29.29.37.41.61.89.89.197 |
| 2009136133 | 5.5.13.17.41.61.73.89.97.113.181.197 |

| | |
|---|---|
| 5 | |
| 13 | 17 |
| 17 | 7. 61 |
| 29 | 43. 217 |
| 37 | 1. 73. 517. 667 |
| 41 | 13. 95 |
| 53 | 191. 233. 763 |
| 61 | 5. 127. 971 |
| 73 | 673. 14543. 31885. 48967. 141709. 387833. 90115783 |
| 89 | 1183. 1717. 4031. 15245. 61117 |
| 97 | 35. 1517. 2557. 5467. 22733. 449921 |
| 101 | 41. 445. 5495. 6827. 7717. 10261 |
| 109 | 89. 347. 565. 5321. 22583. 29995. 2390717 |
| 113 | 23. 203. 1333. 13763. 39347. 74603. 427795. 2525527 |
| 137 | 85. 737. 6217. 29129. 54167. 87217. 837533. 6920333 |
| 149 | 115. 1673. 2201. 2567. 8459. 18659. 38923. 42133. 161035 |
| 157 | 11. 617. 953. 1873. 7547. 7861. 130613. 189353. 533789 |
| 173 | 307. 2383. 4883. 7919. 44327. 49527. 96227. 151163. 256693. 9439957*. 11776417 |
| 181 | 67. 295. 2963. 3553. 4277. 6221. 10565. 13823. 32647. 125909*. 171655. 182743. 206407. 1396529. 5318933 |
| 193 | 293. 479. 3181. 3767. 5497. 6655. 7813. 15733. 22481. 22867*. 62825. 174565. 1097105 |
| 197 | 113. 1463. 2251. 5009. 17627. 22345. 23753. 30845. 38893. 191203*. 429347. 726029. 45435967. 70145903. 716295433. 2009136133 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zerlegbare $aa+49$ | | | | 979 | 5.13.73.101 | 4630 | 17.37.173.197 | 16393 | 61.101.113.193 |
| 1 | 3.3 | 149 | 5.5.5.89 | 992 | 13.17.61.73 | 4637 | 37.37.89.89. | 16446 | 5.29.109.109.157 |
| 2 | 53 | 152 | 13.13.137 | 1009 | 5.17.53.113 | 4713 | 13.13.17.33.73 | 17247 | 13.37.37.61.137 |
| 3 | 29 | 159 | 5.17.149 | 1031 | 5.13.13.17.37 | 4749 | 3.5.13.13.17.137 | 18099 | 3.5.17.29.97.137 |
| 4 | 3.13 | 171 | 5.29.101 | 1041 | 5.29.37.101 | 4754 | 5.13.17.113.181 | 18976 | 5.5.5.13.37.53.113 |
| 3 | 37 | 176 | 5.5.17.73 | 1111 | 5.17.53.137 | 4778 | 37.41.101.149 | 19745 | 13.17.41.137.157 |
| 6 | 3.17 | 181 | 5.17.193 | 1128 | 17.29.29.89 | 4918 | 13.13.13.101.109 | 20297 | 13.13.13.29.53.61 |
| 8 | 113 | 186 | 5.13.13.41 | 1179 | 5.13.17.17.37 | 4917 | 29.53.53.149 | 20999 | 3.13.29.149.157 |
| 9 | 3.13 | 199 | 5.5.13.61 | 1186 | 5.29.89.109 | 5024 | 5.5.5.5.41.197 | 21768 | 97.137.181.197 |
| 10 | 149 | 205 | 109.193 | 1221 | 5.29.53.97 | 5101 | 5.5.5.29.37.97 | 21834 | 5.17.29.41.53.89 |
| 11 | 5.17 | 214 | 5.53.173 | 1232 | 13.17.41.173 | 5191 | 5.13.17.89.137 | 22156 | 5.13.13.53.97.113 |
| 12 | 193 | 227 | 17.37.41 | 1364 | 5.37.89.113 | 3221 | 5.101.137.197 | 22369 | 5.41.41.157.193 |
| 13 | 109 | 229 | 5.29.181 | 1374 | 5.5.13.37.157 | 3226 | 5.5.5.41.73.73 | 23726 | 3.5.5.29.41.61.73 |
| 15 | 137 | 234 | 5.97.113 | 1393 | 13.29.29.89 | 5841 | 5.13.37.41.173 | 23931 | 5.13.17.41.41.181 |
| 16 | 5.61 | 249 | 5.5.17.73 | 1556 | 5.13.193.193 | 6008 | 41.41.109.197 | 26016 | 5.17.29.37.41.181 |
| 17 | 13.13 | 251 | 5.5.13.97 | 1592 | 17.29.53.97 | 6029 | 5.17.29.73.101 | 26337 | 113.113.157.173 |
| 19 | 5.41 | 264 | 5.13.29.37 | 1609 | 5.17.97.157 | 6309 | 5.13.53.53.109 | 27200 | 13.37.97.101.157 |
| 22 | 13.41 | 289 | 5.61.137 | 1621 | 5.13.17.29.41 | 6381 | 5.17.17.73.193 | 27364 | 5.13.13.73.109.113 |
| 23 | 17.17 | 295 | 13.17.197 | 1629 | 5.13.137.149 | 6574 | 5.5.13.13.53.193 | 27721 | 5.17.17.29.53.173 |
| 24 | 5.5.5.5 | 296 | 5.89.197 | 1649 | 5.3.5.73.149 | 6899 | 5.5.5.5.13.29.101 | 29234 | 5.13.13.53.97.197 |
| 26 | 5.5.29 | 314 | 5.109.181 | 1689 | 5.17.97.173 | 6998 | 13.17.37.53.113 | 29501 | 5.5.13.17.17.41.113 |
| 29 | 5.89 | 316 | 5.13.29.53 | 1751 | 5.5.13.53.89 | 7276 | 5.5.13.29.41.137 | 30179 | 5.61.73.113.181 |
| 30 | 13.73 | 321 | 3.13.13.61 | 1766 | 5.29.137.157 | 7316 | 5.17.53.109.109 | 30424 | 5.5.13.17.19.53.109 |
| 31 | 5.101 | 331 | 5.97.113 | 1929 | 5.37.89.113 | 7440 | 13.17.41 41.149 | 31274 | 5.5.5.5.13.17.73.97 |
| 32 | 29.37 | 334 | 5.13.17.101 | 1949 | 5.5.17.41.109 | 7914 | 5.29.61.73.97 | 32491 | 5.13.37.41.53.101 |
| 39 | 5.157 | 347 | 13.41.113 | 2069 | 3.41.53.197 | 8149 | 5.5.5.5.5.5.5.5.5.5.17 | 33238 | 13.17.17.37.73.109 |
| 40 | 17.97 | 351 | 5.5.5.17.29 | 2076 | 5.5.13.89.149 | 8219 | 5.37.41.61.73 | 34134 | 5.13.41.53.73.113 |
| 41 | 5.173 | 373 | 13.53.101 | 2151 | 5.5.37.41.61 | 8231 | 5.5.13.17.61.101 | 33303 | 17.37.61.109.149 |
| 43 | 13.73 | 374 | 5.5.29.193 | 2374 | 3.5.17.89.149 | 8513 | 37.89.101.109 | 33361 | 5.41.113.137.197 |
| 43 | 17.61 | 449 | 3.5.37.109 | 2381 | 5.29.113.173 | 8753 | 13.137.137.137 | 35324 | 5.5.3.17.17.181.193 |
| 48 | 13.181 | 474 | 5.5.89.101 | 2521 | 5.37.89.193 | 8919 | 5.17.41.101.113 | 36149 | 5.5.5.13.13.157.197 |
| 31 | 5.5.53 | 333 | 17.61.137 | 2378 | 13.17.17.29.61 | 9161 | 5.13.29.113.197 | 37409 | 5.61.89.149.173 |
| 35 | 29.33 | 550 | 13.17.37.37 | 2595 | 17.37.33.101 | 9301 | 3.5.73.137.173 | 37836 | 3.17.17.61.109.149 |
| 57 | 17.97 | 554 | 5.29.29.73 | 2607 | 17.29.61.113 | 9546 | 5.13.97.97.149 | 38601 | 3.3.5.13.17.149.181 |
| 60 | 41.89 | 335 | 13.17.17.41 | 2639 | 5.37.97.197 | 9616 | 3.13.13.17.41.137 | 39901 | 5.5.13.13.29.73.89 |
| 61 | 5.13 29 | 589 | 5.13.17.157 | 2817 | 13.37.73.113 | 9837 | 13.17.37.61.97 | 41801 | 5.5.41.61.89.157 |
| 69 | 5.13.37 | 591 | 5.181.193 | 2831 | 5.5.5.13.41.61 | 9993 | 13.149.149.173 | 41839 | 5.73.89.149.181 |
| 74 | 5.5.13.17 | 394 | 5.13.61.89 | 2930 | 17.41.109.113 | 10291 | 5.17.37.113.149 | 43416 | 5.13.13.13.29.61.97 |
| 79 | 5.17.37 | 601 | 5.5.5.5.17.17 | 2944 | 5.61.157.181 | 10630 | 13.13.61.97.113 | 44677 | 13.53.97.109.137 |
| 96 | 5.17.109 | 606 | 5.17.29.149 | 2999 | 5.5.13.101.137 | 10651 | 5.5.13.37.53.89 | 44976 | 5.5.5.3.5.13.17.29.101 |
| 99 | 5.5.197 | 634 | 5.37.41.53 | 3100 | 17.29.101.193 | 10727 | 29.97.113.181 | 46229 | 5.17.29.41.97.109 |
| 101 | 5.5.5.41 | 641 | 5.13.29.109 | 3136 | 5.17.17.61.113 | 10761 | 5.41.53.73.73 | 48317 | 13.13.29.37.41.157 |
| 103 | 73.73 | 667 | 13.109.157 | 3251 | 5.5.29.37.197 | 10887 | 41.89.109.149 | 49099 | 5.5.41.73.89.181 |
| 104 | 5.41.53 | 676 | 5.5.101.181 | 3501 | 5.5.13 109.173 | 11185 | 53.89.89.149 | 50632 | 17.73.101.113.181 |
| 106 | 5.37.61 | 691 | 5.17.53.53 | 3547 | 17.37.73.137 | 11632 | 29.149.173.181 | 31176 | 5.5.17.17.37.97.101 |
| 108 | 13.17.53 | 719 | 5.13.41.97 | 3709 | 5.13.29.41.89 | 12151 | 5.5.13.13.101.173 | 34074 | 5.5.5.37.53.61.197 |
| 113 | 13.17.29 | 776 | 5.5.13.17.109 | 3733 | 13.41.73.181 | 12489 | 5.13.13.17.61.89 | 33774 | 5.3.3.13.89.137.137 |
| 116 | 5.37.73 | 799 | 3.5.113.113 | 4034 | 5.13.29.89.97 | 13101 | 5.5.3.3.17.41.197 | 38881 | 5.13.53.61.73.113 |
| 118 | 89.157 | 809 | 5.29.37.61 | 4065 | 13.37.89.193 | 13329 | 5.13.73.97.113 | 64051 | 5.5.73.73.89.173 |
| 121 | 5.13.113 | 824 | 5.5.157.173 | 4211 | 5.97.101.181 | 14331 | 5.5.5.5.37.61.73 | 64644 | 5.29.37.61.113.113 |
| 122 | 109.137 | 839 | 5.17.41.101 | 4286 | 5.13.41.61.113 | 14636 | 5.41.61.89.193 | 67783 | 17.53.109.149.157 |
| 132 | 101.173 | 844 | 3.17.17.17.29 | 4324 | 5.5.17.29.37.41 | 14811 | 5.13.109.113.137 | 69983 | 13.13.17.61.89.157 |
| 137 | 97.97 | 899 | 5.5.5.53.61 | 4399 | 5.5.5.5.113.137 | 15356 | 5.41.61.109.173 | 72851 | 3.5.5.17.17.17.29.149 |
| 139 | 5.13.149 | 906 | 5.13.73.173 | 4356 | 5.29.37.33.73 | 15423 | 17.29.29.53.157 | 73043 | 13.17.37.41.73.109 |
| 142 | 17.29.41 | 919 | 5.13.73.89 | 4629 | 3.73.149.197 | 15661 | 5.13.61.157.197 | 73672 | 17.17.37.53.61.157 |

| | |
|---|---|
| 73721 | 5.29.29.53.89.137 |
| 76534 | 5.29.53.53.197 |
| 80841 | 5.17.61.73.89.97 |
| 81307 | 13.53.157.173.181 |
| 83430 | 13.17.29.37.149.197 |
| 87369 | 5.13.17.89.197.197 |
| 88213 | 37.41.97.137.193 |
| 88406 | 5.17.53.89.101.193 |
| 88989 | 5.13.17.17.41.53.97 |
| 89149 | 5.5.5.29.89.109.113 |
| 92049 | 5.5.13.17.29.137.193 |
| 102735 | 13.13.13.89.137.197 |
| 124029 | 5.13.13.37.37.61.109 |
| 131863 | 13.17.37.97.97.113 |
| 133149 | 5.5.5.5.5.41.101.137 |
| 138199 | 5.5.13.17.101.109.157 |
| 139551 | 5.5.13.29.53.101.193 |
| 141633 | 17.17.17.17.29.41.101 |
| 148439 | 5.37.41.73.101.197 |
| 150410 | 17.37.41.61.73.197 |
| 150681 | 5.29.53.97.97.157 |
| 154876 | 5.5.17.41.73.109.173 |
| 157995 | 29.37.41.53.53.101 |
| 160168 | 17.37.41.53.137.137 |
| 163609 | 5.13.13.37.41.53.137 |
| 166851 | 5.5.5.5.5.13.41.61.137 |
| 167124 | 5.5.13.13.19.37.61.101 |
| 174074 | 5.5.13.17.157.181.193 |
| 178149 | 5.5.5.5.17.89.97.173 |
| 179565 | 13.17.29.113.113.197 |
| 187249 | 5.5.17.17.109.113.197 |
| 189538 | 73.109.149.157.193 |
| 207814 | 5.13.17.17.97.137.173 |
| 213263 | 29.37.41.73.73.97 |
| 217351 | 5.5.5.13.13.17.17.53.73 |
| 231755 | 13.17.17.17.61.61.113 |
| 273694 | 5.17.37.41.53.97.113 |
| 281226 | 5.5.5.5.61.73.157.181 |
| 288901 | 5.5.29.37.53.149.197 |
| 299399 | 5.5.5.5.13.29.37.53.97 |
| 307519 | 5.13.17.17.29.29.41.73 |
| 343066 | 5.13.17.17.17.41.89.101 |
| 345094 | 5.13.17.37.113.149.173 |
| 361409 | 5.13.17.53.61.101.181 |
| 375967 | 5.17.37.53.61.149 |
| 401444 | 5.13.17.17.29.29.101.101 |
| 408628 | 41.53.89.89.89.109 |
| 415848 | 13.17.17.37.101.109.113 |
| 417317 | 13.41.61.113.137.173 |
| 428021 | 5.13.37.41.61.97.157 |
| 448976 | 5.5.5.17.61.89.101.173 |
| 462953 | 19.41.53.101.113.149 |
| 521044 | 5.13.13.17.17.73.97.157 |
| 527329 | 5.17.37.61.61.109.109 |
| 658576 | 5.5.13.13.13.13.53.73.157 |
| 689601 | 5.5.5.37.41.73.89.193 |
| 788493 | 13.41.109.157.173.197 |
| 935601 | 5.5.5.5.5.13.13.17.29.41.41 |
| 979976 | 5.5.5.5.17.17.137.197.197 |
| 1055864 | 5.13.17.19.37.53.113.157 |
| 1538221 | 5.13.13.29.53.61.109.137 |
| 1686759 | 5.13.29.29.41.41.113.137 |
| 2001229 | 5.13.17.29.41.53.149.193 |
| 2446492 | 13.41.73.89.101.109.157 |
| 3254151 | 5.5.13.17.29.41.61.73.181 |
| 3297075 | 37.41.53.53.73.101.173 |
| 3643774 | 5.5.5.13.17.41.109.137.157 |
| 4515359 | 5.13.13.13.17.17.113.157.181 |
| 5307581 | 5.17.37.53.73.73.101.157 |
| 5456999 | 5.5.41.73.73.101.137.197 |
| 7936717 | 13.29.37.41.41.41.181.181 |
| 8555207 | 13.17.41.53.61.73.109.157 |
| 12448726 | 5.5.5.5.13.13.13.41.89.157.197 |
| 21432319 | 5.17.37.73.149.173.197.197 |
| 40407039 | 5.17.37.41.53.89.97.101.137 |
| 41719774 | 5.5.5.17.17.19.29.41.41.173.197 |
| 118135085 | 17.17.37.41.61.101.109.137.173 |

| | |
|---|---|
| 5 | 1. 24 |
| 13 | 4. 9. 17 |
| 17 | 6. 11. 23. 74. 601. 8149 |
| 29 | 3. 26. 61. 113. 351. 844 |
| 37 | 5. 32. 69. 79. 164. 550. 1031. 1179 |
| 41 | 19. 22. 101. 142. 186. 227. 555. 1621. 4324. 935601* |
| 53 | 2. 51. 55. 104. 108. 316. 634. 691 |
| 61 | 16. 45. 106. 199. 321. 809. 899. 2151. 2578. 2851*. 20297 |
| 73 | 30. 43. 103. 116. 176. 249. 554. 992. 4556. 4715*. 5226. 8219. 10761. 14351. 25726. 217351. 307519 |
| 89 | 29. 60. 149. 594. 919. 1128. 1395. 1751. 3709. 4657*. 10651. 12489. 21834. 39901 |
| 97 | 40. 57. 137. 251. 719. 1221. 1592. 4034. 5101. 7914*. 9837. 31274. 43426. 80841. 88989. 213263. 299399 |
| 101 | 31. 171. 334. 373. 474. 839. 979. 1041. 2595. 6029*. 6899. 8251. 32491. 44976. 51176. 141633. 157995. 167124. 343066. 401444* |
| 109 | 13. 96. 449. 641. 776. 1186. 1949. 4918. 6309. 7316*. 8515. 30424. 33258. 46229. 73043. 124029. 408628. 527329 |
| 113 | 8. 121. 234. 331. 347. 799. 1009. 1364. 1929. 2607*. 2817. 2930. 3156. 4286. 6998. 8919. 10630. 13329. 18976. 22156. 27564*. 29501. 34134. 58881. |
| | 64644. 89149. 131863. 231755. 273694. 415848 |
| 137 | 15. 122. 152. 289. 533. 2111. 2999. 3547. 4399. 5191*. 7276. 14811. 17247. 18099. 44677. 73721. 133149. 160168. 163609. 166851*. 1538221. 1686759. 40407039 |
| 149 | 10. 139. 159. 606. 1629. 1649. 2076. 2374. 4778. 4927*. 7440. 9546. 10291. 10587. 11185. 35303. 37836. 72851. 375967. 462953* |
| 157 | 39. 118. 589. 667. 1374. 1609. 1766. 4749. 8753. 9616*. 15425. 16446. 19743. 20999. 27200. 41801. 48317. 55774. 67785. 69983*. 73672. 138199. 250681. 428021. 521044. 658576. 1055864. 2446492. 3643774. 5307581*. 8555207 |
| 173 | 41. 132. 214. 824. 906. 1252. 1689. 2381. 3501. 5841*. 9301. 9993. 12151. 15356. 26337. 27721. 37409. 64051. 154876. 178149*. 207814. 345094. 417317. 448976. 3297075. 118135085 |
| 181 | 48. 219. 314. 676. 2944. 3753. 4211. 4754. 10727. 11632*. 25931. 26016. 30179. 38601. 41859. 49099. 56632. 81307. 281226. 361409*. 3254151. 4515359. 7936717 |
| 193 | 12. 181. 205. 374. 591. 1556. 2521. 3100. 4065. 6381*. 6574. 14656. 16393. 22569. 35524. 88213. 88406. 92049. 139551*. 174074. 189538. 689601. 2001229 |
| 197 | 99. 295. 296. 2069. 2659. 3251. 4629. 4630. 5024. 5221*. 6008. 9161. 13801. 15661. 21768. 29254. 35361. 36149. 54274. 76534*. 83430. 87369. 102735. 148439. 150410. 179565. 187249. 288901. 788493. 979976*. 5456999. 12448726. 21432319. 41719774 |

Zerlegbare $aa + 64$.

| | |
|---|---|
| 1 | 5.13 |
| 3 | 73 |
| 5 | 89 |
| 7 | 113 |
| 9 | 5.29 |
| 11 | 5.37 |
| 15 | 17.17 |
| 19 | 5.5.17 |
| 21 | 5.101 |
| 23 | 13.53 |
| 27 | 13.61 |
| 29 | 5.181 |
| 31 | 5.5.41 |
| 49 | 5.17.29 |
| 51 | 5.13.41 |
| 53 | 13.13.17 |
| 63 | 37.109 |
| 67 | 29.157 |
| 69 | 5.5.193 |
| 79 | 5.13.97 |
| 81 | 5.5.5.53 |
| 85 | 37.197 |
| 95 | 61.149 |
| 115 | 97.137 |
| 121 | 5.17.173 |
| 131 | 5.5.13.53 |
| 149 | 5.61.73 |
| 155 | 13.17.109 |
| 159 | 5.37.137 |
| 181 | 5.5.13.101 |
| 183 | 13.29.89 |
| 219 | 5.5.17.113 |
| 223 | 17.29.101 |
| 233 | 13.37.113 |
| 281 | 5.5.29.109 |
| 309 | 5.97.197 |
| 339 | 5.13.29.61 |
| 359 | 5.17.37.41 |
| 381 | 5.5.37.157 |
| 389 | 5.13.17.137 |
| 391 | 5.13.13.181 |
| 393 | 17.61.149 |
| 433 | 37.37.137 |
| 441 | 5.13.41.73 |
| 455 | 29.37.193 |
| 461 | 5.17.41.61 |
| 467 | 13.97.173 |
| 529 | 5.17.37.89 |
| 571 | 5.13.29.173 |
| 581 | 5.5.5.37.73 |
| 661 | 5.17.53.97 |
| 703 | 13.193.197 |
| 707 | 41.89.137 |
| 727 | 53.89.109 |
| 729 | 5.13.13.17.37 |
| 831 | 5.5.5.5.5.13.17 |
| 873 | 53.73.197 |
| 879 | 5.29.73.73 |
| 911 | 5.13.113.113 |
| 937 | 13.17.29.137 |
| 989 | 5.13.101.149 |
| 1035 | 17.29.41.53 |
| 1097 | 41.149.197 |
| 1141 | 5.17.17.17.53 |
| 1169 | 5.5.5.13.29.29 |
| 1171 | 5.13.17.17.73 |
| 1191 | 5.53.53.101 |
| 1247 | 13.37.53.61 |
| 1343 | 29.37.41.41 |
| 1419 | 5.5.5.89.181 |
| 1491 | 5.37.61.197 |
| 1589 | 5.41.109.113 |
| 1609 | 5.41.73.173 |
| 1613 | 13.17.61.193 |
| 1637 | 13.13.101.157 |
| 1681 | 5.5.17.61.109 |
| 1691 | 5.13.29.37.41 |
| 1749 | 5.17.17.29.73 |
| 1839 | 5.37.101.181 |
| 1861 | 5.37.97.193 |
| 1999 | 5.41.101.193 |
| 2019 | 5.5.41.41.97 |
| 2041 | 5.73.101.113 |
| 2055 | 13.17.97.197 |
| 2081 | 5.5.5.5.13.13.41 |
| 2131 | 5.5.13.89.157 |
| 2201 | 5.53.101.181 |
| 2449 | 13.29.101.157 |
| 2479 | 5.73.113.149 |
| 2601 | 5.13.29.37.97 |
| 2625 | 5.13.53.73.137 |
| 2771 | 5.73.109.193 |
| 2989 | 5.13.13.97.109 |
| 3871 | 5.13.37.37.113 |
| 3199 | 5.13.29.61.89 |
| 3413 | 29.41.97.101 |
| 3721 | 5.17.29.41.137 |
| 4031 | 5.5.13.17.17.173 |
| 4061 | 5.17.17.101.113 |
| 4109 | 5.13.13.13.29.53 |
| 4315 | 13.41.181.193 |
| 4419 | 5.5.5.13.61.197 |
| 4541 | 5.17.41.61.97 |
| 4979 | 5.29.37.97.157 |
| 5097 | 13.61.181.181 |
| 5169 | 5.5.5.37.53.109 |
| 5381 | 5.5.13.41.41.53 |
| 5459 | 5.13.17.149.181 |
| 5761 | 5.17.37.61.173 |
| 5869 | 5.5.89.113.137 |
| 6081 | 5.5.5.29.101.101 |
| 7781 | 5.5.29.37.37.61 |
| 9039 | 5.29.37.97.157 |
| 9779 | 5.37.73.73.97 |
| 10519 | 5.37.37.53.61 |
| 10527 | 41.109.137.181 |
| 10831 | 5.5.5.5.17.61.181 |
| 11511 | 5.17.41.193.197 |
| 13331 | 5.5.5.5.5.29.37.53 |
| 13581 | 5.5.5.17.29.41.73 |
| 13889 | 5.41.89.97.109 |
| 13911 | 5.13.13.29.53.149 |
| 14451 | 5.29.73.109.181 |
| 16069 | 5.5.13.37.109.197 |
| 16985 | 17.29.53.61.181 |
| 17421 | 5.13.137.173.197 |
| 18511 | 5.13.17.17.17.29.37 |
| 18563 | 13.37.41.101.173 |
| 18685 | 17.29.73.89.109 |
| 24061 | 5.29.29.37.61.61 |
| 24261 | 5.17.17.37.101.109 |
| 27665 | 13.37.41.197.197 |
| 29019 | 5.5.37.53.89.193 |
| 29981 | 5.5.37.41.137.173 |
| 31669 | 5.5.5.5.13.17.53.137 |
| 58397 | 13.17.29.37.73.197 |
| 59279 | 5.13.53.73.89.157 |
| 88789 | 5.13.17.29.37.61.109 |
| 103481 | 5.5.13.13.17.29.53.97 |
| 132081 | 5.5.5.5.5.5.5.13.89.193 |
| 170529 | 5.17.29.41.53.61.89 |
| 213331 | 5.5.5.5.5.5.13.13.17.37.137 |
| 383229 | 5.17.17.61.89.97.193 |
| 728391 | 5.13.73.97.101.101.113 |
| 1934581 | 5.5.5.5.13.17.17.17.29.53.61 |
| 2446081 | 5.5.5.13.17.17.37.53.73.89 |
| 4056181 | 5.5.13.17.29.41.101.137.181 |
| 5106581 | 5.5.5.13.17.37.41.61.101.101 |
| 14836119 | 5.5.13.13.17.17.17.17.29.137.157 |

| | |
|---|---|
| 13 | 1 |
| 17 | 15. 19. 53. 831. |
| 29 | 9. 49. 1169 |
| 37 | 11. 729. 18511 |
| 41 | 31. 51. 359. 1343. 1691. 2081 |
| 53 | 25. 81. 131. 1035. 1141. 4109. 5381. 13331 |
| 61 | 27. 339. 461. 1247. 7781. 10519. 24061. 1934581 |
| 73 | 3. 149. 441. 581. 879. 1171. 1749. 13581 |
| 89 | 5. 183. 529. 3199. 170529. 2446081 |
| 97 | 79. 661. 2019. 2601. 4541. 9779. 103481 |
| 101 | 21. 181. 223. 1191. 3413. 6081. 5106581 |
| 109 | 63. 155. 281. 717. 1681. 2989. 5169. 13889. 18685. 24261*. 88789 |
| 113 | 7. 219. 233. 911. 1589. 2041. 3871. 4061. 728391 |
| 137 | 115. 159. 389. 433. 707. 937. 2625. 3721. 5869. 31669*. 213331 |
| 149 | 95. 393. 989. 2479. 13911 |
| 157 | 67. 381. 1637. 2131. 2445. 4979. 9039. 59279 1483619 |
| 173 | 121. 467. 571. 1609. 4031. 5761. 18563. 29981 |
| 181 | 29. 391. 1419. 1839. 2201. 5097. 5459. 10527. 10831. 14451*. 16985. 4056181 |
| 193 | 69. 455. 1613. 1861. 1999. 2771. 4315. 29019. 132081. 383229 |
| 197 | 85. 309. 703. 873. 1097. 1491. 2055. 4419. 11511. 16069*. 17421. 27665. 58397 |

Zerlegbare $aa+81$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1807 | 5.53.61.101 | 10118 | 5.37.53.53.197 |
| 1 | 41 | 323 | 5.53.197 | 2008 | 5.13.17.41.89 | 10577 | 3.29.41.97.97 |
| 2 | 5.17 | 352 | 5.137.181 | 2009 | 13.29.53.101 | 11563 | 5.5.13.29.41.173 |
| 4 | 97 | 376 | 17.53.157 | 2041 | 97.109.197 | 12143 | 5.29.29.89.197 |
| 5 | 53 | 389 | 17.61.73 | 2051 | 29.29.41.61 | 12565 | 13.17.29.109.113 |
| 7 | 5.13 | 406 | 17.89.109 | 2125 | 13.29.53.113 | 15233 | 5.29.73.97.113 |
| 8 | 5.29 | 409 | 13.41.157 | 2138 | 5.5.5.13.29.97 | 16237 | 5.5.5.17.17.41.89 |
| 10 | 181 | 417 | 5.17.29.37. | 2293 | 5.17.157.197 | 16522 | 3.17.29.37.41.73. |
| 11 | 101 | 461 | 13.13.17.37 | 2332 | 5.5.29.73.101 | 16777 | 5.13.13.17.97.101 |
| 13 | 5.5.5. | 472 | 5.19.29.53. | 2450 | 13.17.157.173 | 17888 | 5.5.5.5.37.101.137 |
| 17 | 5.37 | 487 | 5.5.5.13.73. | 2531 | 17.29.73.89 | 17942 | 5.13.29.53.53.61 |
| 19 | 13.17 | 491 | 17.41.173 | 2623 | 5.41.97.173 | 18887 | 5.5.29.37.61.109 |
| 20 | 13.37 | 533 | 5.157.181 | 2705 | 17.29.41.181 | 18974 | 13.13.17.29.29.149 |
| 22 | 5.113 | 547 | 5.173.173 | 2888 | 5.5.5.5.5.17.157 | 19358 | 5.13.13.41.61.181 |
| 23 | 5.61 | 553 | 5.13.13.181 | 2906 | 13.37.97.181 | 20362 | 5.5.5.113.149.197 |
| 28 | 5.173 | 566 | 13.157.157 | 3088 | 5.5.13.13.37.61 | 23368 | 5.13.13.53.89.137 |
| 32 | 5.13.17 | 575 | 37.41.109 | 3238 | 5.5.41.53.193 | 24083 | 5.13.157.157.181 |
| 37 | 5.5.29 | 578 | 3.13.53.97 | 3312 | 5.13.41.41.101 | 24499 | 13.17.61.113.197 |
| 38 | 5.5.61 | 587 | 5.5.61.113 | 3347 | 5.13.17.37.137 | 24958 | 5.17.37.47.53.101 |
| 40 | 41.41 | 617 | 5.13.29.101 | 3503 | 5.13.13.53.137 | 29153 | 5.13.17.29.89.149 |
| 43 | 5.193 | 631 | 13.17.17.53 | 3517 | 5.13.17.29.193 | 29242 | 5.17.17.61.89.109 |
| 49 | 17.73 | 662 | 5.5.89.197 | 3791 | 29.37.37.181 | 29765 | 17.37.41.89.193 |
| 50 | 29.89 | 683 | 5.13.37.97 | 3988 | 5.5.29.97.173 | 30218 | 5.13.41.41.61.137 |
| 53 | 5.17.17 | 694 | 53.61.149 | 4010 | 13.13.17.29.193 | 32487 | 5.3.5.5.5.41.53.73 |
| 58 | 5.13.53 | 733 | 5.17.29.109 | 4112 | 5.5.5.17.73.109 | 31843 | 5.13.17.17.137.197 |
| 59 | 13.137 | 737 | 5.5.5.41.53 | 4354 | 17.61.101.181 | 34763 | 5.5.5.5.5.17.29.37.53 |
| 62 | 5.5.137 | 763 | 5.5.5.17.137 | 4388 | 5.5.5.13.17.17.41 | 35137 | 5.5.17.73.101.197 |
| 71 | 13.197 | 797 | 5.17.37.101 | 4429 | 29.41.73.113 | 35783 | 3.13.17.17.173.197 |
| 79 | 29.109 | 861 | 5.5.5.5.29.41 | 4648 | 5.13.29.73.157 | 37147 | 5.13.17.41.97.157 |
| 83 | 5.17.41 | 877 | 5.13.61.97 | 4657 | 5.101.109.197 | 38201 | 13.17.17.29.37.181 |
| 91 | 37.113 | 920 | 17.37.29.101 | 4837 | 5.5.41.101.113 | 44987 | 5.5.5.13.29.109.197 |
| 95 | 29.157 | 1018 | 5.17.89.137 | 5083 | 5.29.41.41.53 | 46963 | 5.5.13.29.29.53.73. |
| 97 | 5.13.73 | 1037 | 5.5.137.157 | 5162 | 5.5.61.101.173 | 56387 | 5.5.13.17.53.61.89 |
| 98 | 5.13.149 | 1060 | 13.13.61.109 | 5557 | 5.13.17.89.157 | 57037 | 5.5.13.17.37.73.109 |
| 101 | 53.97 | 1108 | 3.41.53.113 | 5747 | 5.109.157.193 | 60743 | 5.13.17.17.19.53.109 |
| 112 | 5.5.5.101 | 1118 | 5.53.53.89 | 5792 | 5.13.13.29.37.37 | 61337 | 5.5.41.109.113.149 |
| 122 | 5.41.73 | 1168 | 5.29.97.97 | 5833 | 3.17.17.61.193 | 69107 | 5.17.53.53.73.137 |
| 124 | 13.29.41 | 1201 | 37.101.193 | 6015 | 3.5.5.5.5.5.13.89 | 69244 | 13.13.29.37.137.193 |
| 128 | 5.37.89 | 1229 | 13.13.41.109 | 6233 | 5.13.37.41.197 | 79813 | 5.5.13.17.53.73.149 |
| 137 | 5.5.13.29 | 1243 | 5.17.61.149 | 6458 | 5.17.37.89.149 | 86528 | 5.17.29.97.173.181 |
| 139 | 89.109 | 1265 | 73.97.113 | 6532 | 5.5.37.113.157 | 87163 | 5.3.5.5.5.13.17.37.149 |
| 163 | 5.5.13.41 | 1277 | 5.17.53.181 | 6689 | 13.97.113.157 | 97577 | 5.29.61.73.73.101 |
| 188 | 5.5.13.109 | 1313 | 5.5.29.29.41 | 6883 | 5.13.13.17.17.97 | 98063 | 5.5.73.97.157.173 |
| 191 | 101.181 | 1436 | 13.41.53.73 | 7097 | 5.29.29.53.113 | 121933 | 5.13.41.97.149.193 |
| 202 | 5.13.17.37 | 1447 | 5.17.109.113 | 7160 | 53.61.101.157 | 132683 | 5.17.29.109.181.181 |
| 215 | 13.13.137 | 1463 | 5.5.13.37.89 | 7793 | 3.13.29.89.181 | 157723 | 5.13.13.29.53.61.157 |
| 217 | 5.53.89 | 1475 | 13.13.41.157 | 8158 | 3.13.13.17.41.113 | 168703 | 5.37.37.61.173.197 |
| 247 | 3.41.149 | 1487 | 5.5.5.5.29.61 | 8273 | 5.29.53.61.73 | 181508 | 5.41.41.101.197.197 |
| 248 | 5.109.113. | 1585 | 53.137.173 | 8638 | 5.5.5.13.17.37.73 | 195787 | 5.5.13.17.29.37.53.61 |
| 253 | 5.13.17.29 | 1639 | 41.181.181 | 9028 | 5.13.73.89.193 | 237322 | 5.13.13.13.17.17.113.157 |
| 268 | 5.73.197 | 1645 | 13.29.37.97 | 9101 | 41.73.101.137 | 269861 | 13.37.41.101.101.181 |
| 287 | 5.3.17.97 | 1685 | 17.37.37.61 | 9295 | 61.73.89.109 | 278297 | 5.5.13.37.97.113.113 |
| 292 | 5.13.13.101 | 1702 | 5.17.173.197 | 9562 | 5.5.13.29.89.109 | 297212 | 5.3.13.97.113.137.193 |
| 313 | 5.5.37.53 | 1703 | 5.29.73.137 | 9587 | 5.5.13.13.73.149 | 314387 | 5.5.41.41.73.89.181 |
| 317 | 5.89.113 | 1787 | 3.3.13.17.17.17 | 9607 | 5.17.29.97.193 | 327737 | 5.5.3.5.13.13.29.89.197 |

| | |
|---|---|
| 349487 | 5.5.5.29.29.53.97.113 |
| 474013 | 5.5.5.13.17.17.29.73.113 |
| 609161 | 13.73.73.113.137.173 |
| 647665 | 29.37.53.97.193.197 |
| 934862 | 5.5.5.13.13.17.17.37.53.73 |
| 1125533 | 5.13.41.89.101.137.193 |
| 1158413 | 5.5.29.37.41.61.73.137 |
| 1880912 | 5.5.13.17.37.53.53.61.101 |
| 2023513 | 5.5.5.5.37.41.97.113.197 |
| 2092285 | 17.17.37.37.37.41.41.89 |
| 2898587 | 5.5.17.29.73.137.173.197 |
| 3559861 | 13.37.61.89.109.113.197 |
| 4034153 | 5.13.13.17.29.41.53.89.101 |
| 4676188 | 5.5.17.37.37.37.89.101.113 |
| 4802183 | 5.73.97.109.113.137.193 |
| 4947916 | 17.17.37.53.61.73.89.109 |
| 6678737 | 5.5.5.17.17.29.41.53.97.101 |
| 9578563 | 5.5.13.17.17.17.29.61.109.149 |
| 34928797 | 5.13.13.17.29.37.53.53.73.193 |
| 59554033 | 5.13.13.13.37.61.73.89.101.109 |

| | |
|---|---|
| 5 | 13 |
| 13 | 7 |
| 17 | 2. 19. 32. 53. 1787 |
| 29 | 8. 37. 137. 253 |
| 37 | 17. 20. 202. 427. 461. 5792 |
| 41 | 1. 40. 83. 124. 163. 862. 1313. 4388 |
| 53 | 5. 58. 313. 472. 631. 737. 5083. 34763 |
| 61 | 23. 38. 1487. 1685. 2051. 3088. 17972. 195787 |
| 73 | 49. 97. 122. 389. 487. 1436. 8273. 8638. 16522. 31487. 46963. 934862 |
| 89 | 50. 128. 217. 1218. 1463. 2008. 2531. 6013. 16237. 56387. 2092285 |
| 97 | 4. 101. 287. 578. 683. 877. 1168. 1645. 2138. 6883. 10577 |
| 101 | 11. 112. 292. 617. 797. 920. 1807. 2009. 2312. 3322. 16777. 24958. 97577. 1880912. 4034153. 6678737 |
| 109 | 79. 139. 188. 406. 575. 733. 1060. 1229. 4112. 9295. 9562. 18887. 29242. 57037. 60743. 4947916. 59554033 |
| 113 | 22. 91. 248. 317. 587. 1108. 1265. 1447. 2125. 4429. 4837. 7097. 8158. 12565. 15233. 278297. 349487. 474013. 4676188 |
| 137 | 59. 215. 763. 1018. 1703. 3347. 3503. 9101. 17888. 23368. 30218. 69107. 1158413 |
| 149 | 98. 247. 694. 1243. 6458. 9587. 18974. 29153. 61337. 79813. 87263. 9578563 |
| 157 | 62. 95. 376. 409. 566. 1037. 1475. 2888. 4648. 5557. 6532. 6689. 7160. 37147. 157723. 237322 |
| 173 | 28. 491. 547. 1585. 2450. 2623. 3988. 5162. 11563. 98063. 609161 |
| 181 | 10. 191. 352. 533. 553. 1277. 1639. 2705. 2906. 3791. 4354. 7793. 19558. 24083. 38201. 86528. 132683. 269861. 314387 |
| 193 | 43. 1201. 3238. 3517. 4010. 5747. 5833. 9028. 9607. 29765. 69244. 121933. 297212. 1125533. 4802183. 34928797 |
| 197 | 71. 268. 323. 662. 1702. 2041. 2293. 4657. 6233. 10118. 12143. 20362. 24499. 31843. 35137. 35783. 44987. 168703. 181508. 327737. 647665. 2023513. 2898587. 3559861 |

## BEMERKUNGEN.

Diesem zweiten Bande von Gauss Werken sind alle Abhandlungen, Aufsätze und Tafeln aus dem Gebiete der Höheren Arithmetik, soweit die sieben Sectionen der *Disqu. Arithm.* sie nicht schon umfassen, einverleibt, und zwar die in den '*Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis*' (in Quart) veröffentlichten fünf Abhandlungen, die in den '*Göttingischen Gelehrten Anzeigen*' (in Octav) erschienenen (von Gauss nicht unterzeichneten, aber durch die Acten der Göttinger Universitäts-Bibliothek in Betreff der Autorschaft verificirten) Anzeigen sowohl dieser eignen als auch einiger anderer nichteigner Schriften, und eine Auswahl aus dem Handschriftlichen Nachlasse.

Zur bessern Uebersicht der Gegenstände in einem so umfangreichen Bande sind die Lehrsätze auf gleiche Weise durch den Druck ausgezeichnet. Zum leichtern Gebrauch sowohl der ältern Ausgaben wie der vorliegenden ist bei den Verweisungen auf die Disqu. Arithm. statt der Nummer der Seite die der Artikel gesetzt, so wie bei den Angaben von Abhandlungen statt des Orts ihrer Veröffentlichung deren eigner Titel. Die Note, die dem Art. 2 der Abhandlung '*Theorematis arithmetici demonstratio nova*' ursprünglich beigegeben war und die eine Berichtigung des Art. 131 Disqu. Arithm. enthielt, ist dort der betreffenden Stelle eingefügt. Die Note auf Seite 21 ist einer handschriftlichen Notiz entlehnt. Ausserdem unterscheidet sich die vorliegende Ausgabe von den früheren nur durch die Berichtigung einiger Druckfehler.

Die *Tafel des quadratischen Characters der Primzahlen* ist nach der Weise der in Art. 22 beschriebenen und (in Art. 331) zur Zerlegung der Zahlen vorzugsweise angewandten Tabula II der Disqu. Arithm. gedruckt. Die Handschrift unter dem Titel '*Quadratorum numeris primis divisorum residua lateralia*' hat in den Schriftzügen am meisten Aehnlichkeit mit der des zweiten Theiles der Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche, sie enthält an der Stelle der den Quadratischen Rest anzeigenden horizontalen Striche kleine Kreise, von denen immer diejenigen durch Linien verbunden sind, die in benachbarten horizontalen oder verticalen Reihen vorkommen. Bei der Correctur wurde ich auf mehrere Fehler

aufmerksam, habe dann bei einer einmaligen Vergleichung mit JACOBI's *Canon Arithmeticus* 190 Abweichungen in den Angaben der Charactere und nach directer Bestimmung diese in Uebereinstimmung mit jenen gedruckten Tafeln gefunden, dem entsprechend ist hier die Angabe berichtigt.

Von der *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche* ist hier der erste Theil der Tabule III der Disqu. Arithm. ähnlich eingerichtet, er enthält für die Primzahlen und deren Potenzen $p^\pi$, welche zwischen 3 und 463 liegen, die Mantissen (1), (2) . . (θ) der Decimalbrüche von $\frac{10\,r}{p^\pi}, \frac{10.rr}{p^\pi} \ldots \frac{10}{p^\pi}$, worin $r$ die Einheit bedeutet, also (1) = (2) = . . (θ) wird, wenn 10 Primitivwurzel von $p^\pi$ ist, sonst aber $r$ die kleinste unter denjenigen Primitivwurzeln von $p^\pi$ bezeichnet, für welche als Basis der Index von 10 den kleinsten Werth annimmt. Die von 1 verschiedenen Werthe von $r$ hat man zur Erleichterung des Gebrauchs auf Seite 420 der Tafel beigefügt. Die Handschrift, in der auch noch nicht die Unterscheidungsziffern der verschiedenen Perioden angegeben sind, entspricht äusserlich am meisten der Analysis residuorum und scheint in der Zeit dem hier als zweiten Theil der ganzen Tafel hingestellten Stücke voraufzugehen. Dieser zweite Theil enthält für die Primzahlen und deren Potenz $p^\pi$ zwischen 467 und 997 die Mantissen der Decimalbrüche von $\frac{100}{p^\pi}$. Die Handschrift gibt die Theiler in abnehmender Reihenfolge und schliesst mit den Worten: *Explicitus October* 11. 1795. Im Drucke ist beim Theiler 191 Periode (1) die 71ste Ziffer hinzugefügt und beim Theiler 829 eine zwischen der 151 und 152sten Ziffer stehende Zahl fortgelassen.

Die von GAUSS selbst in einem Briefe (Seite 444) erläuterte *Tafel der Frequenz der Primzahlen* besteht für ihren ersten Theil, welche die Anzahl der Primzahlen in jedem der 1000 ersten Chiliaden gibt, in einer Handschrift von GAUSS, es finden sich im Nachlass aber nicht die in dem Briefe angedeuteten Abzählungen der der ersten Million angehörenden Hunderte, die eine bestimmte Anzahl von Primzahlen enthalten. Der andere Theil der Tafel nemlich für die zweite und dritte Million ist einer von GOLDSCHMIDT allein herrührenden Handschrift entlehnt.

Die *Tafel der Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen* gibt die Anzahl der Genera und Classen so wie den Index der Irregularität für die negativen Determinanten in den Hunderten 1 bis 30, 43, 51, 61, 62, 63, 91 bis 100, 117 bis 120, dann noch in einer besondern Zusammenstellung für die des 1. 3. und 10ten Tausend, für die 800 ersten von der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$, sowie für einige sehr grosse Determinanten, ferner für die positiven Determinanten des 1. 2. 3. 9. 10ten Hundert und für einige andere. Die Handschrift besteht aus einzelnen Zetteln, auf denen die Tafeln verschiedenartig eingerichtet sind, z. B. ist bei den ältern das Wort Ordo statt Genus gebraucht, so bei den einzelnen Centaden mit Ausnahme der 9. und 10. positiver Determinanten, dann aber auch bei einzelnen vorläufigen Zusammenstellungen in Chiliaden. Zur leichtern Uebersicht ist hier überall die Bezeichnung der Disqu. Arithm. gewählt, auch die grössten und kleinsten Quotienten aus der Anzahl der Classen dividirt durch den Determinanten, sowie die Anzahl der Determinanten, für welche der Quotient innerhalb gewisser Grenzen fällt, sind wegen Mangel an Raum nicht unter die einzelnen Centaden gesetzt sondern am Ende der Tafel für die negativen Determinanten zusammengestellt. Aus einigen übrig gebliebenen Aufzeichnungen

scheint hervorzugehen, dass Gauss zuerst die Classen für die Determinanten berechnet hat, die demselben Hundert und demselben Reste bei dem Theiler 15 angehören. Die Determinanten dieser Abtheilungen sind dann nach der Anzahl der Genere und Classen und zuletzt alle die demselben Hundert angehörigen auf die hier wiedergegebene Weise geordnet. Den Tafeln der einzelnen Centaden sind manche spätere Berichtigungen eingefügt, nicht aber den Zusammenstellungen in Tausenden. Zeitbestimmungen enthalten nur die beiden Tafeln mit den Determinanten der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$ nemlich resp. *'Expl. Jn. Febr. 1801'* und *'Expl. 27 Febr. 1807.'*

In diesen Tafeln habe ich unter anderen die folgenden Fehler bemerkt, denen ich hier zur leichtern Controle die Periodenzahlen der Fundamentalclassen wie z. B. 4. 4. 2 bei dem Determinanten −11713 und die durch Formen der resp. Fundamentalclassen dargestellten Zahlen wie 31. 37. 2 beifüge, indem als Fundamentalclassen solche Classen genommen werden, die in Vereinigung mit den Classen ihrer Perioden durch Composition jede eigentlich primitive Classe des Determinanten einmal und nur einmal hervorbringen.

| Es sind schon die Angaben fortgelassen: | | | | | und hinzugefügt: | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centas 9 | G. IV ... | 3 .. | — | 827 [2::3] | Centas 9 | G. IV ... | 3 .. | — | 828 [6.2::31.23] |
| 26 | IV | 14 | — | 2587 [24::11] | 26 | IV | 14 | — | 2586 [28.2::7.2] |
| 26 | VIII | 6 | — | 2564 [56::3] | 26 | VIII | 6 | — | 2565 [12.2.2::7.2.5] |
| 91 | I | 111 | — | 9059 [117::5] | 91 | I | 117 | — | 9059 [117::5] |
| 120 | IV | 32 | — | 11956 "2" [36.2::11.49] | 120 | IV | 32 | — | 11966 "2" [32.4::5.83] |
| 1 | I | 2 | + | 37 [3::3] | 1 | I | 3 | + | 37 [3::3] |
| 2 | I | 2 | + | 101 [3::4] | 2 | I | 3 | + | 101 [3::4] |

Bei der Tafel für Centas 3 und der letzten auf Seite 476, welche in der Handschrift mit einer von der hier abgedruckten äusserlich verschiedenen Aufzeichnung der Centas 1 und 2 vereinigt vorkommen, sind die zwölf Abtheilungen statt mit I. Ordo unicus. 1; I. O. 2; I. O. 3; I. O. 4; II. Ordines duo. 1. 1; II. O. 1. 2; II. O. 2. 2; II. O. 3. 3; III. Ordines quatuor. 1. 1. 1. 1; III. O. 1. 1. 2. 2; III. O. 2. 2. 2. 2; IV. Ordines octo 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1; hier auf die sonst angewandte Weise mit G. I. 1; G. I. 3; G. I. 5; G. I. 7; G. II. 1; G. II. 2; G. II. 3; G. II. 5; G. IV. 1; G. IV. 2; G. IV. 3; G. VIII. 1; bezeichnet. Die Rechnung ergibt nemlich z. B. 269. I. 3 [3::4]; 235. IV. 3 [6. 2::3. 5]; 401. I. 5 [5::5]; 577. I. 7 [7::3]; 727. II. 5 [10::3]. (Genera I statt Genus I auf Seite 469 ist ein Druckfehler).

| In Folge von Druckfehlern ist auszulassen: | | | | | und hinzuzufügen: | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centas 12. | G. IV .... | 5 ... | — | 1237 | Centas 12. | G. IV .... | 5 ... | — | 1137 |
| 27 | IV | 16 | — | 2624 "3" | 27 | IV | 16 | — | 2624 "2" [16. 4::3. 16] |
| 93 | IV | 16 | — | 9216 | 93 | IV | 16 | — | 9216 "2" [16. 4::5. 9] |
| 118 | VIII | 4 | — | 11713 "3" | 118 | VIII | 4 | — | 11713 "2" [4. 4. 2::31. 37. 2] |

| Ausserdem ist noch auszulassen: | | | | | und hinzuzufügen: | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centas 10. | G. II .... | 9 ... | — | 972 [6.3::7.13] | Centas 10. | G. II .... | 9 ... | — | 972 "3" [6. 3::7. 13] |
| 17 | IV | 4 | — | 1660 [10.2::11.5] | 17 | IV | 12 | — | 1700 [24.2::3.17] |
| 20 | IV | 12 | — | 1982 [24::3] | 20 | IV | 12 | — | 1937 [24.2::7.2] |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Centas 21. | G. IV.... | 6... | — 2096[30.2::3.4] | Centas 21. | G. IV .... | 6... | — 2097[12.2::47.2] |
| 23 | IV | 9 | — 2221[18::10] | 23 | IV | 9 | — 2224[18.2::5.16] |
| 24 | IV | 12 | — 2376[12.2.2::5.8.8] | 24 | IV | 12 | — 2366[24.2::3.2] |
| 29 | IV | 9 | — 2887[25::8] | 29 | IV | 9 | — 2885[18.2::3.5] |
| 61 | IV | 7 | — 6028[12.2::13.4] | 61 | IV | 6 | — 6028[12.2::13.4] |
| 96 | VIII | 13 | — 9594[20.2.2::31.2.13] | 96 | VIII | 13 | — 9546[26.2.2::5.3.37] |
| 118 | IV | 25 | — 11780[16.4.2::3.8.19] | 118 | IV | 25 | — 11750[50.2::3.47] |
| 118 | VIII | 16 | — 11780[16.4.2::3.8.19] | 118 | VIII | 16 | — 11780*2*[16.4.2::3.8.19] |
| 119 | VIII | 16 | — 11844[24.2.2::5.9.7] | 119 | VIII | 16 | — 11840*2*[16.4.2::3.16.5] |
| Millias I | G. II | 3 | — 541[10::11] | Millias I. | G. II | 5 | — 415[10::13 |
| I | II | 4 | — 415[10::13] | I | II | 5 | — 541[10::11] |
| I | II | 8 | — 527[18::3] | I | II | 9 | — 459*3*[6.3::5.9] |
| I | II | 8 | — 722[18::3] | I | II | 9 | — 527[18::3] |
| I | II | 9 | — 194[20::5] | I | II | 9 | — 722[18::3] |
| I | II | 9 | — 459[6.3::5.9] | I | II | 9 | — 972*3*[6.3::7.13] |
| I | II | 9 | — 972[6.3::7.13] | I | II | 10 | — 194[20::5] |
| I | II | 11 | — 842[26::13] | I | II | 13 | — 842[26::13] |
| I | IV | 3 | — 784[8.2::5.4] | I | IV | 2 | — 532[4.2::13.7] |
| I | IV | 4 | — 532[4.2::13.7] | I | IV | 4 | — 784[8.2::5.4] |
| I | IV | 5 | — 425[12.2::3.17] | I | IV | 6 | — 425[12.2::3.17] |
| I | IV | 5 | — 608[12.2::13.27] | I | IV | 6 | — 608[12.2::13.27] |
| I | IV | 5 | — 629[18.2::5.2] | I | IV | 9 | — 629[18.2::5.2] |
| III | II | 15 | — 2578[16::13] | III | II | 15 | — 2518[30::19] |
| X | I | 111 | — 9059[117::5] | X | I | 117 | — 9059[117::5] |
| formae—(15n+13) | IV | 4 | — 2788*2*[8.2::19.17] | formae—(15n+13 | IV | 4 | — 2788[8.2::19.17] |

Die Tafeln *zur Cyclotechnie* geben für 2452 Zahlen von der Form $aa+1$, $aa+4$, $aa+9, \ldots . aa+81$ die sämmtlichen ungeraden Primtheiler $p$ neben den zugehörigen $a$ und zwar in solchen Fällen, wo die Primtheiler alle unter 200 liegen, nur dann werden $aa+1$ u.s.f. zerlegbar genannt.

Zur leichtern Uebersicht beim Gebrauche hat Gauss für jede Tafel, aus der sich die vollständigen Zerlegungen von Zahlen einer der besonderen Formen bestimmen lassen, eine Hülfstafel aufgestellt, die neben jeder Primzahl $p$ solche Zahlen $a$ enthält, deren um 1 oder 4.... vermehrtes Quadrat die Zahl $p$ zum grössten Primtheiler hat.

Der Hauptzweck der Tafeln ist die Erleichterung, die sie für die genaue Berechnung der Bögen gewähren, deren Cotangenten gegebene rationale Zahlen sind. Zunächst können nemlich mit ihrer Hülfe die Bögen für kleine Cotangenten aus den Bögen für grosse Cotangenten zusammengesetzt und dadurch die noch erforderlichen Berechnungen der Reihen, welche die Bögen in ihren Cotangenten ausdrücken, auf ein sehr geringes Maass beschränkt werden. Die hierauf hinzielenden Entwickelungen, die sich in dem hand-

schriftlichen Nachlass finden, sind wenig ausgedehnt, die folgende ist die am weitesten fortgeführte. Es bezeichnen darin

$$[2]\,[5]\,[13]\,[17]\,[29]\,[37]\,[41]\,[53]\,[61]\,\ldots\,[197]\,(18)(57)(239)\left(\tfrac{79}{3}\right)\ldots$$

die Bögen der Cotangenten

$$1 \quad 2 \quad \tfrac{3}{2} \quad 4 \quad \tfrac{5}{2} \quad 6 \quad \tfrac{5}{4} \quad \tfrac{7}{2} \quad \tfrac{6}{5} \ldots 14 \quad 18 \quad 57 \quad 239 \quad \tfrac{79}{3} \ldots$$

Mit Hülfe der Tafeln ist durch Zerlegung von $18+i$, $57+i$, $239+i$ in ihre complexe Primfactoren

$$(18) = \ \ 2[2]-2[5]-[13]$$
$$(57) = -[2]+3[5]-[13]$$
$$(239) = \ \ 3[2] \qquad\quad -4[13]$$

gefunden und hieraus

$$[2] = 12(18)+8(57)-5(239)$$
$$[5] = \ \ 7(18)+5(57)-3(239)$$
$$[13] = \ \ 9(18)+6(57)-4(239)$$

ferner mit Hülfe der Tafeln

$$(268) = -2[5]+2[13]-[17]$$
$$(38) = -[5] \qquad\quad +2[17]$$

und hieraus durch Elimination von [17] und Einsetzen der zuvor erhaltenen Werthe von [5], [13]

$$(38)+2(268) = (18)-(57)-(239)$$

Die Elimination von (18) hat dann die neue Bestimmung ergeben

$$[2] = 12(38)+20(57)+7(239)+24(268)$$
$$[5] = \ \ 7(38)+12(57)+4(239)+14(268)$$
$$[13] = \ \ 9(38)+15(57)+5(239)+18(268)$$
$$[17] = \ \ 4(38)+\ \ 6(57)+2(239)+\ \ 7(268)$$

Nach folgeweiser Anwendung der Cotangenten 117, 327, 882, 18543, 307, 278, 378, 829, 993, 2943, 447, 606, 931, 1143, 1772, 6118, 34208, 44179, 85353, 485298, 17772, 9466, 330182, 5257, 114669, 12943 sind endlich [2] [5] . . . [61] durch (5257), (9466) . . . (485298) ausgedrückt und deren Coëfficienten in den folgenden Spalten zusammengestellt:

| | 5257 | 9466 | 12943 | 34208 | 44179 | 85353 | 114669 | 330182 | 485298 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | + 2805 | − 398 | + 1950 | + 1850 | + 2021 | + 2097 | + 1484 | + 1389 | + 808 |
| 5 | + 1656 | − 235 | + 1151 | + 1092 | + 1193 | + 1238 | + 876 | + 820 | + 477 |
| 13 | + 2100 | − 298 | + 1460 | + 1385 | + 1513 | + 1570 | + 1111 | + 1040 | + 605 |
| 17 | + 875 | − 124 | + 608 | + 577 | + 630 | + 654 | + 463 | + 433 | + 252 |
| 29 | + 1359 | − 193 | + 945 | + 896 | + 979 | + 1016 | + 719 | + 673 | + 391 |
| 37 | + 590 | − 84 | + 410 | + 389 | + 425 | + 441 | + 312 | + 292 | + 170 |
| 41 | + 2410 | − 342 | + 1675 | + 1589 | + 1736 | + 1802 | + 1275 | + 1193 | + 694 |
| 53 | + 994 | − 141 | + 691 | + 655 | + 716 | + 743 | + 526 | + 492 | + 286 |
| 61 | + 2481 | − 352 | + 1725 | + 1637 | + 1788 | + 1855 | + 1313 | + 1229 | + 715 |

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen, welche zur Bestimmung von [2] [5] . . . . [61] dienen können, überzeugt man sich unmittelbar durch die aus obigen Tafeln sich ergebenden Zerlegungen

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (5257) = | [2] | +2[5] | −[13] | +[17] | . | . | −[41] | . | −[61] |
| (9466) = | 2[2] | . | . | . | −[29] | −3[37] | . | . | −[61] |
| (12943) = | [2] | −4[5] | +3[13] | . | . | . | . | . | −[61] |
| (34208) = | 2[2] | −[5] | −2[13] | +[17] | +[29] | . | . | −2[53] | . |
| (44179) = | 3[2] | . | −3[13] | −2[17] | −[29] | . | . | +[53] | . |
| (85353) = | −[2] | −[5] | +[13] | −[17] | . | −[37] | +2[41] | −[53] | . |
| (114669) = | −3[2] | . | . | +[17] | . | +[37] | . | +2[53] | +2[61] |
| (331282) = | −4[2] | +5[5] | +[13] | . | +[29] | −[37] | −[41] | . | +[61] |
| (485298) = | −2[2] | −[5] | +4[13] | . | −2[29] | +[37] | . | +[53] | . |

Die von den Rechnern bis jetzt angewandten Arten zur Bestimmung von $\frac{\pi}{4} = (1)$ stellt Gauss in der folgenden Uebersicht zusammen

| | | |
|---|---|---|
| Machin | $(1) = 4(5) - (239)$ | auch Clausen |
| Euler | $= (2) + (3)$ | (Euler à Goldbach 1746 Mai 28) |
| Vega | $= 5(7) + 2(\frac{79}{3})$ | (Vega Thesaurus logar. p. 633) |
| Vega | $= 2(3) + (7)$ | auch Clausen (Astr. Nachr. B. 25. S. 209) |
| Rutherford | $= 4(5) - (70) + (99)$ | (Philos. Trans. 1841. p. 283) |
| Dase | $= (2) + (5) + (8)$ | (Crelle Journal. B. 27. S. 198) |
| Gauss. 1. | $= 12(18) + 8(57) - 5(239)$ | |
| Gauss. 2. | $= 12(38) + 20(57) + 7(239) + 24(268)$ | |

Die ersten Rechnungen für die Tafeln gehören der Zeit der Ausarbeitung der *Disquis. Arr.* an, sie sind dann besonders in den Jahren 1846 und 47 gefördert. Am 21. Juli 1847 waren 2283 Zerlegungen nach der hier wiedergegebenen Ordnung in Tafeln gebracht, die übrigen 169 sind später berechnet, und ich habe sie diesem Abdruck (der sich vom Original in der Einrichtung nur durch die des leichtern Satzes wegen statt der Potenzen angewandte Schreibweise der Wiederholung der Factoren unterscheidet) mit eingeordnet.

Die Manuscripte mit diesen letzten Rechnungen scheinen die Resultate in der Form zu enthalten, wie sie unmittelbar gefunden wurden. Die Reihenfolge, in welcher dabei die Zahlen $a$ auftreten, lässt vermuthen, dass nur für die kleinern die Theiler von $aa+1$ u. s. f. aufgesucht wurden, und dass die grössern Zahlen sich aus diesen durch Anwendung besonderer Kunstgriffe ergeben haben. Aufgezeichnet ist aber nur folgende Regel: *Aus drei Zahlen* $a$, $2a-n$, $2a+n$ *findet sich eine vierte*

$$\frac{4a^3 - (nn-3)a}{nn+1}$$

*Diese ist immer eine ganze Zahl für* $n = n$ *und* $n = 1$, *sonst nur*

$$\text{für } a \equiv 0 \text{ und } \equiv \pm\sqrt{-1} \mod (nn+1) \text{ wenn } n \text{ gerade}$$
$$\text{und für } a \equiv n \text{ und } \equiv \pm\sqrt{-1} \mod \frac{nn+1}{2} \text{ wenn } n \text{ ungerade}$$

| | | |
|---|---|---|
| *Beispiele* | $a = 253,\ n = 6,$ | 1750507 |
| | $a = 294,\ n = 11,$ | 832908 |
| | $a = 119,\ n = 1,$ | 3370437 |
| | $a = 57,\ n = 3,$ | 74843 |
| | $a = 123,\ n = 9,$ | 90657 |

Zu der vierten Zahl gehören nemlich keine andern Primtheiler als zu den ersten dreien und davon sind auch nur diejenigen ungeraden Primtheiler ausgeschlossen, welche der Zahl $n$ zugehören.

Die Handschriften der hier abgedruckten Abhandlungen und Tafeln bleiben mit dem übrigen Nachlasse vereinigt und werden auf der Göttinger Universitäts-Bibliothek zur Einsicht zugänglich sein.

Schering.

INHALT.

# GAUSS WERKE BAND II. HÖHERE ARITHMETIK.

*Abhandlungen.*

*Nachlass.*





GÖTTINGEN,
GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-DRUCKEREI
W. FR. KAESTNER.